НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ, III.

Б. Г. Габдулхаев

В этой заметке, являющейся продолжением работ автора [1, 2], рассматривается обобщение некоторых результатов из [1] и предлагается ряд новых фактов по общей теории приближенных методов анализа.

Полученные результаты применяются к обоснованию метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений.

§ 1. О приближенном решении функциональных уравнений

Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства, а $\tilde{X}$ — полное и $\tilde{Y}$ — произвольное подпространства этих пространств. Обозначим через P линейный оператор, проектирующий Y на $\tilde{Y}$ и пусть $\rho = E - P$, где E — единичный оператор.

Рассмотрим два уравнения: точное —

$$Kx = y \qquad (x \in X, \quad y \in Y) \tag{1}$$

и соответствующее ему приближенное —

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y} \qquad (\tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \tilde{y} = Py \in \tilde{Y}), \tag{2}$$

где K и $\tilde{K}$ — линейные операторы соответственно из X в Y и из $\tilde{X}$ в $\tilde{Y}$.

На введенные пространства и операторы, как и в работе [1], наложим следующие условия:

I. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$$\|\tilde{K}\tilde{x} - PK\tilde{x}\| \leqq \varepsilon_1 \|\tilde{x}\|;$$

II. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ существует элемент $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ такой, что

$$\|K\tilde{x} - \tilde{y}\| \leqq \varepsilon_2 \|\tilde{x}\|,$$

где ε_1 и ε_2 — положительные постоянные, не зависящие от $\tilde{x}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия I и II. Если оператор K имеет левый линейный обратный K_l^{-1}, то при

$$p=(\varepsilon_1+\varepsilon_2\|\rho\|)\|K_l^{-1}\|<1 \tag{3}$$

приближенный оператор $\tilde{K}$ имеет также левый линейный обратный $\tilde{K}_l^{-1}$, причем

$$\|\tilde{K}\tilde{x}\|\geqq\|K_l^{-1}\|^{-1}(1-p)\|\tilde{x}\| \qquad (\tilde{x}\in\tilde{X}). \tag{4}$$

Если, кроме того, выполнено

Условие А. Для любого $\alpha>0$ и $x\in X$ существует елемент $\tilde{x}\in\tilde{X}$ такой, что

$$\|PKx-\tilde{K}\tilde{x}\|<\alpha,$$

а оператор K имеет линейный (двусторонний) обратный, то оператор $\tilde{K}$ имеет также линейный (двусторонний) обратный $\tilde{K}^{-1}$, причем

$$\|\tilde{K}^{-1}\|\leqq\frac{\|K^{-1}\|}{1-p}. \tag{5}$$

При этом для решений уравнений (1) и (2) справедливы оценки:

$$\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqq(\|\rho\|\|y\|+p\|y\|)\|K^{-1}\|(1-p)^{-1}, \tag{6}$$

$$\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqq[\|\rho\|\|y\|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2\|\rho\|)\|\tilde{x}^*\|]\|K^{-1}\|, \tag{7}$$

$$\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqq\varepsilon_1\|\tilde{K}^{-1}\|\|\tilde{x}\|+(1+\|\tilde{K}^{-1}PK\|)\|x^*-\tilde{x}\|, \tag{8}$$

где $\tilde{x}$ — произвольный элемент из $\tilde{X}$, который может быть выбран исходя из минимальности правой части (8).

Доказательство. Существование левого линейного оператора $\tilde{K}_l^{-1}$ и справедливость оценки (4) следует из теоремы 1 работы [1].

Для доказательства второго утверждения теоремы воспользуемся методом, предложенным при доказательстве теоремы 3 работы [1]. Пусть $\tilde{Y}'$ — образ подпространства $\tilde{X}$ при отображении оператором $\tilde{K}$. Поскольку линейный оператор $\tilde{K}$, действующий из B — пространства $\tilde{X}$ в нормированное пространство $\tilde{Y}$, имеет левый линейный обратный, то [3] множество $\tilde{Y}'$ замкнуто в $\tilde{Y}$. С другой стороны, при выполнении условия A, как показано в [1], множество $\tilde{Y}'$ будет плотным в $\tilde{Y}$. Поэтому существует правый линейный обратный оператор $\tilde{K}_r^{-1}$ и, следовательно, $\tilde{K}$ имеет двусторонний линейный обратный и из неравенства (4) следует оценка (5).

Неравенства (6) — (8), позволяющие оценить погрешность приближенного решения $\tilde{x}^*$, следуют из соответствующих оценок теорем 4,5 и 6 работы [1].

