# Примерно решение на домашно №3 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток, зимен семестър на 2014/2015 г..

---

**Зад. 1** Разгледайте множеството от първите $2n$ цели положителни числа. По колко начина може да бъдат наредени в редица, така че за всяка двойка съседни числа в редицата, сумата на тези числа не е четно число?

**Решение:** Сумата на две числа е четно число тогава и само тогава, когато или и двете числа са четни, или и двете числа са нечетни. Следователно, във въпросните наредби няма две съседни четни числа и няма две съседни нечетни числа. С други думи, всяка от тези редици е алтернираща редица от вида

четно нечетно четно нечетно ...... четно нечетно

или

нечетно четно нечетно четно ...... нечетно четно

Редиците от първия вид са $n! \times n!$, редиците от втория вид са също толкова, така че отговорът е $2\,(n!)^2$.

**Зад. 2** Докажете, че за всеки избор на пет точки с целочислени координати в равнината, съществуват поне две точки $a$ и $b$ измежду петте, такива че средата на отсечката с краища $a$ и $b$ има целочислени координати.

**Решение:** Съществуват точно четири различни възможности за четността на координатите на петте точки. А именно, за всяка от петте точки, да я наречем $p = (q_1, q_2)$:

1. $q_1$ е четно и $q_2$ е четно,
2. $q_1$ е нечетно, а $q_2$ е четно,
3. $q_1$ е четно, а $q_2$ е нечетно,
4. $q_1$ е нечетно и $q_2$ е нечетно.

От принципа на Дирихле следва, че поне две от точките имат една и съща четност на координатите си: или и двете координати са четни, или и двете са нечетни. Да наречем тези точки $a$ и $b$ и нека $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$. Нека средата на отсечката с краища $a$ и $b$ е точка $c$. Извесно е, че $c = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Щом $x_1$ и $x_2$ имат една и съща четност, сумата им е четно число, така че $\frac{x_1+x_2}{2}$ е цяло число. Напълно аналогично, $\frac{y_1+y_2}{2}$ е цяло число.

**Зад. 3** Да допуснем, че във всеки курс на ФМИ (първи, втори, трети и четвърти) има един и същи брой $n$ студенти. По колко начина можем да разбием множеството от студентите на ФМИ на четворки, като във всяка четворка има по точно един студент от всеки курс? Четворките нямат наредба, нито има наредба между четворките.

**Решение:** Да си представим, че генерираме четворките последователно. За първата четворка имаме избор от $n$ първокурсника, $n$ второкурсника, $n$ третокурсника и $n$ четвъртокурсника. Има $n^4$ начина да изберем по един студент от всеки курс, което прави общо $n^4$ начина за първата четворка. За втората четворка начините са $(n-1)^4$, за третата са $(n-2)^4$, и така нататък, за последната четворка има $1^4 = 1$ начина. Умноавайки тези количества, получаваме

$$n^4 \times (n-1)^4 \times (n-2)^4 \times \cdots 2^4 \times 1^4 = (n!)^4$$

Но това не е верният отговор, защото всяка от четворките бива броена $n!$ пъти в този израз. За да получим верният отговор, трябва да разделим това количество на $n!$. И така, отговорът е

$$\frac{(n!)^4}{n!} = (n!)^3$$

**Зад. 4** 50 шахматисти се състезават. Досега са изиграни 101 срещи. Докажете, че поне един участник е играл в поне 5 срещи. Допуснете, че никои двама участници не играят повече от веднъж един срещу друг.

**Решение:** Ще моделираме задачата с граф $G = (V, E)$, където $V$ е множеството от шахматистите, а $E$ е множеството от изиграните срещи. А именно, $\forall u, v \in V : (u, v) \in E$ тогава и само тогава, когато играчи $u$ и $v$ са играли.

Ако допуснем, че всеки участник е играл в най-много 4 срещи, това означава, че максималната степен на връх в графа е 4. Тогава сумата от степените $\sum_{u \in V} d(u)$ е такава, че $\sum_{u \in V} d(u) \leq 200$. Известно е, че $\sum_{u \in V} d(u) = 2m$, където $m$ е броят на ребрата. Тогава $m \leq 100$. Но по условие $m = 101$. $\lightning$

**Зад. 5** Пътна мрежа е множество градове и шосета, като всяко шосе свързва два града. Пътната мрежа на някаква държава е такава, че от всеки град може да се стигне до всеки, но по един единствен начин, и освен това броят на шосетата е четно число. Докажете, че има поне един град, от който излизат четен брой шосета.

**Решение:** Ще моделираме задачата с граф $G = (V, E)$, където $V$ е множеството от градовете, а $E$ е множеството от шосетата. Щом от всеки град може да се стигне до всеки друг, то графът е свързан; щом това може да стане по един единствен начин, графът е дърво. Тогава, съгласно изведеното на лекции, $|V| = |E| - 1$. Но $|E|$ е четно по условие. Тогава $|V|$ е нечетно.

Ако допуснем, че всички степени на върхове са нечетни, следва, че сумата от степените $\sum_{u \in V} d(v)$ е нечетна, защото сумата на нечетен брой числа, всяко от които е нечетно, е нечетно число. Но знаем, че $\sum_{u \in V} d(v) = 2m$, от което веднага следва, че $\sum_{u \in V} d(v)$ винаги е четно число. $\lightning$