СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА ЗА КУПАТА НА ФМИ

Втори кръг, 11 май 2008 г.

Зад. 1. Редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворява условията $a_0 \in (0,1)$ и $a_n = 2a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1$ за всяко естествено число n. Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери границата ѝ.

Зад. 2. Точките M и N лежат върху страната AB на равностранния триъгълник ABC и $MN = \dfrac{AB}{2}$. Да се намери най-малката и най-голямата стойност на $\sphericalangle MCN$.

Зад. 3. Нека t_1, t_2, t_3 са дължините на допирателните от медицентъра G на триъгълника ABC към трите външно вписани за триъгълника окръжности. Да се докаже, че

$$3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) = a^2 + b^2 + c^2 + p^2,$$

където $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Зад. 4. Нека $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ са естествени числа $(n > 1)$, такива че най-малкото общо кратно на всеки две от тях е по-голямо от a_n. Да се докаже, че:

а) $a_n > 2n - 2$;

б) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{3}{2}$.

Зад. 5. Нека f е полином от степен $n > 1$ и старши коефициент 1, който има n различни реални корена. Да се докаже, че за всяко реално число x, по-голямо от корените на f, е изпълнено неравенството:

а) $\big(f'(x)\big)^n > n^n\big(f(x)\big)^{n-1}$;

б) $\dfrac{f'(x)}{1^1} \cdot \dfrac{f''(x)}{2^2} \cdot \dfrac{f'''(x)}{3^3} \cdots \dfrac{f^{(n)}(x)}{n^n} > \big(f(x)\big)^{\frac{n-1}{2}}$.

Всяка задача се оценява с 8 точки.
Време за работа 5 часа.
Журито Ви желае успешна работа!