

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФАКУЛТЕТА
Първи кръг, 13 април 2008 г.

Зад. 1. Да се реши неравенството

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} > \sqrt{2}(x - 2).$$

Зад. 2. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) ъглополовящата на $\angle A$, височината през върха C и симетралата на страната AC се пресичат в една точка. Да се намерят дължините на страните на триъгълника, ако радиусът на вписаната в него окръжност е $r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Зад. 3. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + (a^2 - a + 2)y = 2a \end{cases}$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър a .

Зад. 4. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 5$, $BC = 8$, $CD = 3$, $DA = 5$. Да се намери дължината на радиуса на окръжността.

Зад. 5. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} 2^x - 2^{x-y+1} - 2^y + 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + xy} = y - x \end{cases}.$$

Зад. 6. Да се намерят стойностите на реалните параметри b и c , за които допирателните към графиката на функцията $f(x) = x^2 + bx + c$ в точките с абсциси 0 и 1 са взаимно перпендикулярни и графиката на $f(x)$ отсича от абсцисната ос отсечка с дължина, равна на 1.

Зад. 7. Нека H е ортоцентърът на остроъгълния $\triangle ABC$, k е описаната около $\triangle ABH$ окръжност и l е дължината на допирателната от върха C към k . Да се докаже, че $l^2 = a^2 + b^2 - c^2$, където $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Зад. 8. Да се докаже, че квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ приема цели стойности за всяка цяла стойност на x тогава и само тогава, когато числата $a + b$, $a - b$ и c са цели.

Зад. 9. Да се пресметне обемът на триъгълна пирамида $ABCD$ с ръбове $AB = AC = BC = 6$, $AD = \sqrt{15}$, $BD = \sqrt{33}$, $CD = 3\sqrt{3}$.

Зад. 10. Даден е правилен n -ъгълник ($n \geq 3$) със страна 1. Да се докаже, че ако $d_1, d_2, \dots, d_n$ са разстоянията от произволна вътрешна точка до страните на n -ъгълника, то $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} > 2\pi$.

Всяка задача се оценява с 4 точки.

Време за работа 5 часа.

Журието Ви желае успешна работа!