СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“
8 март 2015 г.

Условия и решения на задачите от втория кръг

Задача 1. Сутринта преди да отиде на училище, ученикът Иван Калитков написал бележка на баща си с молба да му остави пари, за да си купи чифт нови маратонки, като написал точната им цена . Като се върнал от училище, Калитков с удоволствие установил, че разсеяният му баща е разменил количествата на левовете и на стотинките от бележката. Иван бързо пресметнал, че оставените от баща му пари стигат да си купи два чифта маратонки, и ще му останат 1 лев и 50 стотинки. Колко струва чифт маратонки ?

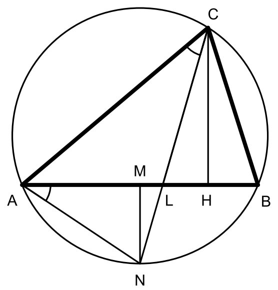
Решение: Да означим количествата на левовете и на стотинките в цената на чифт маратонки съответно с x и y, тогава лесно се съобразява, че $y \le 99$ и $x \le 49$. От условието получаваме последователно

$$2(100\,x + y) + 150 = 100y + x \quad \Rightarrow \quad 199\,x + 150 = 98\,y \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 1 + \frac{3x+52}{98},$$

следователно $3x + 52$ се дели на 98. Понеже $52 \le 3x + 52 \le 199$, единствените възможности са $3x + 52 = 98$ или $3x + 52 = 196$. Само второто уравнение има целочислено решение, $x = 48$, откъдето намираме $y = 99$. И така, чифт маратонки струва 48 лева и 99 стотинки.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC > BC$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{2}{3}$. Симетралата s на страната AB и ълополовящата l на $\sphericalangle ACB$ се пресичат в точка N и $S_{ABN} : S_{ABC} = 1 : 2$. Точките L и H са съответно пети на ъглополовящата и височината през върха C и $CL = 2\sqrt{13}$. Да се намери дължината на отсечката HB.

Решение: Да построим описаната около ΔABC окръжност и да разгледаме средата на дъгата $\widehat{AB}$, тази точка е от ъглополовящата l на $\sphericalangle ACB$ и от симетралата s на страната AB (на равни дъги в една окръжност съответстват равни хорди), т.е. съвпада с точката N и $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NCB = \dfrac{\widehat{NB}}{2} = \dfrac{\gamma}{2}$. Нека означим $AB = c$, $NM = h_1$ и $ML = x$, където M е средата на AB. Така $NM \perp AB$, а от условието $\dfrac{1}{2} = \dfrac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{AB\cdot NM}{2}}{\frac{AB\cdot CH}{2}}$ получаваме $CH = h = 2h_1$. От правоъгълния ΔAMN имаме $\dfrac{2}{3} = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{NM}{AM} = \dfrac{h_1}{\frac{c}{2}}$ или $h_1 = \dfrac{c}{3}$. Имаме още $\Delta NML \sim \Delta CHL$, откъдето $\dfrac{1}{2} = \dfrac{NM}{CH} = \dfrac{NL}{CL} = \dfrac{ML}{LH}$, т.е. $NL = \sqrt{13}$ и $LH = 2x$.



От правоъгълния ΔNML имаме $h_1^2 + x^2 = NL^2 = 13$ или $x^2 = 13 - \dfrac{c^2}{9}$, а от свойството на окръжността последователно получаваме $AL \cdot LB = NL \cdot CL = \sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13} = 26$, $\left(\dfrac{c}{2} + x\right)\left(\dfrac{c}{2} - x\right) = \dfrac{c^2}{4} - x^2 = \dfrac{c^2}{4} - \left(13 - \dfrac{c^2}{9}\right) = 26$, $c^2 \cdot \dfrac{13}{36} = 39$. От тук намираме $c = 6\sqrt{3}$, $h_1 = \dfrac{c}{3} = 2\sqrt{3}$, $x = \sqrt{13 - h_1^2} = 1$. Накрая пресмятаме $HB = MB - MH = \dfrac{c}{2} - 3x = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3} - 1)$.

