ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Благовест Сендов и Васил А. Попов

В этой работе рассмотрим приближение функций многих переменных, заданных на единичном кубе в m-мерном евклидовом пространстве, алгебраическими многочленами в метрике Хаусдорфа.

Расстояние между функциями, которое используется в этой работе, впервые было рассмотрено в [1]. Оно названо расстояние Хаусдорфовского типа, или коротко метрика Хаусдорфа, так как определяется следующим образом:

Каждой функции $f(x)$, заданной на интервале $\Delta = \Gamma[a, b]$, сопоставляется некоторое замкнутое точечное множество $\bar{f}$ на плоскости, которое называется дополненным графиком функции $f(x)$. В [1] дополненный график функции $f(x)$ определен следующим образом: рассматривается совокупность F_1 всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с интервалом Δ. Полагаем

$$\bar{f} = \bigcap_{g \in F_1,\, f \subset g} g,$$

где f обозначает график функции $f(x)$.

Множество всех замкнутых ограниченных множеств в метрическом пространстве E можно метризовать при помощи метрики Хаусдорфа [2]:

$$r(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y),\ \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \rho(x, y)\},$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние в E.

Если взять метрику на плоскости

$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

и определить расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ заданными на Δ через

$$r(f, g) = r(\bar{f}, \bar{g}),$$

то получаем расстояние, рассматриваемое в [1].

Отметим, что специальное расстояние между точечными замкнутыми ограниченными множествами на плоскости рассматривал раньше Хаусдорфа Помпею [3].

При помощи процедуры, описанной выше, можно получать разные расстояния Хаусдорфовского типа, если менят расстояние $\rho(x, y)$ в E или замкнутое точечное множество f — дополненный график функции $f(x)$. Если например в качестве дополненным графиком функции $f(x)$ возьмем наименьшее замкнутое множество $\tilde{f}$, которое содержит график функции $f(x)$, то получим расстояние, которое порождает топологию Скорохода [4]. Скороход использовал эту топологию в теории вероятностей (см. тоже [5]).

Вопросы, связанные с аппроксимацией функции и множеств в метрике Хаусдорфа подробно рассмотрены в [6].

§ 1

Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике Хаусдорфа впервые было рассмотрено в [7]. Там доказано, что если функция $f(x)$ задана на отрезке Δ и $\max\limits_{x \in \Delta} f(x) \leqq M$, то наилучшее приближение $E_{n,r}(f)$ функции $f(x)$ алгебраическими многочленами n-ной степени в метрике Хаусдорфа удовлетворяет условию

$$E_{n,r}(f) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{1}$$

Позже (1) было уточнено [6], а именно

$$E_{n,r}(f) = 7\ (b-a)\ \frac{\ln 2\,M\,n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \tag{2}$$

В [8] доказано, что для наилучшего приближения $E_{n,r}(f)$ в метрике Хаусдорфа функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ m переменных, заданной на единичном кубе в m-мерном евклидовом пространстве алгебраическими многочленами n-ной степени выполнен аналог неравенства (1)

$$E_{n,r}(f) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Здесь мы улучшим немного оценка (2), заменяя константу 7 на 6 и докажем ее аналог для функции m-переменных (Теорема 1). Константа 6 тоже неокончательна. Из теоремы 2 видно, что ее нельзя заменить на константу меньше $\frac{1}{2}$.

Используемый метод является улучшением методов из [6] и [7].

§ 2

Хаусдорфовое расстояние между двумя замкнутыми и ограниченными множествами A и B в m-мерном евклидовом пространстве E^m определим через

$$r(A, B) = \max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} \rho(a, b), \max_{a \in B} \min_{b \in A} \rho(a, b)\},$$

где

$$\rho(a, b) = \max\{|a_1 - b_1|, \ldots, |a_m - b_m|\}; \quad a = (a_1, \ldots, a_m), \quad b = (b_1, \ldots, b_m)$$

Пусть K—компакт в E^m. Обозначим через F_k множество всех ограниченных и замкнутых точечных множеств F в E^{m+1} со свойствами:

1. Если $x(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in F$, то $x^*(x_1, \ldots, x_m) \in K$ и для каждой точки $x^*(x_1, \ldots, x_m) \in K$ существует точка $x(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in F$.