На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ являются конечномерными пространствами. В этом случае необходимость в условии A отпадает и тем самым теорема 1 значительно упрощается. Точнее, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — конечномерные пространства, причем $\dim \tilde{X} = \dim \tilde{Y} = r$. Пусть выполнены условия I и II и оператор $\tilde{K}$ имеет линейный обратный. Если

$$p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 | \rho) \ \tilde{K}^{-1} < 1, \tag{9}$$

то оператор $\tilde{K}$ имеет линейный обратный $\tilde{K}^{-1}$ и справедливы оценки (5) — (8).

Доказательство. В рассматриваемом случае уравнение (2) представляет собой систему из r линейных алгебраических уравнений с r неизвестными. Соответствующая однородная система, в силу существования (на основании теоремы 1) левого обратного оператора $\tilde{K}_l^{-1}$, имеет единственное тривиальное решение. Отсюда следует разрешимость уравнения (2), что, в силу теоремы 1, влечет за собой справедливость остальных утверждений теоремы.

Таким образом, в теореме 2 из существования левого линейного обратного оператора $\tilde{K}_l^{-1}$ следует[1] существование и правого линейного обратного оператора $\tilde{K}_r^{-1}$. Справедливо также обратное утверждение. Действительно, в [3] показано, что это утверждение может быть получено как следствие из общих теорем, связывающих уравнение (2) и соответствующее ему сопряженное уравнение. Укажем также непосредственное доказательство, использующее метод, предложенный в [4] при исследовании конечномерных операторов.

Итак, пусть оператор $\tilde{K}$ имеет правый линейный обратный $\tilde{K}_r^{-1}$. Поэтому уравнение (2) имеет решение (вообще говоря, не единственное) при любой правой части $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — базис пространства $\tilde{Y}$ и пусть e_j — решение (или любое из решений, если их несколько) уравнения $\tilde{K}\tilde{x} = g_j$ при каждом j фиксированном. Тогда система $e_1, e_2, \ldots, e_r$ образует базис в пространстве $\tilde{X}$; действительно, сумма $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r = 0$ ($\alpha_i = \text{const}$) влечет за собой $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r = 0$ и, следовательно, все $\alpha_i = 0$. Поэтому при любом $\tilde{x} \neq 0$ из $\tilde{X}$ имеем $\tilde{y}' = \tilde{K}\tilde{x} \neq 0$ из $\tilde{Y}$, т. е. оператор $\tilde{K}$ осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства $\tilde{X}$ на $\tilde{K}\tilde{X}$ и, следовательно, имеет левый линейный обратный $\tilde{K}_l^{-1}$.

Таким образом, имеет место следующая

---

[1] Заметим, что в [1] и [3] в общем случае установлены различные достаточные условия для существования $\tilde{K}_r^{-1}$ независимо от существования $\tilde{K}_l^{-1}$.

Теорема 3. Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — конечномерные пространства одинаковой размерности. Для того чтобы линейный оператор $\tilde{K}$ из $\tilde{X}$ в $\tilde{Y}$ имел левый линейный обратный $\tilde{K}_l^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{K}$ имел правый линейный обратный $\tilde{K}_r^{-1}$.

Далее, рассмотрим последовательность подпространств $\tilde{X}=X_n$ и $\tilde{Y}=Y_n\,(n=1,\ 2,\ldots)$ и связанную с ними последовательность приближенных уравнений (2) при $\tilde{K}=K_n$, $P=P_n$, $\rho=\rho_n$ и $\varepsilon_1=\varepsilon_1^{(n)}$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2^{(n)}$. В этом случае из теорем 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 4. Пусть X_n и Y_n — конечномерные пространства одинаковой размерности и при каждом $n=1,2,\ldots$ выполнены условия I и II, причем

$$\lim \varepsilon_1^{(n)}=\lim \varepsilon_2^{(n)}\ \rho_n\ =0,\quad n\to\infty. \tag{10}$$

Если существует линейный обратный K^{-1}, то при достаточно больших n (точнее, при $p=p_n<1$) приближенные уравнения $K_n x_n=y_n$ однозначно разрешимы при любых правых частях $y_n=P_n y\in Y_n$, причем

$$K_n^{-1}\ <2\ K^{-1}\qquad (n\geqq n_0). \tag{11}$$

Если, кроме того, для правой части уравнения (1)

$$\lim\ y-P_n y\ =0,\qquad n\to\infty, \tag{12}$$

то последовательность приближенных решений $\tilde{x}^*=x^*_n$ сходится к точному решению x^* уравнения (1), при этом погрешность может быть оценена любым из неравенств (6), (7) и (8).

