Поправителен изпит по ДАА при М. Марков, 26.08.2015 г.

Име:... ФN:......... Специалност:..... Година: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получена оценка							
от максимално	*14*	*20*	*20*	*16*	*20*	*20*	*110*

За отлична оценка са достатъчни 90 точки.

Зад. 1 Подредете по асимптотично нарастване следните осем функции. Трябва да напишете в явен вид крайната наредба и да дадете кратка обосновка.

$$(n+1)^3, \qquad (n+1)^n, \qquad n^n, \qquad (n+\lg n)^3,$$

$$\binom{n}{3} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i^2, \qquad n^{\lg n}, \qquad 2^{3^n}, \qquad 3^{2^n}$$

Зад. 2 Докажете коректността на алгоритъма Mergesort. Направете формално доказателство, използвайки методи за доказване на коректност на алгоритми, които са изучавани в курса. Вашият отговор трябва да започне с псевдокод на Mergesort.

Зад. 3 *Бинарна операция* се нарича всяка функция $f : A^2 \to A$, където A е някакво множество. По правило бинарните операции се записват с инфиксен запис, примерно $3+5$ за операцията събиране. Ако операцията е асоциативна можем да записваме многократното ѝ прилагане без скоби, примерно $1+5+7+3$. Асоциативността гарантира, че в какъвто и ред да прилагаме операцията, резултатът ще е един и същи. Затова записът без скоби е прецизен.

Да разгледаме бинарна операция $\oplus$, която **не е асоциативна**, върху някакво крайно множество A. Ако $a_1, \ldots, a_k \in A$, то записът $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k$ не е прецизен в смисъл, че различните скобувания на израза може да дават различни резултати. Например, нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и операцията $\oplus$ е дефинирана така, че $1 \oplus 2 = 4$ и $2 \oplus 3 = 4$ и $1 \oplus 4 = 1$ и $4 \oplus 3 = 3$. Тогава изразът $1 \oplus 2 \oplus 3$ може да има стойност 3, ако изчисляваме така $(1 \oplus 2) \oplus 3 = 4 \oplus 3 = 3$, или да има стойност 1, ако изчисляваме така $1 \oplus (2 \oplus 3) = 1 \oplus 4 = 1$.

Дадени са

- крайно множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,
- бинарна операция $\oplus$ над него, която може да не е асоциативна (също може да не е комутативна)
- израз $\boxed{a_{i_1} \oplus a_{i_2} \oplus \cdots \oplus a_{i_k}}$, където $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$,
- $b \in A$.

Предложете ефикасен алгоритъм, който връща 1, ако съществува скобуване на $a_{i_1} \oplus a_{i_2} \oplus \cdots \oplus a_{i_k}$, такова че изразът има стойност b, и връща 0 в противен случай. Операцията $\oplus$ е дефинирана чрез квадратна матрица M с размери $n \times n$, която е част от входа; всеки елемент $M[i, j]$ е равен на $a_i \oplus a_j$. Оценете сложността на Вашия алгоритъм.

Зад. 4 Даден е ориентиран свързан тегловен граф $G(\{1, 2, \ldots, n\}, E)$ с положителни тегла и връх s в него. Предложете ефикасен алгоритъм, който връща масив `out[1, .., n]`, такъв че за всеки връх $u \in \{1, 2, \ldots, n\}$, `out[u]` е **броят** на най-късите пътища от s до u.

Зад. 5 Напишете теоремата на Cook. Не се иска да давате доказателство, просто напишете какво се твърди в теоремата и съвсем накратко, на не повече от половин страница, обяснете понятията, които се споменават в теоремата. Ще получите бонус до 30 точки, ако опишете каква е идеята на доказателството – колкото по-подробно е описанието, толкова по-голям ще е бонусът.

Зад. 6 Докажете, че задачата Independent Set е **NP**-пълна, използвайки редукция от 3SAT.