2. F выпукло относительно оси x_{m+1}, т. е. если $x'(x'_1, \ldots, x'_{m+1}) \in F$ и $x''(x''_1, \ldots, x''_{m+1}) \in F$, то $\alpha x' + (1-\alpha) x'' \in F$ для каждого α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Каждой функции $f(x)$, заданной на k, сопоставим точечное множество $\bar{f}$ — дополненный график $f(x)$:

$$\bar{f} = \bigcap_{g \in F_k,\, f \subset g} g,$$

где f обозначает график функции $f(x)$, т. е. точку $(x_1, \ldots, x_m, f(x))$ в $(m+1)$-мерном евклидовом пространстве.

Очевидно, что $\bar{f} \in F_k$ и если $f(x)$ — непрерывная функция, то $\bar{f} = f$. Хаусдорфовое расстояние между двумя ограниченными функциями $f(x)$ и $g(x)$, заданных на k, определяется как хаусдорфовое расстояние между их дополненными графиками:

$$r(f, g) = r(\bar{f}, \bar{g}).$$

В дальнейшем понадобится следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть $\Sigma = \{\sigma_i, i = 1, \ldots, l\}$ — покрытие компакта K кубиками со стороной не больше δ. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на K, удовлетворяют неравенствам

$$\max_{0 \leq i \leq l} \left| \sup_{x \in \sigma_i} f(x) - \sup_{x \in \sigma_i} g(x) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\max_{0 \leq i \leq l} \left| \inf_{x \in \sigma_i} f(x) - \inf_{x \in \sigma_i} g(x) \right| \leq \varepsilon$$

и компакт K—связный, то

$$r(f, g) \leq \max\{\delta, \varepsilon\}.$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что так как компакт K—связный, то каждое множество $F \in F_k$ тоже связный компакт, и следовательно, дополненный график каждой ограниченной функции на K—связный компакт.

Пусть теперь точка $x(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in \bar{f}$. Тогда $(x_1, \ldots, x_m) \in \sigma_i$ для некоторого i и

$$\min_{x \in \sigma_i} f(x) \leqq x_{m+1} \leqq \max_{x \in \sigma_i} f(x).$$

Пользуясь условием леммы и тем, что g—связный компакт, получаем, что существует точка $y(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) \in \bar{g}$, для которой $(y_1, \ldots, y_m) \in \sigma_i$ и $x_{m+1} - y_{m+1} \leqq \varepsilon$.

Следовательно $\rho(x, y) \leqq \max\{\delta, \varepsilon\}$ и

$$\max_{x \in \bar{f}} \min_{y \in \bar{g}} \rho(x, y) \leqq \max\{\delta, \varepsilon\}. \tag{3}$$

Аналогично доказывается

$$\max_{x \in \bar{g}} \min_{y \in \bar{f}} \rho(x, y) \leqq \max\{\delta, \varepsilon\}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует лемма.

Всюду в дальнейшем компакт K будет единичный куб Δ_m в m-мерном евклидовом пространстве.

Обозначим:

$$\delta_{i_1 \ldots i_m} = \left\{(x_1, \ldots, x_m) : \frac{i_j - 1}{k} \leqq x_j \leqq \frac{i_j}{k};\ j = 1, \ldots, m\right\},$$

где i_j, $j = 1, \ldots, m$ — натуральные числа; $1 \leqq i_j \leqq k$, δ_m^k — множество всех таких $\delta_{i_1 \ldots i_m}$.

Мы будем пользоваться следующей модификации леммы 1:

Лемма 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на δ и удовлетворяют неравенства:

$$\max_{\delta \in \delta_m^k} \left| \sup_{x \in \delta} f(x) - \sup_{x \in \delta} g(x) \right| \leqq \varepsilon,$$

$$\max_{\delta \in \delta_m^k} \left| \inf_{x \in \delta} f(x) - \inf_{x \in \delta} g(x) \right| \leqq \varepsilon.$$

Тогда $r(f, g) \leqq \max\left\{\frac{1}{k}, \varepsilon\right\}$.

§ 3

Обозначим через H_n^m множество всех алгебраических многочленов m переменных n-ной степени, через $F_{\Delta_m}^M$ множество всех елементов

$F \in F_{\Delta_m}$, для которых для каждой точки $(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ имеет место $|x_{m+1}| \leqq M$, $M > 0$.

