



СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФМИ
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА
МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“
26.02.2017 г.

Задачи и примерни решения – първи кръг

Задача 1. Да се реши неравенството $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \leq 0$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, т.е. при $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. От $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ за всяко $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ следва, че даденото неравенство е еквивалентно на $(x^2 - 6x + 5) \leq 0$. Последното има за решения $x \in [1; 5]$. Следователно търсените решения са $x \in \{1\} \cup [3; 5]$.

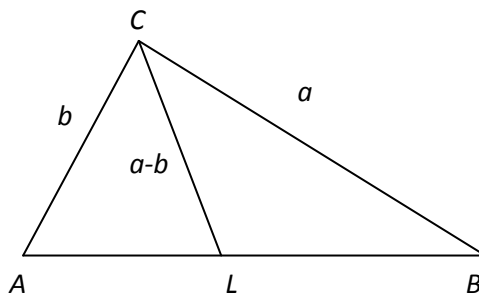
Задача 2. В правоъгълен триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) $BC = a$, $AC = b$ ($a > b$) и CL ($L \in AB$) е вътрешната ъглополовяща на $\angle BCA$. Да се намери отношението $a : b$, ако $CL = a - b$.

Решение. От равенствата $CL = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{90^\circ}{2} =$
 $= \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ и $CL = a - b$ следва, че $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b} = a - b$.

Оттук $a^2 - \sqrt{2}ab - b^2 = 0$ и значи

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \sqrt{2}\frac{a}{b} - 1 = 0$. Последното уравнение има

единствено положително решение $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.



Задача 3. Да се реши уравнението $\frac{5x}{x^2 + 3x + 6} + \frac{6x}{x^2 + 5x + 6} = 1$.

Решение. Уравнението има смисъл при $x \neq -3$ и $x \neq -2$. Тъй като $x = 0$ не е решение, даденото уравнение можем да запишем във вида $\frac{5}{x + \frac{6}{x} + 3} + \frac{6}{x + \frac{6}{x} + 5} = 1$. Полагаме

$y = x + \frac{6}{x}$ и получаваме $\frac{5}{y+3} + \frac{6}{y+5} = 1$. Последното уравнение има смисъл при $y \neq -3$ и $y \neq -5$. След преобразуване получаваме $y^2 - 3y - 28 = 0$, което има решения $y_1 = 7$ и $y_2 = -4$. Връщаме се към полагането и получаваме $x^2 - 7x + 6 = 0$ и $x^2 + 4x + 6 = 0$.

Първото има решения $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$, а второто няма реални корени. Следователно даденото уравнение има решения $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$.

Задача 4. Да се намери големината на острия ъгъл на ромб, ако отношението на периметъра на ромба и сумата от диагоналите му е равна на $2\sqrt{3} - 2$.

Решение. Нека ромбът е $ABCD$, острият ъгъл е $\angle BAD = \alpha$ и O е пресечна точка на диагоналите на ромба. От $\triangle ABO$ получаваме, че

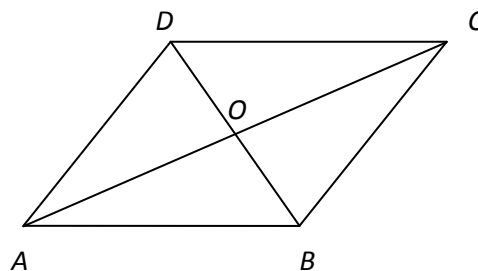
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{AB} = \frac{BD}{2AB} \text{ и } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AO}{AB} = \frac{AC}{2AB}.$$

$$\text{Следователно } \frac{4AB}{2AB \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Последното равенство е еквивалентно на

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

След повдигане на квадрат, получаваме $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като α е остър ъгъл, то решение на последното уравнение е $\alpha = 60^\circ$.



Задача 5. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $a2^{-2x^2} + 2^{-x^2} - 1 = 0$ има единствено решение.

Решение. Означаваме с $f(x) = a2^{-2x^2} + 2^{-x^2} - 1$, която е четна функция, т.е. ако уравнението $f(x) = 0$ има реален корен x_0 , то $-x_0$ е също негов корен. Следователно уравнението $f(x) = 0$ трябва да има единствено решение $x_0 = 0$. След заместване получаваме $a = 0$. Следователно даденото уравнение е еквивалентно на $2^{-x^2} = 1$, което има единствено решение $x = 0$. Следователно търсената стойност е $a = 0$.

