

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФМИ
Втори кръг, 11 май 2008 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Зад. 1. Редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворява условията $a_0 \in (0, 1)$ и $a_n = 2a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1$ за всяко естествено число n . Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери границата ѝ.

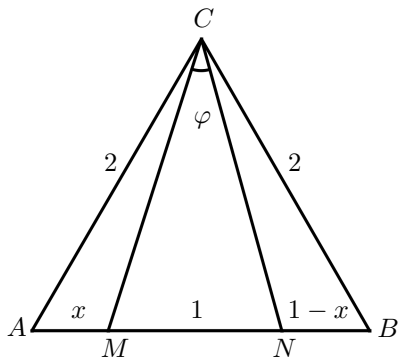
Решение. Нека $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$. По стандартен начин се установява, че ако $x \in (0, 1)$, то $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1)$. Тъй като $a_0 \in (0, 1)$ и $a_n = f(a_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$), то $a_n \in [\frac{1}{2}, 1)$ и значи дадената редица е ограничена. Освен това (при $n > 1$)

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1 - a_{n-1} = 2a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 1 = 2(a_{n-1} - 1)(a_{n-1} - \frac{1}{2}) \leq 0.$$

Така редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и монотонно намаляваща и значи е сходяща. Границата ѝ l се определя от равенството $l = 2l^2 - 2l + 1$. От тук $l = \frac{1}{2}$ или $l = 1$. Тъй като редицата е монотонно намаляваща и $a_1 < 1$, то $l = \frac{1}{2}$.

(Какво може да се каже за редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, зададена с: $a_0 \in (0, 1)$, $a_n = 3a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 1$?)

Зад. 2. Точките M и N лежат върху страната AB на равностранныя триъгълник ABC и $MN = \frac{AB}{2}$. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на $\sphericalangle MCN$.



Решение. Можем да считаме $AB = 2$, $MN = 1$ и нека $AM = x$, $BN = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, $\sphericalangle MCN = \varphi$. Имаме

$$\cos \varphi = \frac{CM^2 + CN^2 - 1}{2CM \cdot CN}, \quad \sin \varphi = \frac{2S_{MNC}}{CM \cdot CN} = \frac{\sqrt{3}}{CM \cdot CN}$$

и оттук $\cotg \varphi = \frac{CM^2 + CN^2 - 1}{2\sqrt{3}}$. От $\triangle AMC$ и $\triangle BNC$ по косинусовата теорема изразяваме $CM^2 = x^2 - 2x + 4$ и $CN^2 = x^2 + 3$. Така получаваме $\cotg \varphi = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{3}}$.

В интервала $[0, 1]$ най-голямата стойност на квадратната функция $x^2 - x + 3$ се достига при $x = 0$ и $x = 1$ и е равна на 3, а най-малката ѝ стойност се достига при $x = \frac{1}{2}$ и е равна на $\frac{11}{4}$. Следователно ъгълът φ е най-ма-

лък когато $\cotg \varphi = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi = 30^\circ$, и φ е най-голям когато $\cotg \varphi = \frac{11}{4\sqrt{3}}$ (тогава $\cos \varphi = \frac{11}{13}$).

Зад. 3. Нека t_1, t_2, t_3 са дължините на допирателните от медицентъра G на триъгълника ABC към трите външно вписани за триъгълника окръжности. Да се докаже, че

$$3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) = a^2 + b^2 + c^2 + p^2,$$

където $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Решение. Нека O_1, O_2, O_3 са центровете на външно вписаните окръжности съответно срещу върховете A, B, C на $\triangle ABC$, а r_1, r_2, r_3 са радиусите на тези окръжности.

От теорема на Лайбниц имаме

$$O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = 3O_1G^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2). \quad (*)$$

(Тази теорема се доказва като се повдигнат на квадрат векторните равенства

$$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1G} + \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{O_1G} + \overrightarrow{GB}, \quad \overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{O_1G} + \overrightarrow{GC}$$

и се вземе предвид, че $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.)

Нека P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от точката O_1 съответно към правите AB и AC . Тогава (както е известно) $AP = AQ = p$ и $BP = p - c$, $CQ = p - b$. Сега имаме

$$O_1A^2 = r_1^2 + p^2, \quad O_1B^2 = r_1^2 + (p - c)^2, \quad O_1C^2 = r_1^2 + (p - b)^2,$$

и също така

$$3O_1G^2 = 3(r_1^2 + t_1^2).$$

Замествайки от тези равенства O_1A^2 , O_1B^2 , O_1C^2 и $3O_1G^2$ в равенството (*) от теоремата на Лайбниц, получаваме

$$3r_1^2 + p^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3(r_1^2 + t_1^2) + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

или

$$p^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3t_1^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2). \quad (**)$$

Добре известно е, че

$$GA^2 = \frac{1}{9}[2(b^2 + c^2) - a^2],$$

$$GB^2 = \frac{1}{9}[2(a^2 + c^2) - b^2],$$

$$GC^2 = \frac{1}{9}[2(a^2 + b^2) - c^2].$$

Така равенството (**) приема вида

$$p^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3t_1^2 + \frac{1}{9}[2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2]$$

или

$$p^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3t_1^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Като напишем аналогични равенства за центровете O_2 и O_3 и ги съберем с горното, след очевидни преобразувания, получаваме исканото равенство

$$3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) = a^2 + b^2 + c^2 + p^2.$$

