ВЪРХУ ЕДНА ФОРМА НА УСЛОВИЯТА ЗА ПОЗИТИВНОСТ

Димитричка Шопова

Нека R е множеството от всички функции $f(t)$, дефинирани върху абелева група G, стойностите на които са комплексни числа.

Функцията $f(t)$ се нарича позитивна, ако при всяко цяло положително число n, при всеки избор на елементите $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ от G и при всеки избор на комплексните числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ са изпълнени неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i - \xi_k) \geqq 0. \tag{1}$$

Известно е, че когато G е локално компактна абелева група, съществуват позитивни функции, които не се анулират тъждествено. Такива са например функциите

$$f(t) = \int \varphi(s) \varphi(t+s) ds,$$

където интегралът е инвариантен, а функцията $\varphi(s)$ е финитна.

Има обаче абелеви групи, които не са локално компактни, но в които все пак има позитивни функции, които не се анулират тъждествено. Например нека G е линейно пространство и $f(t)$ да е линеен и реален функционал, дефиниран в G. Тогава e^{if} е позитивна функция. И наистина при всеки избор на елементите $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ от G и на комплексните числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k e^{if(\xi_i - \xi_k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k e^{if(\xi_i)} e^{-if(\xi_k)}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i e^{if(\xi_i)} \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{\eta_k e^{if(\xi_k)}} \right] \geqq 0.$$

Тогава и $\sum_{i=1}^{n} a_\nu e^{if_\nu(t)}$ са позитивни, щом $a_\nu \geqq 0$, когато $f_\nu(t)$ са реални линейни функционали.

В тази работа ние си поставяме за цел да дадем на дефиницията за позитивност една друга еквивалентна форма, в която участвуват по-малко параметри. Тази дефиниция, както и обичайната, не използува никакви топологични понятия. Поради това няма да въвеждаме в G никаква топология.

Разглеждаме следните оператори, дефинирани в R

$$l_{\theta,h}(f)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{4}e^{i\theta}f(t+h)+\frac{1}{4}e^{-i\theta}f(t-h),$$

където h е фиксиран произволен елемент от G, а θ е произволна реална константа.

Ще покажем, че за да бъде една функция позитивна, необходимо и достатъчно е тя да удовлетворява неравенствата

$$l_{\theta_1,h_1}\, l_{\theta_2,h_2}\dots l_{\theta_n,h_n}(f)\geqq 0 \tag{2}$$

при $t=0$ за всяко n цяло неотрицателно число, при всеки избор на елементите $h_1, h_2,\dots, h_n$ от G и при всеки избор на реалните числа $\theta_1, \theta_2,\dots, \theta_n$.

Необходимостта се установява с непосредствено пресмятане. Напротив, нашето доказателство за достатъчност се основава на аксиомата за изборите.

Първо ще докажем, че условието (2) е необходимо, за да бъде една функция позитивна. Разбира се, не можем да ползваме теоремата на Бохнер, защото нито групата G е непременно локално компактна, нито функцията $f(t)$ е задължена да бъде непрекъсната. Ще разсъждаваме така: ако $f(t)$ е позитивна функция, то и $l_{\theta,h}(f)$ е позитивна, т. е. при произволни елементи $\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n$ от G и произволни комплексни числа $\eta_1, \eta_2,\dots, \eta_n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_k\left[\frac{1}{2}f(\xi_i-\xi_k)+\frac{1}{4}e^{i\theta}f(\xi_i-\xi_k+h)+\frac{1}{4}e^{-i\theta}f(\xi_i-\xi_k-h)\right]\geqq 0.$$

За да докажем това, ще положим

$$\eta_i'=\frac{1}{2}\eta_i;\quad \eta_{i+n}'=\frac{1}{2}e^{i\theta}\eta_i,\quad i=1, 2,\dots, n,$$

$$\xi_i'=\xi_i;\quad \xi_{i+n}'=\xi_i+h,\quad i=1, 2,\dots, n.$$

От позитивността на $f(t)$ имаме

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \eta_i' \bar{\eta}_k' f(\xi_i' - \xi_k') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i - \xi_k)$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-i\theta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i - \xi_n - h) + \frac{1}{4} e^{i\theta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i + h - \xi_k)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i - \xi_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_i \bar{\eta}_k l[f(\xi_i - \xi_k)].$$

От доказаното следва, че щом $f(t)$ е позитивна, то и

$$\varphi(t) = l_{\theta_1 h_1} l_{\theta_2 h_2} \ldots l_{\theta_n h_n}(f)$$

е позитивна.

От позитивността на $\varphi(t)$ следва, че $\varphi(0) \geqq 0$, т. е. че $f(t)$ удовлетворява неравенствата (2).

