

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФАКУЛТЕТА
Първи кръг, 13 април 2008 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Зад. 1. Да се реши неравенството

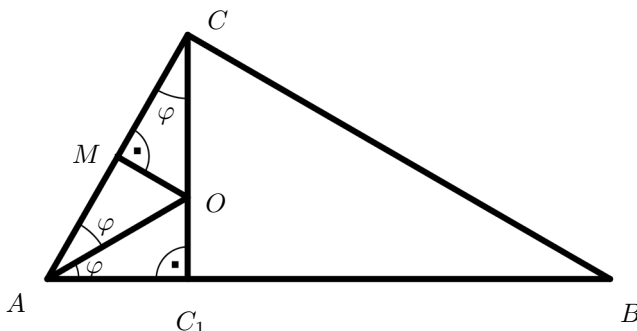
$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} > \sqrt{2}(x - 2).$$

Решение. Неравенството има смисъл за всяка реална стойност на x и освен това при $x \in (-\infty, 2)$ то е изпълнено, защото лявата му страна е положителна, а дясната е отрицателна. При $x \geq 2$ неравенството е еквивалентно с

$$x^2 - 4x + 5 > 2(x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0,$$

откъдето намираме $x \in (1, 3)$ и предвид $x \geq 2$ получаваме $x \in [2, 3)$. Окончателно, всички решения на даденото неравенство са $x \in (-\infty, 2) \cup [2, 3)$, т.е. $x \in (-\infty, 3)$.

Зад. 2. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) ъглополовящата на $\angle A$, височината през върха C и симетралата на страната AC се пресичат в една точка. Да се намерят дължините на страните на триъгълника, ако радиусът на вписаната в него окръжност е $r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.



Решение. Нека CC_1 е височината през върха C , M е средата на AC и O е пресечната точка на ъглополовящата на $\angle A$, височината CC_1 и симетралата на AC . Да означим $\angle CAO = \angle BAO = \varphi$. От $\triangle AMO \cong \triangle CMO$ (OM е симетралата на AC) следва $\angle MCO = \angle MAO = \varphi$. Сега от правоъгълния $\triangle AC_1C$ получаваме $3\varphi = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$. Тогава $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ и ако $AC = x$, то $AB = 2x$, $BC = x\sqrt{3}$. От равенството $AC + BC - AB = 2r$ получаваме $x + x\sqrt{3} - 2x = \sqrt{3} - 1$, откъдето намираме $x = 1$. Страните на триъгълника ABC

са $AC = 1$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$.

Зад. 3. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + (a^2 - a + 2)y = 2a \end{cases}$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър a .

Решение. Като умножим първото уравнение с -2 и го прибавим към второто, системата придобива вида

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ a(a - 1)y = 2(a - 1) \end{cases}.$$

При $a = 0$ второто уравнение (а значи и системата) няма решение. При $a = 1$ второто уравнение се удовлетворява за всяко y , а от първото намираме $x = 1 - y$. При $a \neq 0, 1$ от второто уравнение намираме $y = \frac{2}{a}$, а от първото $x = \frac{a - 2}{a}$.

Окончателно: при $a = 0$ системата няма решение; при $a = 1$ системата има безбройно много решения, които са от вида $(1 - y, y)$, $y \in \mathbb{R}$; при $a \neq 0, 1$ системата има единствено решение $\left(\frac{a-2}{a}, \frac{2}{a}\right)$.

Зад. 4. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 5$, $BC = 8$, $CD = 3$, $DA = 5$. Да се намери дължината на радиуса на окръжността.

Решение. Нека $\angle ABC = \beta$; тогава $\angle ADC = 180^\circ - \beta$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имаме съответно $AC^2 = 89 - 80 \cos \beta$ и $AC^2 = 34 + 30 \cos \beta$. От тези равенства намираме $\cos \beta = \frac{1}{2}$, т.е. $\beta = 60^\circ$, и $AC = 7$. Накрая от синусовата теорема за $\triangle ABC$ за радиуса на окръжността получаваме $R = \frac{AC}{2 \sin \beta} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Зад. 5. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} 2^x - 2^{x-y+1} - 2^y + 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + xy} = y - x \end{cases}.$$

Решение. Системата има смисъл при $y^2 + xy \geq 0$. Освен това тя няма решение при $y - x < 0$. След повдигане на квадрат и преобразуване, второто уравнение приема вида $x(x - 3y) = 0$. При $x = 0$ първото уравнение става $(2^y - 1)(2^y - 2) = 0$, откъдето намираме $y = 0$ и $y = 1$ и получаваме решенията $(0, 0)$ и $(0, 1)$. При $x = 3y$ първото уравнение става

$$(2^y - 1)(2^y + 1)(2^y - 2) = 0.$$

От $2^y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$, което решение вече имаме.

Уравнението $2^y + 1 = 0$ няма реални корени.

От $2^y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3$, но в този случай $y - x < 0$.

