СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

29 март 2015 г.

Тема № 3.

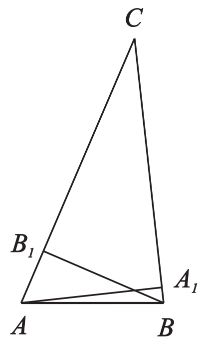
Примерни решения на задачите

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\frac{x-4}{5x-x^2-4} \geq -1.$$

Решение: Неравенство има смисъл при $5x - x^2 - 4 \neq 0$, т.е. при $x \neq 1$ и $x \neq 4$. Даденото неравенство е еквивалентно с неравенството $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4} \geq 0$. Корените на уравнението $x^2 - 6x + 8 = 0$ са $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Тогава неравенството е еквивалентно на $\dfrac{(x-2).(x-4)}{(x-1).(x-4)} \geq 0$ и след съкращаване с $(x-4)$, на неравенството $\dfrac{x-2}{x-1} \geq 0$. Тогава решенията на даденото неравенство са $\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup [2, 4) \cup (4, +\infty)}$.

Задача 2. В триъгълник ABC са дадени $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ и височините $AA_1 = 5\sqrt{3}$ и $BB_1 = 8$. Да се намерят страните на триъгълника ABC.



Решение: От $AA_1 = 5\sqrt{3}$, $\sphericalangle AA_1C = 90^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ получаваме $AC = 10\sqrt{3}$. Аналогично, от $BB_1 = 8$, $\sphericalangle BB_1C = 90^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ получаваме $BC = 16$. Тогава, от косинусова теорема за страната AB получаваме:

$$AB = \sqrt{3.10^2 + 16^2 - 2.10\sqrt{3}.16.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Окончателно: $\boxed{AC = 10\sqrt{3}, BC = 16, AB = 2\sqrt{19}}$.

Задача 3. Да се реши уравнението

$$\sqrt{-3x-2} = 3x + 4.$$

Решение: Първи начин: Повдигаме двете страни на равенството на квадрат и получаваме $-3x-2 = (3x+4)^2 \Leftrightarrow -3x-2 = 9x^2+24x+16 \Leftrightarrow 9x^2+27x+18 = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0$. Корените на това уравнение са $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$. След проверка установяваме, че $x_2 = -2$ не е решение на уравнението, а $x_1 = -1$ е решение.

Окончателно: $\boxed{x = -1}$ е решение на даденото уравнение.

Втори начин: $\sqrt{-3x-2}$ е дефиниран за $x \leq -\dfrac{2}{3}$ и тогава $\sqrt{-3x-2} \geq 0$, следователно трябва и дясната страна да е неотрицателна, т.е. $3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$. Тогава даденото уравнение може да има решение само при $x \in \left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right]$. След повдигане двете страни на уравнението на втора степен получаваме квадратното уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$, което има корени $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$ от които само $x_1 = -1$ е от разглежданото множество, т.е. само $x_1 = -1$ е решение.

Окончателно: $\boxed{x=-1}$ е решение на даденото уравнение.

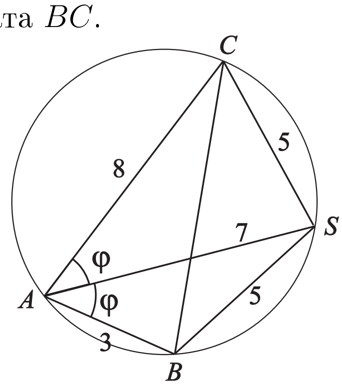
Задача 4. Пет числа образуват растяща аритметична прогресия. Намерете числата, ако сумата им е 25, а сумата от квадратите им е 285.

Решение: Нека търсените числа са $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$. Тогава $5.a=25$ и $(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2.d)^2=285$. Следователно $a=5$ и $5.a^2+10.d^2=285$. Тогава $10.d^2=160$, следователно $d^2=16$, т.е. $d=\pm 4$. Понеже прогресията е растяща, $d=4$. Тогава търсените числа са $\boxed{-3,1,5,9,13}$.

Задача 5. Колко нечетни трицифрени числа могат да се образуват с цифрите 0, 1, 4, 5, 7, и 9, като цифрите в десетичния запис на числата не се повтарят?