Зад. 4. Нека $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ са естествени числа ($n > 1$), такива че най-малкото общо кратно на всеки две от тях е по-голямо от a_n . Да се докаже, че:

а) $a_n > 2n - 2$;

б) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

Решение. а) Да допуснем, че $a_n \leq 2n - 2$. Да запишем дадените числа във вида $a_i = 2^{b_i}c_i$, където $b_i \geq 0$ и c_i е нечетно, $1 \leq c_i \leq 2n - 3$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тъй като числата $c_1, c_2, \dots, c_n$ са n на брой, а в интервала $[1, 2n - 3]$ има $n - 1$ нечетни числа, то $c_i = c_j$ за някои i и j , например $i < j$. Тогава $b_i < b_j$ (понеже $a_i < a_j$) и a_i дели $a_j = 2^{b_j}c_j$. Значи най-малкото общо кратно на a_i и a_j е равно на a_j и не надминава a_n , което е противоречие с условието. Следователно $a_n > 2n - 2$.

б) Броят на естествените числа от интервала $[1, a_n]$, които се делят на a_k е равен на $\left\lfloor \frac{a_n}{a_k} \right\rfloor$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тъй като най-малкото общо кратно на всеки две от дадените числа е по-голямо от a_n , то никое число от интервала $[1, a_n]$ не се дели едновременно на две от дадените числа. Следователно броят на числата от интервала $[1, a_n]$, които се делят на (точно) едно от $a_1, a_2,$

$\dots, a_n$ е равен на $\left\lfloor \frac{a_n}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_n}{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n}{a_n} \right\rfloor$. От друга страна очевидно този брой не надминава a_n . Така получаваме

$$\left\lfloor \frac{a_n}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_n}{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n}{a_n} \right\rfloor \leq a_n.$$

Тъй като $\left\lfloor \frac{a_n}{a_k} \right\rfloor > \frac{a_n}{a_k} - 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $\left\lfloor \frac{a_n}{a_n} \right\rfloor = \frac{a_n}{a_n}$, то

$$\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n} - (n-1) < a_n.$$

Оттук, като вземем предвид, че $a_n > 2n-2$, получаваме

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{n-1}{a_n} < 1 + \frac{n-1}{2n-2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Зад. 5. Нека f е полином от степен $n > 1$ и старши коефициент 1, който има n различни реални корена. Да се докаже, че за всяко реално число x , по-голямо от корените на f , е изпълнено неравенството:

$$\begin{aligned} \text{а) } & (f'(x))^n > n^n (f(x))^{n-1}; \\ \text{б) } & \frac{f'(x)}{1^1} \cdot \frac{f''(x)}{2^2} \cdot \frac{f'''(x)}{3^3} \dots \frac{f^{(n)}(x)}{n^n} > (f(x))^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Решение. Нека корените на f са $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ и x е произволно реално число, по-голямо от x_n .

а) Имаме

$$(1) \quad f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

(оттук $f(x) > 0$) и

$$(2) \quad f'(x) = (x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})$$

(оттук $f'(x) > 0$). От (1) и (2) получаваме

$$(3) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Тъй като всички събираеми в дясната страна на (3) са реални, положителни (и различни), то

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > n \sqrt[n]{\frac{1}{x-x_1} \cdot \frac{1}{x-x_2} \dots \frac{1}{x-x_n}} = n \sqrt[n]{\frac{1}{f(x)}}.$$

Полученото неравенство е равносилно с $(f'(x))^n > n^n (f(x))^{n-1}$.

б) Ще извършим индукция по n . При $n = 2$ от а) имаме $f'(x) > 2(f(x))^{\frac{1}{2}}$ и оттук $\frac{f'(x)}{1^1} \cdot \frac{f''(x)}{2^2} = \frac{f'(x)}{2} > (f(x))^{\frac{1}{2}}$. Нека $n \geq 3$.

Тъй като $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n-1}) = f(x_n) (= 0)$, съгласно теоремата на Рол f' има поне по един реален корен във всеки от интервалите (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , $\dots$, (x_{n-1}, x_n) . (Това следва и от теоремата на Болцано като се използва (2).) Следователно полиномът $g = \frac{1}{n}f'$ е от степен $n-1$, със старши коефициент 1 и има $n-1$ различни реални корена, които са по-малки от x . Съгласно индукционното предположение имаме

$$\frac{g'(x)}{1^1} \cdot \frac{g''(x)}{2^2} \dots \frac{g^{(n-1)}(x)}{(n-1)^{n-1}} > (g(x))^{\frac{n-2}{2}}.$$

Като умножим двете страни на това неравенство с $g(x)$ (> 0), заместим $g(x) = \frac{1}{n}f'(x)$ и използваме а), получаваме

$$\frac{f'(x)}{1^1} \cdot \frac{f''(x)}{2^2} \cdot \frac{f'''(x)}{3^3} \dots \frac{f^{(n)}(x)}{n^n} > \frac{(f'(x))^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} > (f(x))^{\frac{n-1}{2}}.$$

С това неравенството е доказано.

Ще отбележим, че неравенствата в а) и б) (като нестроги неравенства) са в сила и без предположението корените на f да са различни.