Домашно №2 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток, зимен семестър на 2014/2015 г.

Домашните работи се предават на съответния асистент на упражнение през седмицата 02.12.2014–05.12.2014 г. Точките за всяка поздадача са написани до нея в полето в син цвят.

Име: .... ФN: .... Група: ......

Задача	1	2	3	4	Общо
получена оценка					
от максимално	*7*	*15*	*18*	*26*	*66*

Зад. 1 *Двоичен брояч с n позиции* е вектор от n двоични числа (0 или 1), който се интерпретира като число, записано в двоична позиционна бройна система. Броячът бива увеличаван с 1 в дискретни моменти във времето. В началния момент t_0 броячът съдържа само нули, тоест представлява числото 0 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_1 той представлява числото 1 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_2 той представлява числото 2 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_3 той представлява числото 3 в двоична система, и така нататък:

$$\begin{array}{lcccc}
t_0: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\
t_1: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,1 \\
t_2: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,0 \\
t_3: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,1 \\
t_4: & 0\,0 & \cdots & 1\,0\,0 \\
 & \ldots & &
\end{array}$$

Изобщо, в момент t_k броячът съдържа двоичния запис на числото k. Увеличаването на брояча с 1 продължава, докато той съдържа поне една нула. Когато броячът съдържа само единици:

$$\underbrace{1\,1 \quad \cdots \quad 1\,1\,1}_{n \text{ на брой}}$$

увеличаването спира и броячът остава в това състояние. Отговорете на следните въпроси:

1 т. 1. Кое е числото (в двоична позиционна бройна система), което остава записано в брояча след спирането му?

3 т. 2. *Битово обръщане* наричаме всяко преминаване от 0 в 1 или от 1 в 0 от даден t_i към следващия t_{i+1}. Например, при преминаването от t_0 в t_1 има точно едно битово обръщане, а именно в най-дясната позиция; при преминаването от t_1 в t_2 има точно две битови обръщания, а именно в двете най-десни позиции; при преминаването от t_2 в t_3 има точно едно битово обръщане; при преминаването от t_3 в t_4 има точно три битови обръщания; и така нататък. Нека T_n е броят на всички битови обръщания за двоичен брояч с n позиции – от момента t_0 до последния момент, в който увеличаването спира. Напишете рекурентно отношение за T_n и дайте кратка аргументация за него.

3 т. 3. Решете рекурентното отношение чрез метода с характеристичното уравнение.

Зад. 2 Нека n е нечетно, тоест $n = 2k+1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Разгледайте биномния коефициент $\binom{n}{k}$.

1 т. 1. Докажете, че $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$.

2 т. 2. Докажете, че $\binom{n}{k'} < \binom{n}{k}$ за всяко $k' < k$ и $\binom{n}{k''} < \binom{n}{k+1}$ за всяко $k'' > k+1$.

3. Да разгледаме $\binom{n}{k}$ за някои конкретни стойности на n:

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{7}{3} = 35 \quad \binom{9}{4} = 126 \quad \binom{11}{5} = 462$$
$$\binom{13}{6} = 1\,716 \quad \binom{15}{7} = 6\,435 \quad \binom{17}{8} = 24\,310 \quad \binom{19}{9} = 92\,378 \quad \binom{21}{10} = 352\,716 \quad \binom{23}{11} = 1\,352\,716$$

В този пример, $\binom{n}{k}$ е четно число с изключение на точно тези стойности на n, за които n е число от вида "точна степен на двойката, минус единица". Иначе казано, когато $n = 2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Ако продължите да пресмятате коефициентите с компютър, ще видите, че следващата нечетна стойност на $\binom{n}{k}$, а именно $300\,540\,195$, се достига при $n = 31$, а след това $916\,312\,070\,471\,295\,267$ при $n = 63$ – отново числа от вида $2^m - 1$. За междинните стойности на n въпросните биномни коефициенти са четни числа. Това, което се иска от Вас е, да докажете, че това не е случайно.

