СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

25 март 2018 г.

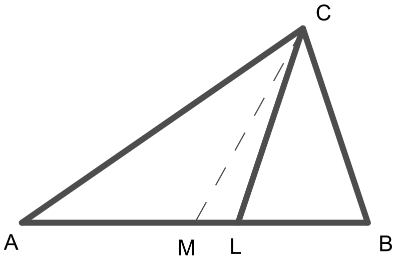
Тема №1.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Да се реши неравенството $\dfrac{4x+8}{x^2+5x+6} \geqq 1$.

Решение: Даденото дробно неравенство има смисъл при $x \in (-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,\infty)$. Последователно имаме $\dfrac{4x+8}{x^2+5x+6} - 1 \geqq 0$, $\dfrac{-x^2-x+2}{x^2+5x+6} \geqq 0$ или $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} \leqq 0$, което при $x \neq -2$ и $x \neq -3$ е еквивалентно на $(x-1)(x+3) \leqq 0$, т.е. решенията на задачата са $x \in \big(-3,-2\big) \cup \big(-2,1\big]$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC = 5$, $BC = 3$ и $CL = 3$, където CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$. Да се намерят периметърът P_{ABC} на триъгълника и дължината на медианата m_c през върха C.



Решение: От свойството на ъглополовящата получаваме $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$, т.е. $AL = 5x$ и $BL = 3x$. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$, тогава от косинусовата теорема за триъгълниците BLC и ALC имаме $\left|\begin{array}{l}(3x)^2 = 3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cos\frac{\gamma}{2}\\ (5x)^2 = 5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos\frac{\gamma}{2}\end{array}\right.$. Така след изключване на $\cos\frac{\gamma}{2}$ (умножаване на първото уравнение по –5, на второто по 3 и почленното им изваждане) достигаме до $x^2 = \dfrac{2}{5}$, т.е. $AB = AL + BL = 8\sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Сега за периметъра на $\triangle ABC$ имаме $P_{ABC} = AB+BC+AC = 8\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}+1\right)$, а за медианата получаваме

$$m_c = \sqrt{\frac{2AC^2+2BC^2-AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\cdot25+2\cdot9-64\frac{2}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{53}{5}}.$$

$\Big($За намиране на x може да се използва и формулата $CL^2 = AC\cdot BC - AL\cdot BL.\Big)$

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{2x-1} = \sqrt{10-x} - \sqrt{2x+2}$.

Решение: Записваме ирационалното уравнение във вида $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{10-x}$.
I. След повдигане на квадрат получаваме $2\sqrt{(2x-1)(2x+2)} = 9-5x$, откъдето след повторно повдигане на втора степен достигаме до $9x^2-98x+89 = 0$ или $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{89}{9}$. Проверката показва, че само $x = 1$ е решение на задачата.
II. Даденото уравнение има смисъл при $\left\{x \geqq \dfrac{1}{2}\right\} \cap \{x \leqq 10\} \cap \{x \geqq -1\}$, т.е. за $x \in \Omega \equiv \left[\dfrac{1}{2}, 10\right]$. Понеже двете страни на уравнението $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{10-x}$ са неотрицателни при $x \in \Omega$, то след повдигането им на втора степен достигаме до еквивалентното му уравнение $2\sqrt{(2x-1)(2x+2)} = 9-5x$. Двете страни на $2\sqrt{(2x-1)(2x+2)} = 9-5x$ са неотрицателни при $x \in \Omega_1 \equiv \Omega \cap \left\{x \leqq \dfrac{9}{5}\right\} \equiv \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{5}\right]$ и след повдигане на квадрат получаваме квадратното уравнение $9x^2-98x+89 = 0$ $\left(\text{с корени } x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{89}{9}\right)$, което е еквивалентно на даденото ирационално уравнение. Тъй като $x_1 \in \Omega_1$, а $x_2 \notin \Omega_1$, то само $x = 1$ е решение на задачата.

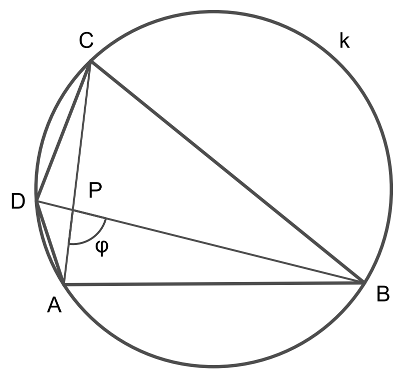
Задача 4. Даден е правоъгълен триъгълник, дължините на страните на който образуват аритметична прогресия и полупериметърът му p е равен на 12. Да се намерят лицето му S и радиусите R и r на описаната и вписаната в триъгълника окръжности.