Теперь докажем теорему, в некотором смысле обратную к теоремам 1, 2 и 4.

Теорема 5. Пусть выполнены условия I и II, оператор $\tilde{K}$ имеет линейный обратный и

$$\tilde{p}=(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \rho\ )\ \tilde{K}^{-1}\ <1. \tag{13}$$

Тогда оператор K, рассматриваемый как линейный оператор из $\tilde{X}$ в $K\tilde{X}$, имеет линейный обратный K^{-1} с нормой

$$K^{-1}\leqq\frac{\tilde{K}^{-1}}{1-\tilde{p}}. \tag{14}$$

Доказательство. Для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$, как и при доказательстве теоремы 1 из [1], имеем

$$K\tilde{x}-\tilde{K}\tilde{x}\leqq\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \rho\ )\ \tilde{x}\ . \tag{15}$$

Из (15) находим неравенство

$$\tilde{K}\tilde{x}\geqq\tilde{K}\tilde{x}-K\tilde{x}-\tilde{K}\tilde{x}\geqq(1-\tilde{p})\ \tilde{K}^{-1}\ ^{-1}\ \tilde{x}\qquad (\tilde{x}\in\tilde{X}),$$

из которого получаем требуемое утверждение.

Следствие. Пусть оператор K отображает B — пространство X в нормированное пространство Y и выполнено

Условие В. Для любого $\beta>0$ и $y \in Y$ существует элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ такой, что

$$|y-K\tilde{x}|<\beta.$$

Тогда существует линейный оператор K^{-1} из Y в X, для которого справедлива оценка (14).

В заключение этого параграфа приведем следующие замечания.

1°. Условия I и II всюду могут быть заменены (см. [1]) одним условием следующего вида:

IV. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеем

$$|\tilde{K}\tilde{x}-K\tilde{x}| \leqq \varepsilon_4 |\tilde{x}| \qquad (\varepsilon_4=\text{const}).$$

Тогда величина $\varepsilon_1+\varepsilon_2 \rho$ должна быть заменена на ε_4.

2°. Частные случаи теорем 1, 2 и 4 ранее были использованы нами (в основном в неявном виде) в работах [5, 6, 7] при исследовании ряда конкретных приближенных методов.

§ 2. Об обусловленности функциональных уравнений

В книге [8] определяется понятие числа обусловленности матрицы и исследуется его роль при решении систем линейных алгебраических уравнений. Результаты, полученные в этом направлении в [8], легко переносятся также на операторные уравнения. Ниже приводятся соответствующие сведения из этой области и изучается связь между числами обусловленности уравнений (1) и (2).

Рассмотрим операторное уравнение (1), где линейный оператор K действует из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, причем существует (ограниченный или неограниченный) обратный оператор K^{-1}.

Величину $\eta=|K||K^{-1}|$ будем называть числом обусловленности оператора K и уравнения (1); уравнение (1) будем называть хорошо обусловленным, если η — невелико и плохо обусловленным — в противном случае.

Число обусловленности оператора K служит той количественной характеристикой, которая позволяет судить о связи погрешности приближенного решения и соответствующей невязки, т. е. величин $\varepsilon=x^*-\tilde{x}^*$, $\delta=y-K\tilde{x}^*=Kx^*-K\tilde{x}^*$. Действительно, как показано в [8], справедливо соотношение

$$\eta=\sup_{x^*}\left\{\sup_{\delta}\left(\frac{|\varepsilon|}{|x^*|}:\frac{|\delta|}{|y|}\right)\right\}=|K||K^{-1}|.$$

Кроме того, число η позволяет судить также об устойчивости соответствующего уравнения. Действительно, из [8] следует, что влияние неточности в задании оператора K на решение уравнения (1) в определенном смысле меньше для хорошо обусловленных операторов и больше для плохо обусловленных.

Далее, в качестве приближенного решения точного уравнения (1), как уже указывалось, мы будем брать точное решение $\tilde{x}^*$ приближенного уравнения (2). Однако на практике $\tilde{x}^*$ может быть найдено, вообще говоря, только приближенно. Определенное представление о допускаемой при этом погрешности дает, как это видно из сказанного выше, число обусловленности $\tilde{\eta}$ для приближенного оператора $\tilde{K}$. Поэтому представляет интерес исследовать связь между числами обусловленности точного и приближенного уравнений (1) и (2).