Сега ще покажем, че условието (2) е достатъчно, за да бъде $f(t)$ позитивна.

Нашето доказателство се основава на теоремата на Креин и Милман.

Предварително ще установим, че ако една функция $f(t)$ удовлетворява неравенствата (2), то

$$f(0) \geqq 0,$$

$$f(-t) = \overline{f(t)},$$

$$f(t) \leqq f(0).$$

И наистина неравенствата (2) за $n=0$ дават

$$f(0) \geqq 0.$$

Същите неравенства (2) за $n=1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = 0$ дават

$$\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{4} f(h) + \frac{1}{4} f(-h) \geqq 0,$$

$$\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{4} i f(h) - \frac{1}{4} i f(-h) \geqq 0.$$

Следователно числата $f(h) + f(-h)$ и $i[f(h) - f(-h)]$ са реални. Тъй че $f(h)$ и $f(-h)$ са конюговани за всяко h. Тогава можем да пишем

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{4}e^{i\theta}f(h)+\frac{1}{4}e^{-i\theta}f(-h)$$

$$=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}R[e^{i\theta}f(h)]\geqq 0$$

за всяко $h \in G$ и θ — реално число.

Нека

$$f(h)=|f(h)|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Да вземем $\theta=\pi-\varphi$. Тогава

$$R[e^{i\theta}f(h)]=-|f(h)|.$$

Следователно

$$f(0)\geqq |f(h)|$$

за всяко $h \in G$.

С това въпросните свойства са доказани.

Сега да разгледаме множеството M от функции, принадлежащи на R, които удовлетворяват неравенствата (2) и условието

$$f(0)\leqq 1.$$

Според теоремата на Тихонов множеството M е компактно спрямо топологията на обикновената сходимост.

Да потърсим екстремните елементи на M.

Нека $f(t) \in M$ и $f(0)\neq 0$.

Избираме h произволно в G и след това вземаме θ така, че числото $x=e^{i\theta}$ да не удовлетворява никое от уравненията

$$\varepsilon f(h)x^2+2f(0)x\pm\varepsilon f(-h)=0,$$

където $\varepsilon=\pm 1$; $\pm i$. Това очевидно може да се направи, защото $f(0)\neq 0$.

Да разгледаме равенствата

$$(3)\quad \begin{aligned} f(t)&=p_1\frac{4f(0)}{2f(0)+e^{i\theta}f(h)+e^{-i\theta}f(-h)}l_{\theta h}(f)+q_1\frac{4f(0)[f(t)-l_{\theta h}(f)]}{2f(0)-e^{i\theta}f(h)-e^{-i\theta}f(-h)},\\ f(t)&=p_2\frac{4f(0)\,l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)}{2f(0)+ie^{i\theta}f(h)-ie^{-i\theta}f(-h)}+q_2\frac{4f(0)[f(t)-l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)]}{2f(0)-ie^{i\theta}f(h)+ie^{-i\theta}f(-h)},\end{aligned}$$

където

$$p_1=\frac{2f(0)+e^{i\theta}f(h)+e^{-i\theta}f(-h)}{4f(0)},\quad q_1=\frac{2f(0)-e^{i\theta}f(h)-e^{-i\theta}f(-h)}{4f(0)},$$

$$p_2=\frac{2f(0)+ie^{i\theta}f(h)-ie^{-i\theta}f(-h)}{4f(0)},\quad q_2=\frac{2f(0)-ie^{i\theta}f(h)+ie^{-i\theta}f(-h)}{4f(0)}.$$

При направения избор на θ знаменателите на тези изрази са различни от нула. Същевременно

$$p_1>0,\quad q_1>0,\quad p_1+q_1=1,$$

$$p_2>0,\quad q_2>0,\quad p_2+q_2=1.$$

От друга страна, функциите

$$\frac{4f(0)\,l_{\theta h}(f)}{2f(0)+e^{i\theta}f(h)+e^{-i\theta}f(-h)},\quad \frac{4f(0)[f(t)-l_{\theta h}(f)]}{2f(0)-e^{i\theta}f(h)-e^{-i\theta}f(-h)},$$

$$\frac{4f(0)\,l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)}{2f(0)+if(h)e^{i\theta}-ie^{-i\theta}f(-h)},\quad \frac{4f(0)[f(t)-l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)]}{2f(0)-ie^{i\theta}f(h)+ie^{-i\theta}f(-h)}$$

са от M. И наистина, щом $f(t)$ удовлетворява неравенствата (2), то и $l_{\theta,h}(f)$ и $l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)$ ще ги удовлетворява. Също и функцията

$$f(t)-l_{\theta h}(f)=f(t)-\frac{1}{2}f(t)-\frac{1}{4}e^{i\theta}f(t+h)-\frac{1}{4}e^{-i\theta}f(t-h)=l_{\theta+\pi,h}(f)$$

ще ги удовлетворява. Същото се отнася и за функцията

$$f(t)-l_{\theta-\frac{\pi}{2},h}(f)=l_{\theta+\frac{3}{2}\pi,h}(f).$$

Тъй че и интересуващите ни функции удовлетворяват неравенствата (2), защото се различават от посочените с положителен множител. Очевидно те изпълняват и условието $f(0)\leqq 1$.