Задача 6. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = ax^2 + x + 1$ в интервала $[-1; 1]$ е равна на 2.

Решение I. Отбелязваме, че $f(1) = a + 2 > a = f(-1)$. Означаваме най-малката стойност с m , а най-голямата стойност с M . Разглеждаме следните случаи:

- 1) Ако $a = 0$, тогава $f(x) = x + 1$ и следователно $M = f(1) = 2$, а $m = f(-1) = 0$ и $M - m = 2$. Следователно $a = 0$ е решение.
- 2) Ако $a > 0$, тогава най-малката стойност на $f(x)$ се достига при $x_0 = -\frac{1}{2a}$.

Разглеждаме следните случаи:

а) Ако $-\frac{1}{2a} \leq -1$, т.е. $0 < a \leq \frac{1}{2}$, тогава $M = f(1) = a + 2$, а $m = f(-1) = a$ и $M - m = 2$. Следователно всяко $0 < a \leq \frac{1}{2}$ е решение.

б) Ако $-1 < -\frac{1}{2a} < 0$, т.е. $a > \frac{1}{2}$, тогава $M = f(1) = a + 2$, а $m = f\left(-\frac{1}{2a}\right) = 1 - \frac{1}{4a}$ и $M - m = a + 1 + \frac{1}{4a} = 2$ е изпълнено за $a = \frac{1}{2}$ и следователно няма решение.

3) Ако $a < 0$, тогава най-голямата стойност на $f(x)$ се достига при $x_0 = -\frac{1}{2a}$.

Разглеждаме следните случаи:

а) Ако $0 < -\frac{1}{2a} \leq 1$, т.е. $a \leq -\frac{1}{2}$, тогава $M = f\left(-\frac{1}{2a}\right) = 1 - \frac{1}{4a}$, а $m = f(-1) = a$ и $M - m = 1 - \frac{1}{4a} - a = 2$ е изпълнено за $a = -\frac{1}{2}$ и следователно е решение.

б) Ако $1 < -\frac{1}{2a}$, т.е. $a > -\frac{1}{2}$, тогава $M = f(1) = a + 2$, а $m = f(-1) = a$ и $M - m = 2$ е изпълнено за всяко $a > -\frac{1}{2}$.

Следователно търсените стойности са всички $|a| \leq \frac{1}{2}$.

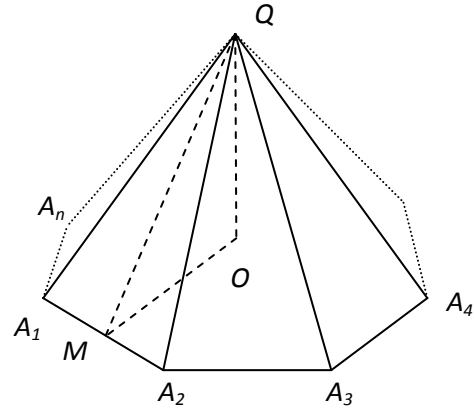
Решение II. Нека m и M са съответно най-малката и най-голямата стойност на f в интервала $[-1; 1]$. Тогава $m \leq f(-1) = a < a + 2 = f(1) \leq M$ и значи $M - m \geq f(1) - f(-1) = 2$. Следователно задачата се свежда до намирането на стойностите на a , за които $m = f(-1)$ и $M = f(1)$.

При $a = 0$ имаме $f(x) = x + 1$ и следователно е в сила $m = f(-1)$ и $M = f(1)$. Нека сега $a \neq 0$. Ако $-\frac{1}{2a} \in (-1; 1)$, то или $m = f\left(-\frac{1}{2a}\right) < f(-1)$, или $M = f\left(-\frac{1}{2a}\right) > f(1)$. От друга страна при $-\frac{1}{2a} \notin (-1; 1)$, т.е. при $\left|\frac{1}{2a}\right| \geq 1$, функцията f е монотонна в интервала $[-1; 1]$ и следователно в този случай $m = f(-1)$ и $M = f(1)$.

Така, окончателно, $M - m = 2$ тогава и само тогава, когато $|a| \leq \frac{1}{2}$.

Задача 7. Пълната повърхнина на правилна n -ъгълна пирамида е S_1 . Да се намери косинусът на ъгъла между околна стена и равнината на основата, ако обемът на пирамидата е най-голям.