Имеет место следующая

Теорема 6. Пусть оператор K имеет линейный обратный и выполнены условия I и II. Если выполнено условие A или же $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ являются конечномерными пространствами одинаковой размерности, то при

$$p=(\varepsilon_1+\varepsilon_2|\rho|)\|K^{-1}\|<1$$

для приближенного уравнения (2) существует число обусловленности $\tilde{\eta}$. При этом числа обусловленности уравнений (1) и (2) связаны соотношениями:

$$\tilde{\eta}\leqq\frac{\eta+p}{1-p},\qquad \tilde{\eta}-\eta\leqq\frac{p(1+\eta)}{1-p}. \tag{16}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 (или же теоремы 2) оператор $\tilde{K}$ имеет линейный обратный $\tilde{K}^{-1}$ с нормой

$$\|\tilde{K}^{-1}\|\leqq\|K^{-1}\|\,(1-p)^{-1}.$$

Отсюда следует существование числа обусловленности для приближенного уравнения (2).

С другой стороны, благодаря неравенству (15) имеем

$$\|\tilde{K}\|\leqq\|K-\tilde{K}\|+\|K\|\leqq(\eta+p)\,\|K^{-1}\|^{-1}.$$

Из двух последних неравенств получаем оценку $\tilde{\eta}(1-p)\leqq\eta+p$, из которой следуют соотношения (16).

Из теорем 2, 4 и 6 следует

Теорема 7. В условиях[1] теоремы 4 для всех достаточно больших n (точнее, при $p=p_n<1$) существуют числа обусловленности $\tilde{\eta}=\eta_n$ для системы уравнений (2), причем

[1] Условие (12) здесь является лишним.

(17) $$\eta_n \leqq C\eta \quad (1 \leqq C \leqq 1+\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \quad n \geqq n_0(\varepsilon)),$$

(18) $$\lim \eta_n = \eta, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, если точное уравнение (1) хорошо обусловлено, то, в условиях теоремы 7, хорошо обусловленным является также приближенное уравнение (2). А это, в свою очередь, приводит к тому, что решение системы алгебраических уравнений (2) в определенном смысле будет устойчивым относительно неточности задания элементов этой системы.

Отметим также, что с помощью теоремы 5 (и следствия из нее) легко может быть получено утверждение, в некотором смысле обратное к теоремам 6 и 7. Из этого утверждения следует, что если приближенное уравнение (2) хорошо обусловлено, то при достаточной малости величин ε_1 и ε_2 в условиях I и II хорошо обусловленным будет также точное уравнение (1).

§ 3. Об обосновании метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений

1°. В этом параграфе в качестве реализации полученных выше результатов будем рассматривать вопросы обоснования метода механических квадратур (м. м. к.) для сингулярных интегральных уравнений (с. и. у.). При этом существенным образом будем пользоваться результатами нашей работы [5].

Рассмотрим интегральное уравнение вида

(19) $$Ax = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)\,x(\tau)d\tau = f(t),$$

где коэффициенты и правая часть — непрерывные функции на окружности γ единичного радиуса с центром в начале координат, λ — комплексный параметр.

Пусть для определенности индекс [9] уравнения (19) равен нулю. Тогда [5] по м. м. к. приближенное решение с. и. у. (19) ищется в виде полинома

(20) $$x(t) = x_n(t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} c_k D_n(s-s_k) \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k \quad (t \in \gamma),$$

где $D_n(\varphi)$ — ядро Дирихле; неизвестные коэффициенты α_k $(k=\overline{-n,n})$ или $c_j = x_n(t_j)$ $(j=\overline{0,2n})$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

(21) $$a_j c_j + \frac{b_j}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} \alpha_{jk} c_k + \frac{\lambda}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} h_{jk} c_k = f_j \quad (j=\overline{0,2n}),$$

где $$a_j=a(t_j),\quad b_j=b(t_j)\quad f_j=f(t_j),\quad h_{jk}=h(t_j,t_k)t_k;$$

$$\alpha_{ik}=1-i\beta_{jk},\qquad t=e^{is},\quad t_j=e^{is_j},\qquad s_j=\frac{2j\pi}{2n+1};$$

$$\beta_{jk}=\operatorname{tg}\frac{s_j-s_k}{4}\quad\text{или}\quad \beta_{jk}=\operatorname{cotg}\frac{s_k-s_j}{4},$$

если $j-k$ — соответственно четно или нечетно.