Задача 3. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2\,x^2 - 4x + 2 = y \\ 2\,y^2 - 4y + 2 = z \\ 2\,z^2 - 4z + 2 = x\,. \end{array}\right.$$

Решение: Ясно е, че $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Ако допуснем, че $x > 2$, тогава от първото уравнение на системата ще получим

$$y = 2x^2 - 4x + 2 > x > 2,$$

и прилагайки същите разсъждения към второто и третото уравнение на системата, получаваме последователно $z > y > x > 2$ и $x > z > y > x$, което е противоречие. Следователно $x \le 2$ и аналогично

$y \le 2$ и $z \le 2$. Тогава $-1 \le x - 1 \le 1$ и можем да положим $x - 1 := \cos t$ за $t \in [0\,,\,\pi]$. От тук, $y - 1 = 2\,(x-1)^2 - 1 = 2\,\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $z - 1 = \cos 4t$ и $x - 1 = \cos 8t$. Получихме уравнението $\cos 8t = \cos t$, което е еквивалентно с $\sin\dfrac{7t}{2}\,\sin\dfrac{9t}{2} = 0$. Решенията на последното уравнение в $[0\,,\,\pi]$ са:

$$t_1 = 0,\quad t_2 = \frac{2\pi}{7},\quad t_3 = \frac{4\pi}{7},\quad t_4 = \frac{6\pi}{7},\quad t_5 = \frac{2\pi}{9},\quad t_6 = \frac{4\pi}{9},\ t_7 = \frac{2\pi}{3},\quad t_8 = \frac{8\pi}{9}\,.$$

Съответно, решенията на дадената система са:

- $(x,\,y,\,z) = (2,\,2,\,2)$, получено при $t = t_1$;
- $(x,\,y,\,z) = \left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$, получено при $t = t_7$;
- $(x,\,y,\,z) = \left(1+\cos\dfrac{2\pi}{7},\,1+\cos\dfrac{4\pi}{7},\,1+\cos\dfrac{8\pi}{7}\right)$, и още две решения, получени от това решение с циклична замяна. Тези решения отговарят на $t = t_2,\,t_3$ и t_4;
- $(x,\,y,\,z) = \left(1+\cos\dfrac{2\pi}{9},\,1+\cos\dfrac{4\pi}{9},\,1+\cos\dfrac{8\pi}{9}\right)$, и още две решения, получени от това решение с циклична замяна. Тези решения отговарят на $t = t_5,\,t_6$ и t_8.

Задача 4. Нека $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ е полином с реални коефициенти, такъв че $\left|P\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| \le 1$ и $\left|P(\pm 1)\right| \le 1$. Да се намери $P(x)$, ако $P'(1) = 9$.

Решение: Ще докажем, че за всеки полином P от степен ненадминаваща 3 е изпълнено равенството

$$P'(1) = -\frac{1}{2}\,P(-1) + \frac{4}{3}\,P\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 4\,P\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{19}{6}\,P(1)\,. \tag{1}$$

За целта умножаваме двете страни на равенствата

$$\begin{aligned} P(-1) &= -a + b - c + d \\ P\Big(-\frac{1}{2}\Big) &= -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d \\ P\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d \\ P(1) &= a + b + c + d \end{aligned} \tag{2}$$

съответно с (неизвестните засега) числа $c_1,\ c_2,\ c_3$ и c_4, и ги събираме, като искаме да получим резултат $P'(1) = 3\,a + 2\,b + c$. Приравнявайки коефициентите пред $a,\ b,\ c$ и d, получаваме система от уравнения за $c_1,\ c_2,\ c_3$ и c_4:

$$\left|\begin{array}{rcl} -c_1 - \frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{8}c_3 + c_4 &=& 3 \\ c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + c_4 &=& 2 \\ -c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 + c_4 &=& 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &=& 0\,. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е $c_1 = -\dfrac{1}{2}$, $c_2 = \dfrac{4}{3}$, $c_3 = -4$ и $c_4 = \dfrac{19}{6}$, т.е. вярна е формулата (1). От тази формула, неравенството $y \le |y|$ и условието за P получаваме

$$\begin{aligned} 9 = P'(1) &= -\frac{1}{2}\,P(-1) + \frac{4}{3}\,P\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 4\,P\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{19}{6}\,P(1) \\ &\le \frac{1}{2}\,|P(-1)| + \frac{4}{3}\left|P\Big(-\frac{1}{2}\Big)\right| + 4\left|P\Big(\frac{1}{2}\Big)\right| + \frac{19}{6}\,|P(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 4 + \frac{19}{6} = 9\,. \end{aligned}$$

За да се изключи абсурдното неравенство $9 < 9$, трябва навсякъде в горните неравенства да е изпълнено равенство. Това означава, че всички събираеми в първия ред са положителни и $\left|P\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| = \left|P(\pm1)\right| = 1$. От тук заключаваме, че $P(1) = 1$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, и $P(-1) = -1$. Заместваме с тези стойности в системата уравнения (2) и намираме решението ѝ: $a = 4$, $b = d = 0$, и $c = -3$. Окончателно, търсеният полином е $P(x) = 4\,x^3 - 3\,x$.