Нека $f(t)$ да е екстремен елемент на M. Тогава от равенствата (3) и (4) получаваме

$$f(t)=\frac{4f(0)\,l_{\theta,h}(f)}{2f(0)+e^{i\theta}f(h)+e^{-i\theta}f(-h)}$$

и

$$f(t)=\frac{4f(0)\,l_{\theta+\frac{\pi}{2},h}(f)}{2f(0)+ie^{i\theta}f(h)-ie^{-i\theta}f(-h)}.$$

Тъй че

$$e^{i\theta}f(t)f(h)+e^{-i\theta}f(t)f(-h)=e^{i\theta}f(0)f(t+h)+e^{-i\theta}f(0)f(t-h),$$

$$ie^{i\theta}f(t)f(h)-ie^{-i\theta}f(t)f(-h)=ie^{i\theta}f(0)f(t+h)-ie^{-i\theta}f(0)f(t-h).$$

И следователно

$$f(t)f(h)=f(0)f(t+h) \tag{5}$$

за всяко t и h от G.

В случай че $f(0)=0$, от неравенството $f(t)\leqq f(0)$ заключаваме, че $f(t)=0$ за всяко $t\in G$ и следователно равенството (5) е вярно винаги щом $f(t)$ е екстремен елемент на M. При това в случая $f(0)\neq 0$, $f(0)=1$. И наистина да допуснем, че $0<f(0)<1$. Разглеждаме равенството

$$f(t)=f(0)\frac{f(t)}{f(0)}+(1-f(0)).\,0.$$

Очевидно $\frac{f(t)}{f(0)}\in M$ и $0\in M$. От друга страна, числата $f(0)$ и $1-f(0)$ са положителни. Следователно, ако $f(t)$ е екстремен елемент на M, ще имаме $f(t)\equiv 0$, което противоречи на допускането $f(0)>0$. Тъй че равенството (5) добива вида

$$f(t)f(h)=f(t+h).$$

С помощта на това равенство лесно се вижда, че екстремните елементи на M удовлетворяват неравенствата (1), т. е. са позитивни функции. И наистина при всеки избор на комплексните числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ и елементите $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ от G

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_k f(\xi_i-\xi_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_k f(\xi_i)f(-\xi_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i\bar{\eta}_k f(\xi_i)\overline{f(\xi_k)}=\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i f(\xi_i)\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\overline{\eta_k f(\xi_k)}\right]=\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i f(\xi_i)\right|^2\geqq 0.$$

От друга страна, множеството на позитивните функции е изпъкнало и затворено относно обикновената сходимост и следователно съгласно теоремата на Креин и Милман всеки елемент на M е позитивен.

Условието $f(0)\leqq 1$ не е съществено, защото ако $f(0)$ е произволно положително число, то $f(t)\cdot\frac{1}{f(0)}\in M$ и следователно $f(t)$ ще е позитивна функция.

С това доказателството, че функциите, които удовлетворяват неравенствата (2), са позитивни, е завършено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bochner, S.: Monotone Funktionen, Stieltjessches Integral und harmonische Analyse. Math. Ann., 108 (1933), 378—410.

Постъпила на 14. X. 1969 г.

ON THE CONDITION OF POSITIVITY

D. Shopova

SUMMARY

Let $f(t)$ be a map of the commutative topological group G into the field C of the complex numbers and let

$$l_{\theta h}(f)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{4}e^{i\theta}f(t+h)+\frac{1}{4}e^{-i\theta}f(t-h)$$

where $\theta \in R$ (R is the field of the real numbers), $h,\ t \in G$, be another map of such kind.

In this paper is proved that the conditions

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i \bar{\eta}_k f(\xi_i-\xi_k)\geqq 0$$

and

$$l_{\theta_1 h_1}\, l_{\theta_2 h_2}\ldots l_{\theta_n h_n}(f)\geqq 0, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

where $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in C$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in G$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in G$ and $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in R$ are arbitrary, are equivalent.