2°. Переходя к обоснованию вычислительной схемы (19) — (21), предположим, что с. и. у. (19) является уравнением нормального типа [9] и функции a, b, h (по обоим аргументам) и f входят в класс $H_\alpha^{(r)}$, т. е. имеют r ($r\geqq 0$) непрерывных производных, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α ($0<\alpha\leqq 1$).

Пусть $X=Y$ такое подмножество множества непрер вных функций $C=C(\gamma)$, что для любого $x\in X$ существует (в смысле главного значения по Коши) и непрерывен (как функция от $t\in\gamma$) сингулярный интеграл

$$Sx=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}. \tag{22}$$

Вводя в $X=Y$ соответствующим образом норму (см. ниже пункты 3° и 4°), уравнение (19) будем рассматривать как нормально разрешимое операторное уравнение вида $Ax=f$, где A — линейный оператор в пространстве $X=Y$.

Каждой функции $x(t)\in X$ поставим в соответствие функции $x^+(z)$ и $x^-(z)$, аналитические соответственно внутри и вне γ и связанные с $x(t)$ на γ формулами Племеля-Сохоцкого [9]:

$$x^+-x^-=x,\qquad x^++x^-=Sx. \tag{23}$$

Тогда уравнение (19) приводится к следующему еквивалентному функциональному уравнению (см. [5]):

$$Kx=\mathfrak{M}x+\lambda Ux=y\qquad (x\in X,\quad y\in Y), \tag{24}$$

где $K=\mathfrak{M}+\lambda U$ — линейный оператор в X, причем

$$\mathfrak{M}x=\psi^-x^+-\psi^+x^-,\quad Ux=Uhx=dTx,\quad y=df,\quad d=\frac{\psi^-}{a+b}, \tag{25}$$

$$Tx=Thx=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d(\tau),\quad \psi^\pm(t)=\exp\theta^\pm(t),$$

$$\theta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\ln\dfrac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}}{\tau-z}d\tau.$$

Пусть $P=P_n$ — оператор, относящий каждой функции $y \in Y=X$ ее интерполяционный полином степени n по узлам $t_k=t_k^{(n)}$ $(k=\overline{0,2n})$. Через $P_\tau=P_n$ обозначим оператор P, применяемый по переменной τ. Тогда в соответствии с (24) система (21) эквивалентна (см. [5]) следующему функциональному уравнению:

$$\begin{aligned} &\tilde{K}\tilde{x}=\tilde{\mathfrak{M}}\tilde{x}+\lambda\tilde{U}\tilde{x}=\tilde{y} \quad (\tilde{x}\in\tilde{X},\ \tilde{y}\in\tilde{Y}),\\ &\tilde{\mathfrak{M}}\tilde{x}=P\mathfrak{M}\tilde{x},\quad \tilde{U}\tilde{x}=PUP_\tau(h\tilde{x}),\quad \tilde{y}=Py, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\tilde{K}=\tilde{\mathfrak{M}}+\lambda\tilde{U}$ — линейный оператор в $2n+1$-мерном пространстве полиномов $\tilde{X}=\{\tilde{x}^+-\tilde{x}^-\}=\left\{\sum\limits_{k=-n}^{n}\beta_k t^k\right\}$ $(t\in\gamma)$ с той же нормой, что и в X.

Таким образом, обоснование м. м. к. для с. и. у. (19) приводится к проверке условий I и II относительно операторов K и $\tilde{K}$, определяемых уравнениями (24) и (26).

Из соотношений (24) — (26) для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$ находим [5], [10]:

$$\begin{aligned} \tilde{K}\tilde{x}-PK\tilde{x} &= \lambda\ P[U\tilde{h}\tilde{x}-UP_\tau(\tilde{h}\tilde{x})] = \lambda\ PU\rho_\tau(\tilde{h}\tilde{x}),\\ &= \lambda\ PU[\rho_\tau(\tau\ h).\tau^{-1}\tilde{x}]\ ,\qquad \rho_\tau=E-P_\tau. \end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $\psi_n=\psi_n^+-\psi_n^-=\psi_n(t)$ и $\varphi_n=\varphi_n^+-\varphi_n^-=\varphi_n(t)$ — полиномы степени n вида $\sum\limits_{k=-n}^{n}\beta_k t^k$, т. е. вида (20), аппроксимирующие в определенном смысле функции соответственно $\psi=\psi(t)=\exp\theta(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$, $\varphi=U\tilde{x}$ $(\tilde{x}\in\tilde{X})$. Для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$ положим

$$\tilde{y}=\tilde{y}(t),\quad \tilde{y}=\psi_n^-\tilde{x}^+-\psi_n^+\tilde{x}^-+\lambda\varphi_n. \tag{28}$$

Очевидно, что $\tilde{y}\in\tilde{X}$ и для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$

$$K\tilde{x}-\tilde{y}\leqq(\psi-\psi_n)^-\tilde{x}^+-(\psi-\psi_n)^+\tilde{x}^-+\lambda\,|\varphi-\varphi_n\,. \tag{29}$$

Итак, проверка условий I и II из § 1 сводится к оценке правых частей неравенств (27) и (29), что может быть проведено различными способами.

