Решения на задачите

Задача 1. Функция, дефинирана върху множеството $\{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$, всъщност е крайна редица с n члена. Така че в задачата се търси броят на редиците с n члена, всеки от които е 1 или 2, . . . , или n.

Нека x_i е броят на срещанията на числото i като член на редицата, където i приема всяка цяла стойност от 1 до n включително.
Тогава $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са цели неотрицателни числа и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n.$$

Броят на решенията на това уравнение в цели неотрицателни числа е равен на броя на комбинациите с повторение на n елемента от клас n. Този брой съвпада с биномните коефициенти $2n–1$ над $n–1$ и $2n–1$ над n.

Задача 2. Оцветяваме квадратчетата шахматно по стандартния начин: бяло поле в долния десен ъгъл. Тогава двете изрязани полета — долното дясно и горното ляво — имат бял цвят. След изрязването им на дъската остават общо 62 полета, от които 30 бели и 32 черни. За покриването на 62 полета са нужни 31 плочки от домино. Всяка плочка покрива едно бяло и едно черно поле, следователно 31 плочки ще покрият 31 бели и 31 черни полета, а не 30 бели и 32 черни полета. Ето защо дадените 62 квадратчета не могат да бъдат покрити с плочки от домино по искания начин.

Задача 3 може да се реши по различни начини, например чрез индукция. Тук ще разгледаме едно решение по метода на екстремалния елемент.

Нека u е онзи връх на графа, от който излизат най-много ребра. (Ако има няколко такива върха, няма значение кой от тях ще изберем.) Ще покажем, че върхът u има желаното свойство. Допускаме противното: че съществува връх v, до който не можем да стигнем от u нито за една, нито за две стъпки.

Щом от u не може да се стигне до v за две стъпки, то за всеки връх w, за който има ребро от u към w, не може да има ребро от w към v, тъй като ще се получи път $u \to w \to v$ от u до v с дължина 2, а такъв няма. Понеже графът е пълен, то за всеки връх w, за който има ребро от u към w, трябва да има ребро и от v към w. Следователно броят на ребрата, излизащи от v, е поне колкото броя на ребрата, излизащи от u.

От u не можем да стигнем до v за една стъпка, тоест реброто между тях сочи от v към u. Следователно броят на ребрата, излизащи от v, е поне с 1 повече от броя на ребрата, излизащи от u. Това противоречи на максималността на u.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Следователно вярно е твърдението на задачата.

Задача 4. Сумата в лявата страна на тъждеството представлява броят на сюрекциите от вида $f: X \to Y$, където $|X| = m$, $|Y| = n$. Ако $m < n$, то не е възможно с m стойности на функцията да изчерпим всичките n елемента на множеството Y. Затова при $m < n$ броят на сюрекциите е нула — дясната страна на тъждеството.