Име:.. ФN°:............. Група:..........

Зад.	1	2	3	4	5, бонус	Общо
точки						
от макс.	20	21	15	10	25	66

Задача 1 В тази задача знакът "$\times$" означава обикновеното умножение на числа. Да дефинираме безкрайната редица $C_0, C_1, C_2, \ldots$ от *числа на Catalan* чрез индуктивна дефиниция:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times C_{n-1-i} \text{ за } n > 0 \tag{1}$$

За Ваше улеснение, ето първите няколко числа на Catalan. От базата на дефиницията знаем, че $C_0 = 1$. После:

$$C_1 = \sum_{i=0}^{0} C_i \times C_{0-i} = C_0 \times C_0 = 1 \times 1 = 1$$

$$C_2 = \sum_{i=0}^{1} C_i \times C_{1-i} = C_0 \times C_1 + C_1 \times C_0 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$C_3 = \sum_{i=0}^{2} C_i \times C_{2-i} = C_0 \times C_2 + C_1 \times C_1 + C_0 \times C_2 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$$

$$C_4 = \sum_{i=0}^{3} C_i \times C_{3-i} = C_0 \times C_3 + C_1 \times C_2 + C_2 \times C_1 + C_3 \times C_0 = 1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 14$$

10 т. **Подзадача 1.а)** *Добре скобуван израз* ще наричаме всеки стринг x над азбуката $\Sigma = \{(,)\}$, такъв че

- броят на левите и десните скоби в x е равен и
- ако $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ (което значи, че x има дължина m), за всяко i, такова че $1 \leq i \leq m$, броят на левите скоби в $x_1 x_2 \cdots x_i$ е по-голям или равен от броя на десните скоби в $x_1 x_2 \cdots x_i$.

Ето четири примера за добре скобувани изрази:

$()$ $\qquad$ $()()$ $\qquad$ $((()()())())$ $\qquad$ $((()(()(())))(())$

Ето три примера за стрингове над $\Sigma = \{(,)\}$, които не са добре скобувани изрази:

$(()))$	$(()$	$x = ()(())())(()$
десните скоби са в повече	левите скоби са в повече	в x левите скоби са колкото десните, но в $x_1 \cdots x_9$ има 5 десни скоби и само 4 леви.

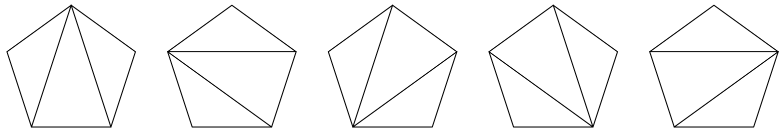
Очевидно дължините на добре скобуваните изрази са четни. Да видим колко добре скобувани израза с дължина $2n$ има, за малки n. За $n = 0$ има точно един израз: празният стринг, който е добре скобуван израз по горната дефиниция. За $n = 1$ има точно един израз: $()$. За $n = 2$ изразите са два: $(())$ и $()()$. За $n = 3$ изразите са пет: $((()))$, $(()())$, $(())()$, $()(())$, $()()()$. За $n = 4$ изразите се четиринадесет. Изглежда, че за всяко n, броят на добре скобуваните изрази с дължина $2n$ е точно C_n: n-тото число на Каталан. От Вас се иска да докажете това формално.

Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}$, броят на добре скобуваните изрази с дължина $2n$ е точно C_n, използвайки рекурентното отношение (1).

Упътване. Разгледайте произволен добре скобуван израз $x = x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ *за* $n \geq 1$. *Дефинирайте функция* $f : \{1, 2, \ldots, n\} \in \mathbb{Z}$ *така:* $f(i)$ *е броят на левите скоби минус броя на десните скоби в подстринга*