Дальнейшее значительным образом зависит от нормировки пространства X.

3°. Пусть сначала $X=\{x^+-x^-\}=H_\beta$ $(0<\beta<\alpha\leqq1)$ — пространство непрерывных в смысле Гельдера функций с нормой

$$(30)\qquad \|x\| = \|x\|_\beta = M(x)+H(x;\beta) \equiv \max_{t\in\gamma}|x(t)| + \sup_{t'\neq t''}\frac{|x(t')-x(t'')|}{|t'-t''|^\beta}\quad (t',t''\in\gamma).$$

В этом случае с помощью результатов нашей работы [10] из неравенства (27) для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$ получаем следующее соотношение

$$(27')\qquad \|\tilde{K}\tilde{x}-P\tilde{K}\tilde{x}\|_\beta \leqq \frac{A_1\ln n+B_1}{n^{r+\alpha-\beta}}\|\tilde{x}\|_\beta \equiv \varepsilon_1\|\tilde{x}\|_\beta\quad (r\geqq 0,\quad n=1,2,\ldots).$$

Пусть ψ_n и φ_n из (28) — полиномы наилучшего равномерного приближения. Тогда с помощью соотношений (23), (25), (30) и результатов из работы [10] находим для любого $\tilde{x}\in\tilde{X}$

$$\|K\tilde{x}-\tilde{y}\|_\beta \leqq \|(\psi-\psi_n)^-\|\cdot\|\tilde{x}^+\| + \|(\psi-\psi_n)^+\|\cdot\|\tilde{x}^-\| + \lambda\|\varphi-\varphi_n\|$$

$$\leqq \frac{1}{2}[\|\tilde{x}\|+\|S\|\cdot\|\tilde{x}\|]\cdot[\|(\psi-\psi_n)^+\|+\|(\psi-\psi_n)^-\|]+\lambda\|\varphi-\varphi_n\|$$

$$(29')\qquad \leqq \frac{(1+\|S\|)^2}{2}\|\psi-\psi_n\|\cdot\|\tilde{x}\| \leqq \frac{A_2}{n^{r+\alpha-\beta}}\|\tilde{x}\| \equiv \varepsilon_2\|\tilde{x}\|_\beta\quad (r\geqq 0,\quad n=1,2,\ldots),$$

где норма сингулярного оператора (22) $\|S\| = \|S\|_\beta \leqq B_2$ — вполне определенная ограниченная (см. [9]) величина.

С другой стороны, из [10] следует оценка

$$(31)\qquad \|P\| = \|P_n\|_\beta \leqq A_3\ln n+B_3\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Теперь из соотношений (27′), (29′), (30), (31) и (23) и из результатов § 1 вытекает следующая

Теорема 8. Пусть λ — нехарактеристическое значение [3, 9] уравнения (19). Тогда для всех достаточно больших n, точнее, при n таких, что

$$(32)\qquad p=\frac{A_4\ln n+B_4}{n^{r+\alpha-\beta}}<1\qquad (r\geqq 0,\ 0<\beta<\alpha\leqq 1)$$

система алгебраических уравнений (21) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ (тем самым, и $\{\alpha_j^*\}$) при любой правой части.

Приближенные решения

$$(20^*)\qquad x_n^*=x_n^*(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}{}' c_k^* D_n(s-s_k)\equiv\sum_{k=-n}^{n}{}' \alpha_k^* t^k$$

сходятся к точному решению $x^*=x^*(t)$ уравнения (19) в смысле метрики пространства $X=H_\beta$, причем погрешность может быть оценена неравенством

$$x^*-x_n^*|_\beta \leqq \frac{A_5 \ln n + B_5}{n^{r-\alpha-\beta}} \quad (r \geqq 0, \quad 0<\beta<\alpha \leqq 1). \tag{33}$$

В связи с теоремой 8 следует отметить, что все использованные в ней постоянные A_k, B_k $(k=\overline{1,5})$ не зависят от n и для них с помощью работ [9] и [10] достаточно легко могут быть выписаны явные выражения или оценки сверху. Кроме того, используя формулу (8), для погрешности приближенного решения можно найти эффективную оценку (см. также теорему 5 из [1]).

