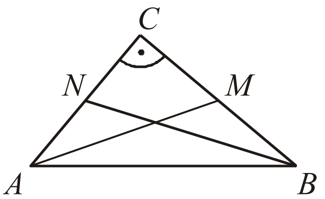
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ВТОРО РАВНИЩЕ
23 МАРТ 2014 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

1. Да се реши уравнението $5.25^x + 24.5^x - 5 = 0$.

Решение. Полагаме $5^x = y > 0$ и получаваме квадратното уравнение $5y^2 + 24y - 5 = 0$. Неговите решения са $y_1 = \frac{1}{5} > 0$ и $y_2 = -5 < 0$. Следователно $5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, т. е. $x = -1$.

2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C, за който $AM\ (M \in BC)$ и $BN\ (N \in AC)$ са медиани. Ако $AM = \sqrt{7}$ и $BN = \sqrt{13}$, да се намери лицето на триъгълника.



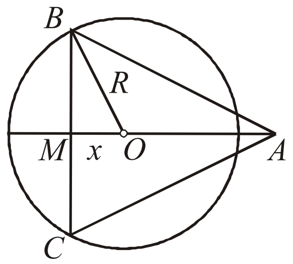
Решение. Вариант 1. Ако $AC = 2x$ и $BC = 2y$ от правоъгълния $\triangle ACM$ и намираме $4x^2 + y^2 = 7$, от $\triangle ACM$ – $x^2 + 4y^2 = 13$. Решението на системата е $x = 1$ и $y = \sqrt{3}$. Следователно $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$ и $S_{ABC} = \frac{BC.AC}{2} = 2\sqrt{3}$.

Вариант 2. От формулите за медианите и питагоровата теорема за триъгълник ABC, получаваме $4m_a^2 = 2(c^2 + b^2) - a^2 = c^2 + 3b^2$ и $4m_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2 = c^2 + 3a^2$, откъдето след като ги съберем и използваме питагоровата теорема, намираме $c = 4$. От последните три равенства получаваме $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, т. е. лицето е $S_{ABC} = \frac{ab}{2} = 2\sqrt{3}$.

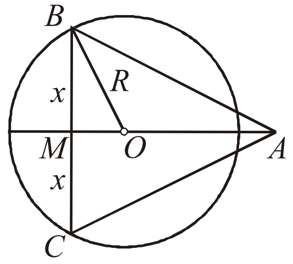
3. Да се реши неравенството $\left|\frac{2x-12}{x-3}\right| \geq 4$.

Решение. Допустими стойности са всички реални числа $x \neq 3$. Решението на неравенството е обединение от решенията на неравенствата $\frac{2x-12}{x-3} \geq 4$ и $\frac{2x-12}{x-3} \leq -4$. Първото неравенство е еквивалентно на $\frac{x}{x-3} \leq 0$, а второто на $\frac{x-4}{x-3} \leq 0$. Следователно решението е $x \in [0;3) \cup (3;4]$.

4. Дадена е окръжност с радиус $R = \sqrt{5}$ и точка A на разстояние 3 от центъра ѝ. Да се намери лицето на равнобедрен триъгълник ABC, основата BC на който е хорда в окръжността и височината през върха A е равна на основата.



Решение. Вариант 1. Нека точката O е център на окръжността. Точката O не лежи върху отсечката BC, понеже $AO = 3 < 2\sqrt{5}$. Следователно имаме две възможности. Нека точката O е вътрешна за $\triangle ABC$, а точката M е средата на BC. Ако $OM = x$, то $AM = 3 + x$, $\left(x < \sqrt{5}\right)$. От питагоровата теорема за правоъгълния $\triangle BMO$, получаваме $\left(\frac{3+x}{2}\right)^2 + x^2 = 5$, откъдето намираме $x = 1$ и следователно $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AM = 8$. Когато O е външна за триъгълника $\triangle ABC$, както по-горе получаваме $\left(\frac{3-x}{2}\right)^2 + x^2 = 5$, $\left(x < \sqrt{5}\right)$, откъдето намираме $x = \frac{11}{5}$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AM = \frac{8}{25}$.