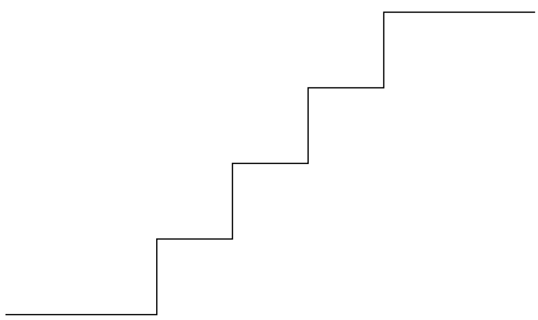
12 т. Докажете, че $\binom{n}{k}$ е нечетно число <u>тогава и само тогава</u>, когато $n = 2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$.

Упътване: *Не е необходимо доказателството да е суперпрецизно. За да видите решението, напишете си* ***подробно*** *тези биномни коефициенти като дроби за стойности на n, да речем до $n = 31$. Забележете, че това са дроби, в които и числителят, и знаменателят са произведения с един и същи брой множители-естествени числа, които са последователни числа както в числителя, така и в знаменателя. Нещо повече, числата в знаменателя и числата в числителя биха образували една непрекъсната последователност от поредни числа, ако едно число не липсваше.*
Съобразете, че във всяко число от $\mathbb{N}^+$ има нула или повече множители-двойки, като то е нечетно тогава и само тогава, когато броят на множителите-двойки е нула. Примерно, 12 има 2 множителя-двойки ($12 = 2 \times 2 \times 3$), докато 17 има нула множителя-двойки. За да е нечетна една дроб, трябва числителят да има точно толкова множители-двойки, колкото и знаменателят. За всяка дроб от малкия пример, който сте направили, напишете над всяко от числата-участници в произведенията (и в числителя, и в знаменателя) броя на неговите множители-двойки. Намерете закономерност в бройките на множителите-двойки. Сега си представете всички естествени числа в нарастващ ред и за всяко естествено число, броят на неговите множители-двойки. Тук също има закономерност. Открийте връзка между двете закономерности.

Зад. 3 Числата на Фибоначи се дефинират чрез следното рекурентно отношение:

$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n > 1$

1. Представете си стълба с n стъпала. Примерно, ето стълба с 4 стъпала:



3 т. Представете си човек, който изкачва стълбата. Той или тя или взема стъпалата едно по едно, или по две стъпала на веднъж, но не повече. Каква е връзката между броя на различните начини този човек да изкачи стълбата и числата на Фибоначи?

3 т. 2. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и n на брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра. Покриване на големия правоъгълник с малките правоъгълничета е всяко тяхно слагане върху големия правоъгълник, такова че нито те се припокриват, нито остава непокрита част от големия правоъгълник. Очевидно бройката на малките правоъгълничета е достатъчна, за да покрием големия. Нещо повече, начините за покриване на големия са много, ако n е голямо число. Каква е връзката между начините да бъде покрит големия правоъгълник и числата на Фибоначи?

12 т. 3. Докажете, че

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n}$$

Имайте предвид, че биномният коефициент е 0, ако горният индекс е по-малък от долния. Задачата може да бъде решена по индукция или чрез комбинаторни разсъждения. Ако искате да я решите с комбинаторни разсъждения, преценете каква е връзката между броя на двоичните вектори (с някаква, една и съща, дължина), в които няма съседни единици, и числата на Фибоначи.

Зад. 4 Разгледайте всички думи с дължина 100 над българската азбука (има 30 букви). "Дума" в случая е всяка последователност от 100 букви, а не истинска дума от българския език (най-малкото, на български няма думи с толкова букви). Азбуката има естествена подредба на буквите от **а** към **я**.

3 т. • Колко са различните думи, в които срещащите се букви са във възходящ ред (отляво надясно)?

3 т. • Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж и буквите са във възходящ ред (отляво надясно)?

10 т. • Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж?

10 т. • Колко са различните думи, в която всяка гласна се среща поне веднъж? Гласните са $\boxed{\textbf{а}}$, $\boxed{\textbf{ъ}}$, $\boxed{\textbf{о}}$, $\boxed{\textbf{у}}$, $\boxed{\textbf{е}}$ и $\boxed{\textbf{и}}$.