4°. Из неравенства (33) видно, что приближенные решения (20*) равномерно сходятся к точному решению с быстротой

$$x^*(t)-x_n^*(t)| \leqq \frac{L_1 \ln n + L_2}{n^{r+\alpha-\varepsilon}}, \tag{34}$$

где ε — произвольное достаточно малое положительное число, а L_i — здесь (и в дальнейшем) — положительные постоянные, не зависящие от n.

Покажем, что в (34) можно положить $\varepsilon=0$. С этой целью, учитывая формулы (23), во множестве $X=Y$ (см. пункт 2°) или $X=Y=H_\alpha(0<\alpha<1)$ введем норму соотношением

$$\|x\| = \|x^+\|_C + \|x^-\|_C = \max_{t\in j} x^+(t) + \max_{t\in j} x^-(t). \tag{35}$$

Тогда получим соответственно полное или неполное пространство X, которое, следуя В. В. Иванову [11], обозначим через W.

В дальнейшем нам понадобится следующая (см. [12] и [13])

Лемма. Для любой функции $x \in H_\alpha^{(r)}$ $(r \geqq 0, 0<\alpha \leqq 1)$ справедливы оценки:

$$\|P_n x\|_W \leqq (L_3 \ln n + L_4) \max_{0\leqq k\leqq 2n} x(t_k), \tag{36}$$

$$\|x-P_n x\|_W \leqq (L_5 \ln n + L_6) E_n(x)_W, \tag{37}$$

$$E_n(x)_W \leqq L_7 \max_{0\leqq k\leqq r} [M(x_s^{(k)}) + H(x_s^{(k)};\ \alpha)] \cdot n^{-r-\alpha}, \tag{38}$$

где $E_n(x)_W$ — наилучшее приближение функции $x=x(t)=x(e^{is})$ в метрике пространства W посредством полиномов вида (20).

Отметим, что оценки (36) и (37) доказаны В. В. Ивановым (см., напр., [13]), при этом для постоянных в них получены весьма точные оценки сверху; оценку (38) можно найти с помощью результатов работ [12] и [13], причем постоянная L_7 не зависит от $x(t)$.

Теперь из соотношений (27), (35) и (36) находим

$$\|\hat{K}\hat{x}-PK\hat{x}\| \leqq \lambda \|P\|_{C\to W} \cdot \|U\rho_\tau(h\hat{x})\|_C \leqq 2\lambda \|P\|_{C\to W} \cdot E_n^\tau(\tau h)_C \cdot \|\hat{x}\|_C, \tag{39}$$

где $E_n^\tau(\tau h)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $\tau h(t,\tau)$

по переменной τ полиномами вида (20). Поэтому (см., напр., [12]) из (3.9) для любого $\hat{x} \in \hat{X}$ следует оценка

$$\|\hat{K}\hat{x}-P\hat{K}\hat{x}\|_W \leq \frac{L_8 \ln n + L_9}{n^{r-\alpha}} \|\hat{x}\|_W = \varepsilon_1 \|\hat{x}\|_W. \tag{40}$$

Проверка условия II здесь, в отличие от пункта 3⁰, представляет значительные трудности, которые связаны со способом нормировки пространства $X=W$. Пусть ψ_n и φ_n из (28) — полиномы наилучшего приближения в метрике W. Тогда, используя соответствующий результат из (11) и лемму, можно получить (после громоздких преобразований) следующую оценку $\varepsilon_2 = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$; если же вместо условия II будем пользоваться условием II′ (см. [1]), то после аналогичных преобразований получим $\varepsilon_2' = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$. Отсюда и из (40) следует, что условие IV из § 1 выполняется с $\varepsilon_4 = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$. Однако таким способом по существу удается определить лишь порядки величин ε_2, ε_2' и ε_4 относительно n. Для получения большей точности нужно использовать более точные оценки, что в случае пространства $X=W$ сопряжено с излишней громоздкостью вычислений. Поэтому в этом случае полезным может оказаться следующий способ исследования.