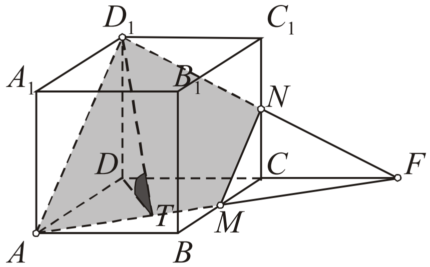
Вариант 2. Нека $AM = BC = 2x$. Тогава $OM = |2x-3|$, $OM = 2x-3$, когато O е вътрешна за триъгълника и $OM = 3-2x$, когато O е външна за $\triangle ABC$. От $\triangle BMO$ получаваме $(2x-3)^2 + x^2 = 5$, откъдето $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{5}$. И двата триъгълника са решение, понеже $x < \sqrt{5}$. При $x = 2$ имаме $BC = 4$ и $S_{ABC} = 8$, а при $x_2 = \frac{2}{5}$ – $BC = \frac{4}{5}$ и $S_{ABC} = \frac{8}{25}$.

5. Да се реши системата $\begin{vmatrix} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x - xy + y^2 = 4 \end{vmatrix}$.

Решение. От второто уравнение на системата получаваме $(2-y)x - (2-y)(2+y) = 0$, или $(2-y)(x-2-y) = 0$. При $y = 2$, от първото уравнение получаваме $x^2 + 2x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$. При $y = x-2$, от първото уравнение получаваме $3x^2 - 6x + 1 = 0$, т. е. $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$. Следователно решенията са $(-1; 2)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right)$ и $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{-3-\sqrt{6}}{3}\right)$

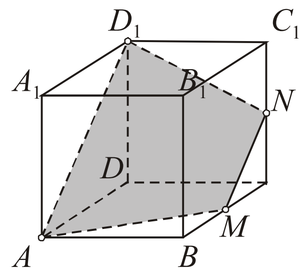
Забележка. Условието $(2-y)(x-2-y) = 0$, може да се получи, ако второто уравнение от системата се разгледа, като квадратно относно y.

6. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $AB = 4$. Точките M и N са средите съответно на ръбовете BC и CC_1. Да се намери лицето на сечението на куба с равнина γ, определена от точките A, M и N.



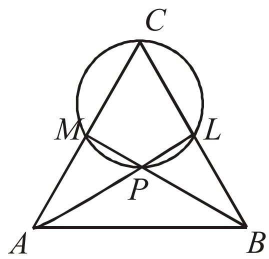
Решение. Вариант 1. Нека $AM \cap CD = F$. Тъй като $\gamma \cap (ABC) = AM$ и $\gamma \cap CD = F$, то $\gamma \cap (DCC_1) = NF$. Нека $NF \cap C_1D_1 = P$. Тогава от $\triangle ABM \cong \triangle FCM$ имаме $CF = AB = 4$, а от $\triangle FCN \cong \triangle PC_1N$ – $C_1P = CF = 4$, т. е. точката P съвпада с точката D_1. Следователно сечението е равнобедреният трапец $AMND_1$. Ортогоналната проекция на сечението върху равнината (ABC) е четириъгълникът $AMCD$, чието лице е $S_{AMCD} = S_{ABCD} - S_{ABM} = 12$. Ако $DT \perp AF$, от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $D_1T \perp AF$. Следователно $\sphericalangle(\gamma; (ABC)) = \sphericalangle DTD_1 = \varphi$. От правоъгълния $\triangle AFD$ намираме $DT = \frac{AD.DF}{AF} = \frac{4.8}{4\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$, откъдето $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DD_1}{DT} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. От последното равенство получаваме $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Следователно $S_{AMND_1} = \frac{S_{AMCD}}{\cos\varphi} = 18$.