Решение: Нека за определеност $\triangle ABC$ е с прав ъгъл при върха C и $a \leqq b < c$, където $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Понеже дължините на страните a, b и c в този ред образуват аритметична прогресия, то имаме $a = b - d$ и $c = b + d$, където $d > 0$ е разликата на прогресията. Сега от теоремата на Питагор получаваме $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$ или $b = 4d$, т.е. $a = 3d$, $b = 4d$ и $c = 5d$. От $24 = 2p = a + b + c = 12d$ имаме $d = 2$ или $a = 6$, $b = 8$ и $c = 10$. Така получаваме $S = \dfrac{a \cdot b}{2} = 24$, $R = \dfrac{c}{2} = 5$ и $r = p - c = \dfrac{a+b-c}{2} = 2$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\sin x\big(\sqrt{3} - 2\sin x\big) = \cos x\big(1 + 2\cos x\big)$.

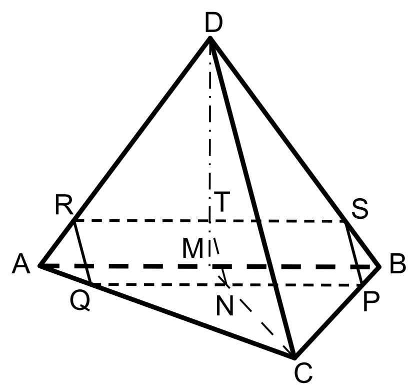
Решение: Разкриваме скобите и получаваме $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ или $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$, откъдето след като разделим на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ достигаме до $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = 1$, което е еквивалентно на $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ $\left(\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1\right)$. Сега последователно получаваме $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\left(x + \dfrac{\pi}{3} = (2k+1)\pi\right)$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\left(x = -\dfrac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right)$ или окончателно $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k, а с P и φ са означени съответно пресечната точка на диагоналите му AC и BD и ъгълът между тях. Да се намери лицето S на четириъгълника и $\sin\varphi$ при условие, че $AP = 2DP$, $CP = 2AP$ и $BP = AB = 8$.



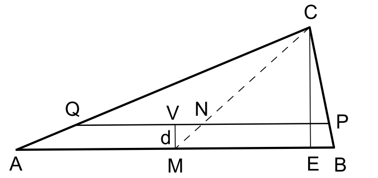
Решение: Означаваме $DP = y$, тогава $AP = 2DP = 2y$, $CP = 2AP = 4y$. От свойството на секущите в окръжност имаме $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ или $2y \cdot 4y = 8 \cdot y$, т.е. $y = 1$ и $AP = 2$, $BP = 8$, $CP = 4$, $DP = 1$, $AC = 6$, $BD = 9$. Триъгълниците DPA и BPA имат обща височина, следователно $\dfrac{S_{DPA}}{S_{BPA}} = \dfrac{DP}{BP} = \dfrac{1}{8}$, т.е. $S_{BPA} = 8S_{DPA} = 8S_1$. Аналогично $S_{CPD} = 2S_{APD} = 2S_1$ и $S_{BPC} = 8S_{DPC} = 16S_1$. Така за лицето на четириъгълника получаваме $S = S_{APD} + S_{BPA} + S_{CPB} + S_{CPD} = S_1 + 8S_1 + 16S_1 + 2S_1 = 27S_1$. Разглеждаме триъгълника APB той е равнобедрен със страни 8, 8, 2 и по формулата на Херон за лицето му получаваме $S_2 = 8S_1 = \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$, т.е. $S_1 = \dfrac{3}{8}\sqrt{7}$ и $S = 27S_1 = \dfrac{81\sqrt{7}}{8}$. Сега от формулата $S = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\varphi}{2}$ намираме $\sin\varphi = \dfrac{2S}{9 \cdot 6} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.
$\Big($От $\triangle APB$ чрез косинусовата теорема или формулите за лице може да се изрази $\sin\varphi$, след което лицето на четириъгълника се намира по формулата $S = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\varphi}{2}$.$\Big)$

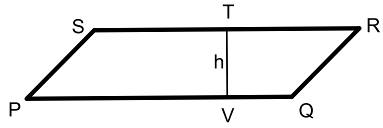
Задача 7. Триъгълната пирамида $ABCD$ е такава, че $AD = BD = CD$, $AB = 13$, $BC = 5$ и $CA = 12$. През точка P ($P \in BC$, $BP = 1$) е построена равнина λ, успоредна на ръбовете AB и CD. Да се намери лицето на сечението между пирамидата $ABCD$ и равнината λ, ако разстоянието от върха D до равнината ABC е $\dfrac{80}{13}$.

