



Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

турнир „Проф. Борислав Боянов“

Първи кръг, 09 февруари 2014

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{29}{10} .$$

Задача 2. Върху страните на триъгълник ABC са избрани точки $M \in AB$, $N \in BC$ и $P \in AC$ такива, че $AM : BM = 2 : 3$, $BN : CN = 1 : 4$, $AP : CP = 1 : 5$.
Да се намери лицето на $\triangle MNP$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 75.

Задача 3. Да се намери сумата на целите числа, които са решения на уравнението:

$$\sqrt{x - 18\sqrt{x - 7} + 74} + \sqrt{x + 10\sqrt{x - 7} + 18} = 14 .$$

Задача 4. Дължината на страната на квадрат $ABCD$ е 1. Построени са две окръжности: k_1 , с център A и радиус 1, и k_2 , с център B и радиус 1. Окръжност k_3 се допира до k_1 , k_2 и страната CD във вътрешна за нея точка, а окръжност k_4 се допира до k_1 , k_2 и страната AD във вътрешна за нея точка. Да се намерят радиусите на k_3 и k_4 .

Задача 5. Цифрите на деветцифрено число са различни. Каква е вероятността числото да се дели на 9?

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$|3x + 2|^{\log_{\sqrt{2}} |3x + 2|} < 4 .$$

Задача 7. Дължините на ръбовете на триъгълна пирамида $ABCD$ са:
 $AC = AD = BD = 8$, $AB = CD = 10$, $BC = 6$.
Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

Задача 8. Определяме „дължина“ на множество, за някои ограничени множества от реални числа, по следния начин:

- дължината на празното множество е 0;
- дължината на интервал $((a, b), [a, b), (a, b]$ или $[a, b])$ е $b - a$;
- дължината на обединение на краен брой непресичащи се интервали е сумата на дължините на отделните интервали.

Да се намери максимално възможната дължина на множеството от решенията на неравенството:

$$|x^2 + 2px + q| < 1 .$$

Време за работа 4 часа.