Забележка. Лицето на сечението S_γ може да се намери като се пресметне лицето на равнобедрения $\triangle AFD_1$, Тъй като MN е средна отсечка в $\triangle AFD_1$, то $S_\gamma = S_{AFD_1} - S_{MFN}$ $= \frac{3}{4} S_{AFD_1} = \frac{3}{4}.24 = 18.$



Вариант 2. Тъй като равнина сече успоредни равнини в успоредни прави, то сечението е трапецът $AMND_1$. Понеже $\triangle ABM \cong \triangle NC_1D_1$, то трапецът е равнобедрен с бедро $AM = 2\sqrt{5}$. Основите на трапеца са $AD_1 = 4\sqrt{2}$ и $MN = 2\sqrt{2}$, а височината му е $h = 3\sqrt{2}$. Следователно $S_\gamma = \left(\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\right).3\sqrt{2} = 18.$

7. В триъгълник ABC $\sphericalangle BAC = 60°$, а AL ($L \in BC$) и BM ($M \in AC$) са съответно ъглополовяща и медиана, които се пресичат в точка P. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако четириъгълникът $CMPL$ е вписан в окръжност.



Решение. Вариант 1. Нека $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. От това, че четириъгълникът $CMPL$ е вписан в окръжност, следва че $BL.BC = BP.BM$. От $\triangle ABC$ пресмятаме $BL = \frac{ac}{b+c}$, а от $\triangle ABM$ – $BP = \frac{2cBM}{b+2c}$. Заместваме последните две равенства в $BL.BC = BP.BM$ и получаваме $4BM^2 = \frac{2a^2(b+2c)}{b+c}$. От формулата за медианата получаваме $2a^2c = 2c^2b + 2c^3 - b^3 - b^2c$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ и като заместим в $2a^2c = 2c^2b + 2c^3 - b^3 - b^2c$, получаваме $b^2 + 3bc - 4c^2 = 0$. От последното равенство намираме $b = c$. Следователно $\triangle ABC$ е равностранен, т. е. ъглите му са по $60°$.

Вариант 2. Тъй като $CMPL$ е вписан в окръжност, то $AM.AC = AP.AL$. От формулата за ъглополовящата и $\triangle ABC$ намираме $AL = \frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$, а от $\triangle ABM$ – $AP = \frac{bc\sqrt{3}}{b+2c}$. Като заместим в първото равенство получаваме $\frac{b^2}{2} = \frac{3b^2c^2}{(b+c)(b+2c)}$, откъдето получаваме $b^2 + 3bc - 4c^2 = 0$. От последното равенство намираме $b = c$. Следователно $\triangle ABC$ е равностранен, т. е. ъглите му са по $60°$.

8. Нека a, b и c са реални числа такива, че $2a + 3b + 6c = 0$. Да се докаже, че уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ има корен в интервала $[0;1]$.

Решение. Вариант 1. Ако $a = 0$, то при $b = 0$ следва, че $c = 0$ и уравнението е еквивалентно на $0.x = 0$, т. е. всяко реално число x е решение и следователно има корен и в интервала $[0;1]$. Ако $b \neq 0$, то уравнението е еквивалентно на $x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2} \in [0;1]$. Нека $a \neq 0$. Достатъчно е да разгледаме случая $a > 0$, защото ако $a < 0$, умножаваме условието $2a + 3b + 6c = 0$ и уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ с числото -1. Означаваме с $f(x) = ax^2 + bx + c$ и като използваме условието $b = -\frac{1}{3}(2a + 6c)$, пресмятаме $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = -\frac{a}{12} < 0$. Ако $f(0) = c > 0$ следва, че уравнението има корен в интервала $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и следователно и в интервала $\left[0;1\right]$. Нека $f(0)=c<0$. Пресмятаме $f(1)=a+b+c=\frac{a-3c}{3}>0$ и следователно уравнението има корен в интервала $\left[\frac{1}{2};1\right]$ и следователно и в интервала $\left[0;1\right]$.

Вариант 2. Условието $2a+3b+6c=0$ е еквивалентно на $f\left(0\right)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1\right)=0$. Ако поне едно от трите събираеми е нула – имаме корен в интервала $\left[0;1\right]$. Ако никое от събираемите не е нула, то има две с различни знаци, което е еквивалентно уравнението да има корен в интервала $\left[0;1\right]$.