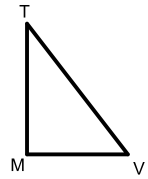


Решение: Понеже околните ръбове са равни, то върхът на пирамидата се проектира в центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, но числата 5, 12 и 13 образуват питагорова тройка ($\triangle ABC$ е правоъгълен), т.е. $DM \perp (ABC)$, където M е средата на AB.

Равнината λ е успоредна на ръбовете AB и CD, следователно $\lambda \cap (CBD) = PS \parallel CD \parallel QR = \lambda \cap (ACD)$ и $\lambda \cap (ABC) = PQ \parallel AB \parallel RS = \lambda \cap (ABD)$, т.е. сечението е успоредникът $PQRS$. Средата T на SR също се проектира в M и от теоремата за трите перпендикуляра имаме $MV \perp PQ$ и $TV \perp PQ$. От теоремата на Талес в равнината ABC получаваме $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{1}{5} = \dfrac{MV}{CE} = \dfrac{MN}{CM}$, т.е. $PQ = \dfrac{4}{5}AB$ и $d = MV = \dfrac{1}{5}CE = \dfrac{1}{5}\dfrac{BC \cdot AC}{AB} = \dfrac{12}{13}$. От $\triangle MNT \sim \triangle MCD$ имаме $\dfrac{TM}{DM} = \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{1}{5}$ или $MT = \dfrac{1}{5}DM = \dfrac{16}{13}$, а от $\triangle MVT$ получаваме $TV^2 = TM^2 + MV^2 = \left(\dfrac{20}{13}\right)^2$. Сега $S_{PQRS} = PQ \cdot TV = \dfrac{4}{5} \cdot 13 \cdot \dfrac{20}{13} = 16.$

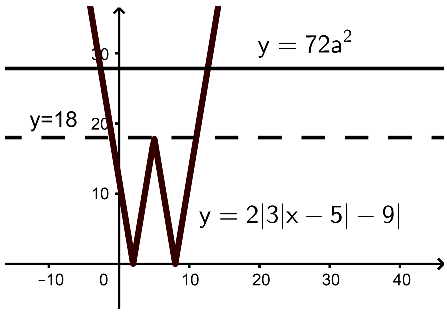






Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $\log_a 2\big|3|x-5|-9\big| = 2 + 3\log_a 2 + 2\log_a 3$ има точно два корена.

Решение: Даденото логаритмично уравнение има смисъл при $a > 0$, $a \neq 1$ и $2\big|3|x-5|-9\big| > 0$, т.е. при $a > 0, a \neq 1$, $x \neq 2, x \neq 8$. Имаме $\log_a 2\big|3|x-5|-9\big| = \log_a 72a^2$ или $2\big|3|x-5|-9\big| = 72a^2$. При $a > 0$ за решенията на последното уравнение ще имаме $x \neq 2, x \neq 8$. Така решения на задачата ще бъдат тези стойности на параметъра $a > 0, a \neq 1$, за които уравнението $2\big|3|x-5|-9\big| = 72a^2$ има две решения.



I. Последното е еквивалентно на $3|x-5| = 36a^2 + 9$ или $3|x-5| = 9 - 36a^2$. Първото уравнение има винаги две решения, а второто съвпада с първото при $a = 0$ и няма решение при $9 - 36a^2 < 0$.

II. Нека $f(x) = 2\big|3|x-5|-9\big|$ и $g_a(x) = 72a^2$, тогава броят на решенията на уравнението $f(x) = g_a(x)$ е равен на броя на пресечните точки на графиките на $y = f(x)$ и $y = g_a(x)$. Тези графики са изобразени на фигурата и от нея е ясно, че общите им точки ще бъдат точно две когато $72a^2 = 0$ или $72a^2 > 18 = f(5)$.

Следователно модулното уравнение има два корена при $a = 0$ или $a \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

Отчитайки $a > 0, a \neq 1$ достигаме до окончателния отговор $a \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$.