Решение: Нека $\overline{\mathbf{abc}}$ е нечетно трицифрено число, образувано с дадените цифри. Тогава $\mathbf{c}\in\{1,5,7,9\}$, т.е. за цифрата на единиците $\mathbf{c}$ имаме четири възможни стойности. Ако $\mathbf{c}$ е някое от числата $\{1,5,7,9\}$, тогава за цифрата на стотиците имаме $\mathbf{a}\in\{1,4,5,7,9\}\backslash\{\mathbf{c}\}$, т.е. за цифрата на стотиците имаме 4 възможни избора. Ако и $\mathbf{a}$ е вече избрано, тогава за цифрата на десетиците имаме $\mathbf{b}\in\{0,1,4,5,7,9\}\backslash\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$, т.е. за цифрата на десетиците имаме 4 възможни избора. Тогава за броя на числата с исканите свойства получаваме $\boxed{A=4.4.4=64}$.

Задача 6. Ъглополовящата на ъгъл $\sphericalangle BAC$ пресича описаната около триъгълника $\triangle ABC$ окръжност в точка S. Ако $AB=3$, $AS=7$ и $CS=5$, намерете страната BC.

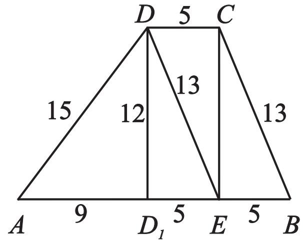


Решение. Означаваме $\varphi=\sphericalangle BAS=\sphericalangle SAC$. Равните ъгли $\sphericalangle BAS=\sphericalangle SAC$ отсичат равни дъги от окръжността, следователно съответните хорди са равни: $BS=CS=5$. Косинусова теорема за $\triangle ABS$ дава $5^2=3^2+7^2-2.3.7.\cos\varphi$, откъдето $\boxed{\cos\varphi=\dfrac{11}{14}}$. От $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$, получаваме $\boxed{\cos 2\varphi=\dfrac{23}{98}}$.
Четириъгълникът $ABSC$ е вписан в окръжност, следователно $\cos\sphericalangle BSC=\cos(180^\circ-2\varphi)=-\cos 2\varphi$.

И така, $\boxed{\cos\sphericalangle BSC=-\dfrac{23}{98}}$. От косинусова теорема за $\triangle BSC$ имаме $BC^2=5^2+5^2-2.5.5.\left(-\dfrac{23}{98}\right)$, т.е. $\boxed{BC=\dfrac{55}{7}}$. Отсечката BC може да се намери още и така: От синусова теорема имаме $\dfrac{CS}{\sin\varphi}=2R=\dfrac{BC}{\sin 2\varphi}$. Тогава $BC=\dfrac{CS.\sin 2\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{CS.2\sin\varphi.\cos\varphi}{\sin\varphi}=2CS.\cos\varphi=2.5.\dfrac{11}{14}=\dfrac{55}{7}$.

В решението могат да бъдат използувани (макар да не е необходимо) следните стойности: $\boxed{\sin\varphi=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}}$, $\boxed{R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$, $\boxed{\sin 2\varphi=\dfrac{55\sqrt{3}}{98}}$.

Задача 7. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB=19$, $CD=5$ и бедра $BC=13$, $AD=15$. Да се намерят лицето и диагоналите AC и BD на трапеца.



Решение. Построяваме $DE\|BC$, $DD_1\perp AB$ и $CC_1\perp AB$. Означаваме $\alpha=\sphericalangle BAD=\sphericalangle EAD$ и $\beta=\sphericalangle ABC=\sphericalangle AED$. Косинусова теорема за $\triangle AED$ дава

$$15^2=13^2+14^2-2.13.14.\cos\beta,$$

т.е. $\boxed{\cos\beta=\dfrac{13^2+14^2-15^2}{2.13.14}=\dfrac{140}{2.13.14}=\dfrac{5}{13}}$.