Рассмотрим наилучшее приближение элемента $F \in F^M_{\Delta_m}$ алгебраическими многочленами n-ной степени в метрике Хаусдорфа:

$$E_{n,r}(F) = \inf_{P \in H^m_n} r(F, P),$$

где P — график многочлена $P(x)$ на кубе Δ_m.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. Если $F \in F^M_{\Delta_m}$, то

$$E_{n,r}(F) = 6\, m \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Имея ввиду характер оценки в теореме 1, достаточно доказать ее для больших n. Докажем следующую оценку, которая более точна чем (5):

Если $F \in F^M_{\Delta_m}$ и $M \geqq 1$, то

$$E_{n,r}(F) \leqq 6\, m \frac{\ln 2\, M n}{n} + C(m, M) \frac{\ln^2 n}{n^2}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что n настолько большое, что имеют место неравенства:

$$0 \leqq \frac{3 \ln 2\, M n}{n-2} < 1; \quad \frac{8}{\ln 2\, M n} < 1.$$

Положим $k = \left[\dfrac{n-1}{6 \ln 2\, M n}\right]$, тогда

$$\frac{6 \ln 2\, M n}{n-2} \leqq \frac{1}{k} \leqq \frac{6 \ln 2\, M n}{n} + C(M) \frac{\ln^2 n}{n^2}, \tag{7}$$

где константа $C(M)$ зависит только от M.

Пусть функция $f(x)$ задана на Δ_m и $\max_{x \in \Delta_m} |f(x)| \leqq M$. Покажем, что для достаточно больших n существует многочлен $P_m(x) \in H^m_{nm}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\max_{\delta \in \delta^k_m} \left| \sup_{x \in \delta} P_m(x) - \sup_{x \in \delta} f(x) \right| \leqq \frac{m}{n}, \\ &\max_{\delta \in \delta^k_m} \left| \inf_{x \in \delta} P_m(x) - \inf_{x \in \delta} f(x) \right| \leqq \frac{m}{n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда из (7), (8) и леммы 1 вытекает теорема 1. Действительно

$$E_{nm,r}(f) \leqq \max\left\{\frac{6\ln 2Mn}{n} + C(M)\frac{\ln^2 n}{n^2},\ \frac{m}{n}\right\},$$

что дает

$$E_{nm,r}(f) \leqq 6\frac{\ln 2Mn}{n} + \bar{C}(m, M)\frac{\ln^2 n}{n^2}.$$

Пусть задано некоторое натуральное число l. Выберем n так, что $nm \leqq l \leqq (n+1)m$. Имеет место

$$E_{l,r}(f) \leqq E_{nm,r}(f) \leqq \frac{6\ln 2Mn}{n} + \bar{C}(m, M)\frac{\ln^2 n}{n^2},$$

$$\leqq 6m\frac{\ln 2Ml}{l} + C(m, M)\frac{\ln^2 n}{n^2},$$

где константа $C(m, M)$ зависит только от m и M. Так как многочлены плотны в F_{1m} [8], из последнего следуют (5) и (6).

Существование многочлена $P_m(x) \in H^m_{nm}$ со свойствами (8) докажем по индукции.

Пусть $m=1$. Рассмотрим алгебраический многочлен $A_{n,\lambda}(x) \in H^1_n$:

$$A_{n,\lambda}(x) = (-1)^s \frac{2}{n^2} T_s\left(\frac{2x^2}{1-\lambda^2} - \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right), \tag{9}$$

где $0 < \lambda < 1$, $s = \left[\frac{n}{2}\right]$ и $T_s(x) = \cos(s \arccos x)$ — многочлен Чебышева. Очевидно

$$A_{n,\lambda}(0) = \frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^s + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^s\right]. \tag{10}$$

Пользуясь неравенством $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \geqq l^{2\lambda}$, где $0 < \lambda < 1$, получаем

$$A_{n,\lambda}(0) \geqq \frac{1}{n^2} l^{2\lambda s}. \tag{11}$$

Обозначим через $A_n(x)$ многочлен $A_{n,\lambda}(x)$ для $\lambda = \lambda_0 = \frac{\ln(2Mn^2)}{n-1} < 1$. Так как $|T_s(x)| \leqq 1$ для $|x| \leqq 1$, то

$$\begin{aligned} &|A_n(x)| \leqq \frac{2}{n^2} \text{ для } \lambda_0 \leqq x \leqq 1, \\ &A_n(x) > 0 \quad \text{для } x \leqq \lambda_0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$A_n(0) > 2M.$$