Забележка. Формулата (1) може да се изведе чрез диференциране на интерполационния полином на Лагранж с възли ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$ и полагане $x = 1$.

Задача 5. С $B(N)$ е означен броят на всички различни редици от цели числа

$$1 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_N \le N$$

(редиците $\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$ и $\{k'_1, k'_2, \ldots, k'_N\}$ са различни, ако $k_i \ne k'_i$ за поне едно i, $1 \le i \le N$).

а) С колко нули завършва десетичният запис на $B(2015)$?

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа N, за които последната цифра в десетичния запис на $B(N)$ е 5.

Решение: Ще покажем, че $B(N) = \binom{2N-1}{N}$. За целта разглеждаме изображението F, което на редица от вида в условието съпоставя редица

$$0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_N < 2N$$

по формулата $m_i = k_i + i - 1$. F е взаимно еднозначно, което означава, че $B(N)$ съвпада с броя на изборите на N числа от $2N-1$ възможности.

Ще използваме следния факт: Ако p е просто число, то степента му в разлагането на $n!$ е равна на $\sum\limits_{s\ge 1}\left[\frac{n}{p^s}\right]$.

а) Пресмятаме степените на 2 в $4029!$, $2015!$ и $2014!$.

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{4029}{2^s}\right] = 2014 + 1007 + 503 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1\,,$$

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{2015}{2^s}\right] = 1007 + 503 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1\,,$$

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{2014}{2^s}\right] = 1007 + 503 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1\,.$$

От тук,

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{4029}{2^s}\right] - \sum_{s\ge 1}\left[\frac{2015}{2^s}\right] - \sum_{s\ge 1}\left[\frac{2014}{2^s}\right] = 9\,,$$

което означава, че $B(2015)$ се дели на 2^9.

Пресмятаме степените на 5 в $4029!$, $2015!$ и $2014!$.

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{4029}{5^s}\right] = 805 + 161 + 32 + 6 + 1\,,$$

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{2015}{5^s}\right] = 403 + 80 + 16 + 3\,,$$

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{2014}{5^s}\right] = 402 + 80 + 16 + 3\,,$$

откъдето

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{4029}{5^s}\right] - \sum_{s\ge 1}\left[\frac{2015}{5^s}\right] - \sum_{s\ge 1}\left[\frac{2014}{5^s}\right] = 2\,,$$

и $B(2015)$ се дели на 5^2 (но не се дели на 5^3). Следователно, десетичният запис на $B(2015)$ завършва с две нули.

б) $B(2^n)$ е нечетно число за всяко естествено число n. Наистина,

$$\sum_{s\ge 1}\left[\frac{2^{n+1}-1}{2^s}\right] = \sum_{s=1}^{n}\left(2^{n+1-s}-1\right) = 2^{n+1} - 2 - n\,,$$

$$\sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^n}{2^{\,s}}\right]=\sum_{s=1}^{n}2^{n-s}\;=\;2^n-1\,,$$

$$\sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^n-1}{2^{\,s}}\right]=\sum_{s=1}^{n-1}\left(2^{n-s}-1\right)\;=\;2^n-1-n\,,$$

откъдето

$$\sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^{n+1}-1}{2^{\,s}}\right]-\sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^n}{2^{\,s}}\right]-\sum_{s\geq 1}\left[\frac{2^n-1}{2^{\,s}}\right]\;=\;0\,,$$

с което твърдението е доказано.

$B(2^{4n+3})$ се дели на 5 за всяко естествено число n. Наистина, $2^{4n+3}\;=5K+3$ за някое естествено число K. Тогава

$$\left[\frac{2^{4n+4}-1}{5}\right]\;=\;2K+1>K+K=\left[\frac{2^{4n+3}}{5}\right]+\left[\frac{2^{4n+3}-1}{5}\right]\;.$$

Предвид неравенството $[x+y]\geq[x]+[y]$ доказателството на б) е завършено.