Аналогично, $13^2=15^2+14^2-2.15.14.\cos\alpha$, откъдето $\boxed{\cos\alpha=\dfrac{15^2+14^2-13^2}{2.14.15}=\dfrac{252}{2.14.15}=\dfrac{9}{15}}$.

От $\cos\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$ следва, че точките C_1 и D_1 лежат на отсечката AB.
Тогава $\boxed{D_1E = C_1B = 5}$, $\boxed{AC_1 = 14}$, $\boxed{BD_1 = 10}$, $\boxed{AD_1 = 9}$ и $\boxed{DD_1 = CC_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12}$ ($E \equiv C_1$). Височината на трапеца $DD_1 = CC_1$ може да се намери още и така: От триъгълник AED имаме $S_{AED} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{AE.DD_1}{2} \Rightarrow \sqrt{21.(21-14)(21-13)(21-15)} = 7.DD_1 \Rightarrow \sqrt{21.7.8.6} = 21.4 = 7.DD_1 \Rightarrow DD_1 = 12$. Тогава за лицето на трапеца намираме $\boxed{S_{ABCD} = \dfrac{19+5}{2}.12 = 144}$.

Косинусова теорема за $\triangle ABC$ дава $AC^2 = 19^2 + 13^2 - 2.13.19.\dfrac{5}{13} = 361 + 169 - 190 = 340$. Или от питагорова теорема за $\triangle AC_1C$ имаме $AC = \sqrt{AC_1^2 + C_1C^2} = \sqrt{14^2 + 12^2} = \sqrt{340}$, т.е. $\boxed{AC = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}}$.

Косинусова теорема за $\triangle ABD$ дава $BD^2 = 19^2 + 15^2 - 2.15.19.\dfrac{9}{15} = 361 + 225 - 342 = 244$. Или от питагорова теорема за $\triangle BD_1D$ имаме $BD = \sqrt{BD_1^2 + D_1D^2} = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244}$, т.е. $\boxed{BD = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}}$.

Окончателно $\boxed{S_{ABCD} = 144}$, $\boxed{AC = 2\sqrt{85}}$ и $\boxed{BD = 2\sqrt{61}}$.

Задача 8. За кои стойности на реалния параметър k уравнението

$$(k-2)x^4 + 2(2k-3)x^2 + 5k - 6 = 0$$

няма реални корени?

Решение: *Случай 1.* Ако старшият коефициент $(k-2)$ е 0, т.е. ако $k = 2$, уравнението има вида $2x^2 + 4 = 0$, то няма реални корени, следователно $\boxed{k = 2}$ е решение на задачата.

Ако $k \neq 2$ полагаме $t = x^2 \geq 0$ и получаваме $(k-2)t^2 + 2(2k-3)t + 5k - 6 = 0$.

Уравнението $(k-2)x^4 + 2(2k-3)x^2 + 5k - 6 = 0$ няма реални корени, когато уравнението $(k-2)t^2 + 2(2k-3)t + 5k - 6 = 0$ няма реални корени (*случай 2*) или когато има реални корени, които са отрицателни (*случай 3*).

Случай 2. Уравнението $(k-2)t^2 + 2(2k-3)t + 5k - 6 = 0$ няма корени $\Leftrightarrow$ $D < 0$ $\Leftrightarrow$ $4(-k^2 + 4k - 3) < 0$ $\Leftrightarrow$ $k^2 - 4k + 3 > 0$ $\Leftrightarrow$ $(k-1)(k-3) > 0$. Решенията от случая, когато $D < 0$ са $\boxed{k \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)}$.

Случай 3. Уравнението $(k-2)t^2 + 2(2k-3)t + 5k - 6 = 0$ има корени, които са отрицателни.

По Виет следва, че това е еквивалентно със системата $\left| \begin{array}{l} D \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 4(-x^2 + 4k - 3) \geq 0 \\ \dfrac{5k-6}{k-2} > 0 \\ -\dfrac{2(2k-3)}{k-2} < 0 \end{array} \right.$

Решенията на тази система (те са решенията в този случай) са $\boxed{k \in \left[1, \dfrac{6}{5}\right) \cup (2, 3]}$.

Общото решение е обединението на решенията на трите случая: $\boxed{k \in \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right) \cup [2, +\infty)}$.