Окончателно, решенията на системата са $(0, 0)$ и $(0, 1)$.

Зад. 6. Да се намерят стойностите на реалните параметри b и c , за които допирателните към графиката на функцията $f(x) = x^2 + bx + c$ в точките с абсциси 0 и 1 са взаимно перпендикулярни и графиката на $f(x)$ отсича от абсцисната ос отсечка с дължина, равна на 1.

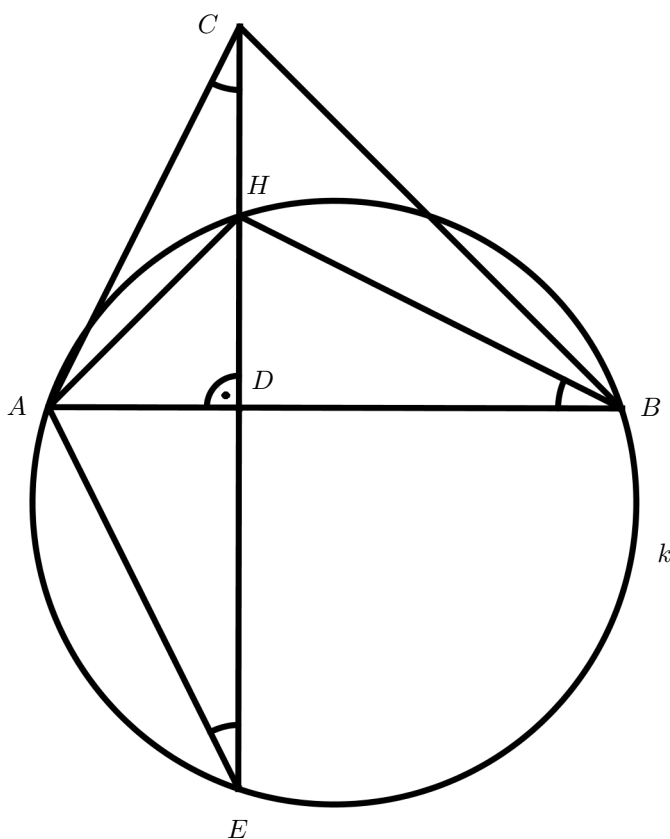
Решение. Нека двете допирателни сключват с положителната посока на абсцисната ос ъгли α и β . Тъй като допирателните са взаимно перпендикулярни, то $\alpha = \beta \pm 90^\circ$. Оттук $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{cotg} \beta$ или $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -1$. Това е равносилно с $f'(0)f'(1) = -1$. Понеже $f'(0) = b$ и $f'(1) = 2 + b$, от $b(2 + b) = -1$ получаваме $b = -1$.

При $b^2 - 4c \geq 0$ корените x_1, x_2 на $f(x)$ са реални и графиката на $f(x)$ отсича от абсцисната ос отсечка с дължина

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{b^2 - 4c}.$$

Сега от $\sqrt{b^2 - 4c} = 1$, т.е. $1 - 4c = 1$, получаваме $c = 0$.

Окончателно, $b = -1$ и $c = 0$, т.е. $f(x) = x^2 - x$.



Зад. 7. Нека H е ортоцентърът на остроъгълния $\triangle ABC$, k е описаната около $\triangle ABH$ окръжност и l е дължината на допирателната от върха C към k . Да се докаже, че $l^2 = a^2 + b^2 - c^2$, където $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Решение. Ще използваме общоприетите означения за триъгълник. (Ще отбележим, че тъй като $\angle ACB < 90^\circ$, то точката C лежи извън окръжността k). Нека правата CH пресича AB в точка D и k във втора точка E . От свойството на допирателна и секуща от C към k имаме $l^2 = CH \cdot CE$. Тъй ка-

то $\angle AEH = \frac{\widehat{AH}}{2} = \angle ABH = 90^\circ - \alpha = \angle ACD$, то $DE = CD$. Оттук $CE = 2CD = 2h_c$. От друга страна (както е известно) $CH = 2R \cos \gamma$. Сега получаваме (използвайки $h_c = b \sin \alpha$, $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ и косинусовата теорема)

$$l^2 = CH \cdot CE = 2R \cos \gamma \cdot 2h_c = 4Rh_c \cos \gamma = 4 \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha} \cdot b \sin \alpha \cdot \cos \gamma = 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Зад. 8. Да се докаже, че квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ приема цели стойности за всяка цяла стойност на x тогава и само тогава, когато числата $a + b$, $a - b$ и c са цели.

Решение. Нека първо $f(x)$ приема цели стойности за всяка цяла стойност на x . Тогава числата $f(0) = c$, $f(1) - f(0) = a + b$ и $f(-1) - f(0) = a - b$ са цели.