Решение. Нека основата на пирамидата е правилният многоъгълник $A_1A_2\dots A_n$, а точките Q, O и M са съответно върхът, ортогоналната проекция на върха върху равнината на основата и средата на основния ръб A_1A_2 . Нека α, h, B и S са съответно ъгълът между околна стена и равнината на основата, височината на пирамидата, лицето на основата и лицето на околната повърхнина на пирамидата. Нека $\cos \alpha = x \in (0;1)$. От



правоъгълния триъгълник QOM получаваме $h = OM \cdot \operatorname{tg} \alpha = OM \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. От

правоъгълния триъгълник OMA_1 следва, че $OM = \frac{A_1A_2}{2} \cot g \frac{\pi}{n}$. От формулата за лице

на правилен n -ъгълник получаваме, че $A_1A_2 = 2\sqrt{\frac{B}{n}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ и следователно

$h = \sqrt{\frac{B}{n}} \cot g \frac{\pi}{n} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. От равенството $S_1 = B + S = B + \frac{1}{x}B$ следва, че $B = \frac{x}{x+1} S_1$.

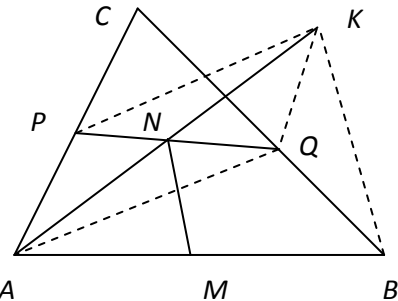
Следователно $h = \sqrt{\frac{xS_1}{n(x+1)}} \cot g \frac{\pi}{n} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{S_1}{3} \sqrt{\frac{S_1}{n}} \cot g \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{x-x^2}{(x+1)^2}}$.

Разглеждаме функцията $f(x) = \frac{x-x^2}{(x+1)^2}$, за $x \in (0;1)$. Пресмятаме $f'(x) = \frac{1-3x}{(x+1)^3}$ и

получаваме, че $f(x)$ расте при $x \in (0; \frac{1}{3})$ и намалява при $x \in (\frac{1}{3}; 1)$. Следователно

$f(x) \leq f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{8}$. Следователно търсената стойност е $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Задача 8. В триъгълник ABC $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, а точката M е средата на страната AB . Върху страните AC и BC са взети съответно точки $P \neq A$ и Q , такива че $AP = BQ$. Да се намери големината на $\sphericalangle NMB$, където точката N е средата на отсечката PQ .



Решение I. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$ и точката K е такава, че $AN = NK$. Следователно $AQKP$ е успоредник и $\sphericalangle KQC = \gamma$. От $KQ = AP = BQ$ следва, че

$\sphericalangle QBK = \frac{\gamma}{2}$. От това, че MN е средна отсечка в $\triangle ABK$ следва, че $MN \parallel BK$. Тогава

$\sphericalangle NMB = 180^\circ - \sphericalangle MBK = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Следователно $\sphericalangle NMB = \frac{\alpha - \beta}{2} + 90^\circ$.

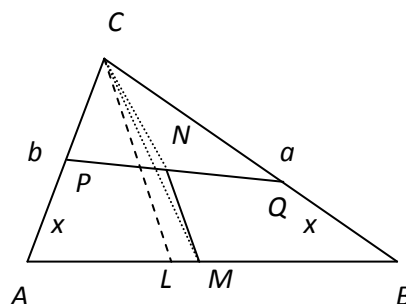
Решение II. Нека $BC = a$, $AC = b$, $AP = BQ = x$ и

$\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава $\overrightarrow{CP} = \frac{b-x}{b} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{a-x}{a} \cdot \overrightarrow{CB}$,

откъдето $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \left(\frac{b-x}{b} \overrightarrow{CA} + \frac{a-x}{a} \overrightarrow{CB} \right)$. Оттук и

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ получаваме

$\overrightarrow{MN} = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{CB} \right)$. Нека CL ($L \in AB$) е



ъгълполовящата на $\sphericalangle ACB$. От $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CL}$ и $\frac{AL}{LB} = \frac{b}{a}$ имаме

$\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{AC} = \frac{b}{a} (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CL})$, откъдето $\overrightarrow{CL} = \frac{ab}{b+a} \left(\frac{1}{b} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{a} \overrightarrow{CB} \right)$. Оттук $\overrightarrow{MN} = \frac{x(a+b)}{2ab} \cdot \overrightarrow{CL}$ и

значи $MN \parallel CL$. Следователно $\sphericalangle NMB = \sphericalangle CLB = 180^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$.