Суть этого способа состоит в использовании полученных в пункте 3⁰ результатов. Поскольку система (21) имеет единственное решение при любой правой части для всех n, удовлетворяющих неравенству (32), то оператор $\hat{K}$ имеет линейный обратный $\hat{K}^{-1}$, ограниченный вместе с ростом n (впрочем, это утверждение следует также из теорем 1 и 2 с учетом замечания 1⁰ из § 1). Теперь с помощью оценки (8) находим (см. также [1])

$$\|x^*-x_n^*\| \leq [\varepsilon_1(1+\varepsilon_3)\|\hat{K}^{-1}\| + \varepsilon_3(1+\|P\|\|K-\hat{K}^{-1}\|)]\|x^*\|, \tag{41}$$

где ε_3 определяется из условия

III. $$\|x^*-\hat{x}\| \leq \varepsilon_3 \|x^*\| \quad (\hat{x} \in \hat{X}).$$

Пусть $\hat{x}=x_n$ — полином наилучшего приближения степени n для решения уравнения (19) $x^*(t)$ в метрике пространства W. Так как (см. [9]) $x^*(t) \in H_\alpha^{(r)}$ $(r \geq 0,\ 0<\alpha<1)$, то из неравенств (40), (41) и из леммы находим требуемое соотношение[1]

$$|x^*(t)-x_n^*(t)| \leq \|x^*-x_n^*\|_W \leq \frac{L_{10} \ln n + L_{11}}{n^{r+\alpha}} \quad (t \in \gamma,\ r \geq 0,\ 0<\alpha \leq 1). \tag{42}$$

Заметим, что формулы (41) и (42) могут служить основой для получения эффективной оценки погрешности.

5⁰. Следует отметить, что в случае ненулевого индекса имеют место результаты (см. [5]), аналогичные приведенным в предыдущих

[1] При $\alpha=1$ необходимы дополнительные рассуждения.

пунктах. Кроме того, примерно такие же результаты получаются также при применении аппроксимации интерполяционными полиномами одного специального вида (см. теорему 2 из [6]).

Заметим также, что из предложенного выше (и в [5]) способа обоснования метода механических квадратур следует обоснование метода коллокации (совпадения или же смешенного метода) для с. и. у. (19) в пространствах $X=H_\beta$ и $X=W$. Действительно, в случае метода коллокации условие I выполняется всегда с $\varepsilon_1=0$, а условия II (или же II′) и III сохраняются без всяких изменений (см. [1]). В связи с этим следует отметить, что другим способом обоснование метода коллокации впервые было получено В. В. Ивановым (см. 11]).

Отметим, наконец, что если с. и. у. (19) хорошо обусловлено, то, как следует из результатов § 2 и из теоремы 8, хорошо обусловленной будет также система алгебраических уравнений (21).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук профессору Б. Х. Сендову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев, Б. Г.: Некоторые вопросы теории приближенных методов, I. „Известия вузов. Математика“, № 9(76), 1968, 16—28.
2. Габдулхаев, Б. Г.: Некоторые вопросы теории приближенных методов, II. „Известия вузов. Математика“, № 10 (77), 1968, 21—29.
3. Канторович, Л. В., Акилов, Г. П.: Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
4. Халмош, П.: Конечномерные векторные пространства. М., Физматгиз, 1963.
5. Габдулхаев, Б. Г.: Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Докл. АН СССР, 179, № 2, 1968, 260—263.
6. Габдулхаев, Б. Г.: Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 179, № 3, 1968, 515—517.
7. Габдулхаев, Б. Г.: Об одном прямом методе решения интегральных уравнений. „Известия вузов. Математика“, № 3 (46), 1965, 51—60.
8. Березин, И. С., Жидков, Н. П.: Методы вычислений, том I. М., „Наука“, 1966.
9. Мусхелишвили, Н. И.: Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
10. Габдулхаев Б. Г.: Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов. Сб. „Функциональный анализ и теория функций“, № 4. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1967, 54—74.
11. Иванов, В. В.: Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Сб. „Исследования по современным проблемам ТФКП“, М., 1961, 439—450.
12. Ахиезер, А. И.: Лекции по теории аппроксимации. М., „Наука“, 1965.
13. Иванов, В. В., Задирака, В. К.: Некоторые новые результаты в теории аппроксимации. Сб. „Вычислительная математика“. Изд-во Киевского ун-та, К., 1966, вып. 2, 3—30.

Постъпила на 2. VII. 1969 г.

QUELQUES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES MÉTHODES APPROXIMATIVES, III.

B. G. Gabdoulhaev

(RÉSUMÉ)

Ici on donne une série de résultats de la théorie générale des méthodes approximatives de l'analyse. On établit des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions approximatives, on en démontre la convergence. On étudie la dépendance entre les nombres du conditionnement des équations fonctionnelles exactes et approximatives.