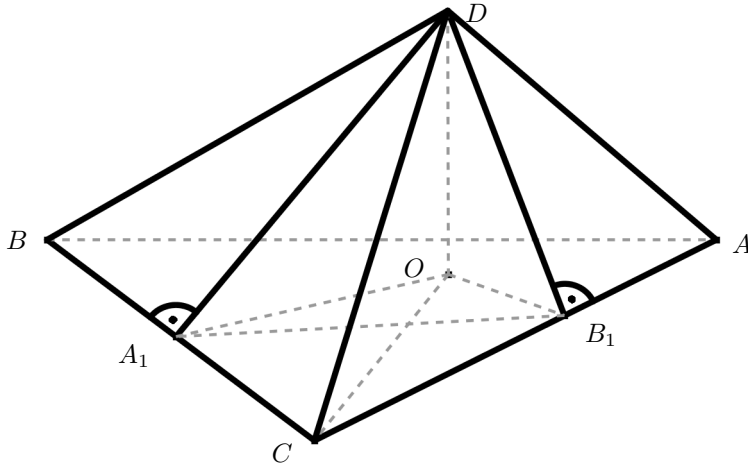
Обратно, нека числата $a + b$, $a - b$ и c са цели. Директно се проверява, че

$$f(x) = (a + b) \frac{x(x+1)}{2} + (a - b) \frac{x(x-1)}{2} + c.$$

Сега, ако x е цяло число, числата $\frac{x(x+1)}{2}$ и $\frac{x(x-1)}{2}$ също са цели и тогава очевидно $f(x)$ е цяло число.

Зад. 9. Да се пресметне обемът на триъгълна пирамида $ABCD$ с ръбове $AB = AC = BC = 6$, $AD = \sqrt{15}$, $BD = \sqrt{33}$, $CD = 3\sqrt{3}$.

Решение. Нека O е ортогоналната проекция на върха D върху равнината ABC и $OA_1 \perp BC$, $OB_1 \perp AC$. От теоремата за трите перпендикуляра следва $DA_1 \perp BC$, $DB_1 \perp AC$. Ще отбележим, че (както следва от дължините на ръбовете на пирамидата) $\angle CBD$, $\angle BCD$ и $\angle CAD$, $\angle ACD$ са остри ъгли, така че точките A_1 и B_1 са вътрешни за отсечките BC и AC . От $\triangle CA_1D$ и $\triangle BA_1D$ имаме $(3\sqrt{3})^2 - A_1C^2 = (\sqrt{33})^2 - (6 - A_1C)^2$ и оттук намираме $A_1C = \frac{5}{2}$. Аналогично, от $\triangle CB_1D$ и $\triangle AB_1D$ имаме $(3\sqrt{3})^2 - B_1C^2 = (\sqrt{15})^2 - (6 - B_1C)^2$ и оттук намираме $B_1C = 4$. От $\triangle A_1B_1C$



по косинусовата теорема получаваме $A_1B_1^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{4}$ и $A_1B_1 = \frac{7}{2}$. Ще отбележим, че (както следва от дължините на страните на $\triangle A_1B_1C$) $\angle CA_1B_1$ и $\angle CB_1A_1$ са остри ъгли и следователно точките C и O са от различни страни на правата A_1B_1 . Тъй като $\angle CA_1O = \angle CB_1O = 90^\circ$, около четириъгълника CA_1OB_1 се описва окръжност и отсечката OC е диаметър на тази окръжност. Тогава от $\triangle A_1B_1C$ по синусовата теорема имаме $OC = \frac{A_1B_1}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Сега от $\triangle COD$ пресмятаме $DO = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot DO = 12\sqrt{2}$.

Зад. 10. Даден е правилен n -ъгълник ($n \geq 3$) със страна 1. Да се докаже, че ако $d_1, d_2, \dots, d_n$ са разстоянията от произволна вътрешна точка до страните на n -ъгълника, то $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} > 2\pi$.

Решение. Нека $A_1A_2 \dots A_n$ е правилен n -ъгълник, O е центърът му и M е произволна вътрешна точка. За лицето му S имаме

$$S = S_{A_1MA_2} + S_{A_2MA_3} + \dots + S_{A_nMA_1} = \frac{1 \cdot d_1}{2} + \frac{1 \cdot d_2}{2} + \dots + \frac{1 \cdot d_n}{2},$$

откъдето $\sum_{i=1}^n d_i = 2S$. От неравенството между средно хармоничното и средно аритметичното на числата $d_1, d_2, \dots, d_n$ получаваме

$$\frac{n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n}} \leq \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \geq \frac{n^2}{2S}.$$

От друга страна $S = nS_{A_1OA_2} = n \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cotg \frac{\pi}{n}}{2}$, така че

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \geq \frac{n^2}{\frac{1}{2} n \cotg \frac{\pi}{n}} = 2n \tg \frac{\pi}{n}.$$

За всяко $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ е изпълнено неравенството $\tg x > x$. Това ни дава (предвид $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$) $\tg \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$. Оттук $2n \tg \frac{\pi}{n} > 2\pi$, т. е. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} > 2\pi$.