$x_1 \cdots x_i$. *Стрингът да е добре скобуван израз е същото като* $f(2n)$ *да е* 0 *и* $f(i) \geq 0$ *за всяко* $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. *Разгледайте най-малкото число* k, *такова че* $f(k) = 0$. *Такова* $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *съществува, защото* $f(2n)$ *е* 0. *Докажете, че* k *е четно. Разгледайте подстринговете* $x_1 \cdots x_k$ *и* $x_{k+1} \cdots x_{2n}$ *(вторият може и да е празен). Какво може да кажете за тях? Какво може да кажете за* x_1 *и* x_k, *какви букви са те? Оттук, какво може да кажете за* $x_2 \cdots x_{k-1}$, *който може и да е празен? Така дефинираното* k *задава някакво разбиване на множеството от всички добре скобувани изрази – а именно, разбиване по най-лявата позиция, в която* f *става нула. Щом имате подходящо разбиване, можете да приложите комбинаторния принцип на разбиването и да сумирате. Забележете, че рекурентното отношение се базира на сумиране на произведения* $C_i \times C_{n-1-i}$. *Как свързвате тези произведения със задачата за броя на добре скобуваните изрази? Съобразете защо индексите се сумират до* $n-1$, *а не до* n.

10 т. **Подзадача 1.б)** *Триангулация на правилен* n*-ъгълник*, за $n \geq 3$, се нарича всяко поставяне на $n-3$ диагонала в него, които не се пресичат, освен може би в крайните си точки. Ето всички триангулации на правилен 5-ъгълник (допуснете, че върховете са именувани):



Докажете по индукция, че броят на триангулациите на правилен n-ъгълник е C_{n-2}.

Упътване: това доказателство е аналогично на доказателството от ***Подзадача 1.а***. *Приемете, че всяка отсечка е в някакъв тривиален смисъл правилен 2-ъгълник. Отсечките в тази задача съответстват на празните стрингове в* ***Подзадача 1.а***. *И така, разглеждайте правилните* n*-ъгълници, започвайки от* $n = 2$; *естествено, при* $n = 2$ *не става дума за слагане на* $n-3$ *диагонала, но приемете, че отсечката има една триангулация. За всеки правилен* n*-ъгълник с* $n \geq 3$, *съобразете, че за всяка страна на* n*-ъгълника можете да дефинирате по много естествен начин "срещуположен връх" по отношение на коя да е триангулация. Различните избори на срещуположен връх (колко възможности има за това?) определят разбиване на множеството на триангулациите.*

Задача 2 Азбуката е множеството $\{А, Б, \ldots, Я\}$ от 30 букви.

5 т. **а)** Колко стринга с дължина 60 има над азбуката?

8 т. **б)** Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява поне веднъж?

8 т. **в)** Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява точно два пъти?

20 т. ***г), БОНУС*** *Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява точно два пъти и няма две съседни еднакви букви?*

15 т. **Зад. 3** Нека $G = (V, E)$ е двуделен граф. Нека за някакво число p и някакъв връх $u \in V$ е изпълнено $\forall v \in V \setminus \{u\} : d(v) = p$. Докажете, че $d(u)$ е число, кратно на p.

10 т. **Зад. 4** Намерете полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111\,1111\,1111\,1101)$.

25 т. ***Зад. 5, БОНУС*** *Докажете, че* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Упътване: припомнете си какво е "разходка в правоъгълна мрежа". Разгледайте правоъгълна мрежа M *с размери* $n \times n$. *Нека долният ляв ъгъл е точка* $(1, 1)$, *а горният десен,* (n, n). *Всяка разходка започва в* $(1, 1)$ *и завършва в* (n, n), *правейки само ходове нагоре и надясно. Колко са всички разходки? Нека дефинираме лошият диагонал като следното множеството от точки в мрежата:* $\{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-2, n-1), (n-1, n)\}$. *Разбийте множеството от всички разходки на добри и лоши. Лошите разходки са тези, които имат поне една обща точка с лошия диагонал.*

Изразете броя на добрите разходки чрез число на Catalan. След това намерете израз за броя на лошите разходки чрез биномен коефициент. Използвайте следното съображение: за произволна лоша разходка x, *разгледайте първата ѝ обща точка* $(k, k+1)$ *с лошия диагонал. Представете си друга разходка* y, *която повтаря ходовете на* x *до достигането на* $(k, k+1)$, *а след това за всеки ход надясно на* x *прави ход нагоре, и за всеки ход надясно на* x, *прави ход нагоре. Разбира се,* y *не е разходка в* M, *а в мрежа с размери* $(n-1) \times (n+1)$ *(защо?). Намерете подходящо прилагане на комбинаторния принцип на биекцията, за да намерите броя на лошите разходки.*