Кроме того рассмотрим интеграл многочлена $A_{n,\lambda}(x)$:

$$B_{n,\lambda}(x) = \int_{-1}^{x} A_{n,\lambda}(t)\,dt.$$

$B_{n,\lambda}(x)$, является многочленом $(n+1)$-вой степени. Исследуем поведение $B_{n,\lambda}(x)$, когда $-1 \leqq x \leqq 1$. Для этого оценим

$$\alpha_\lambda = \int_{-\lambda}^{\lambda} A_{n,\lambda}(t)\,dt$$

снизу при предположении, что λ достаточно мало. Имеем

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\left(\frac{1+\lambda^2-2x^2+2\lambda\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)}}{1-\lambda^2}\right)^s + \left(\frac{1+\lambda^2-2x^2-2\lambda\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)}}{1-\lambda^2}\right)^s\right]dx. \tag{13}$$

Если $0 \leqq \lambda \leqq \sqrt{2}-1$, получаем из (13):

$$\alpha_\lambda \geqq \frac{1}{n^2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\frac{1+\lambda+2\lambda\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)}-2x^2}{1-\lambda^2}\right)^s dx. \tag{14}$$

Имея ввиду, что $\sqrt{a} \geqq a$, если $0 \leqq a \leqq 1$, из (14) получаем

$$\alpha_\lambda \geqq \frac{1}{n^2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\frac{1+\lambda^2+2\lambda(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)-2x^2}{1-\lambda^2}\right)^s dx$$

$$> \frac{1}{n^2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\frac{(1+\lambda)^2-2x\left(1+\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\lambda^2}\right)^s dx = \beta_\lambda. \tag{15}$$

Найдем оценку снизу для β_λ. Для этого исследуем поведение функции $y=(a-bx^2)^s$, где $a>0$, $b>0$, в окрестности нуля. Имеем:

$$y''=2\,s\,b\,(a-bx^2)^{s-2}[(2\,s-1)\,bx^2-a],$$

следовательно если $x \leqq \sqrt{\dfrac{a}{b(2s-1)}}$, то $y'' \leqq 0$ и функция $y=(a-b\,s^2)^s$ — вогнута.

Отсюда и из (15), полагая $a=(1+\lambda)^2$, $b=2\left(1+\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)$ получаем, что подинтегральная функция в формуле (15) для β_λ вогнута в интервале $x \leqq \theta_\lambda=\sqrt{\dfrac{(1+\lambda^2)\lambda}{2(2\,s-1)(1+\lambda+\lambda^2)}}$ и если $\theta_\lambda \leqq \lambda$, то

$$\beta_\lambda \geqq \frac{\theta_\lambda}{n^2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^s. \tag{16}$$

Полагая теперь $\lambda=\lambda_1=\dfrac{\ln(2\,M\,n^3)}{2\,s}$, получаем

$$\theta_{\lambda_1} \geqq \sqrt{\frac{\ln(2\,M\,n^3)}{4\,s(2\,\delta-1)}} \geqq \frac{\ln(2\,M\,n^3)}{2\,s}. \tag{17}$$

Но для больших n из (17) получаем, что $\theta_{\lambda_1} \geqq \lambda_1$ и следовательно из (16) следует, что для больших n

$$\alpha_{\lambda_1} \geqq \frac{\theta_{\lambda_1}}{n^2}\left(\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)^s. \tag{18}$$

Но с другой стороны $\theta_{\lambda_1} \geqq \dfrac{1}{2\,s}$ для больших n и из (18), пользуясь снова неравенством $\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda} \geqq e^{2\lambda}$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, получаем, что

$$\alpha_{\lambda_1} \geqq \frac{1}{2s\,n^2}\,e^{2\lambda_1 s} = \frac{2\,M\,n^3}{2s\,n^2} \geqq 2\,M \tag{19}$$

для достаточно больших n.

В дальнейшем будем предполагать n так большое, что (19) выполняется.

Замечая, что если $\lambda_1 \leqq x \leqq 1$, то $A_{n,\lambda_1}(x) \leqq \dfrac{2}{n^2}$, получаем

$$\begin{aligned} &|B_{n,\lambda_1}(x)| \leqq \frac{2}{n^2} \quad \text{для} \quad -1 \leqq x \leqq -\lambda_1, \\ &B_{n,\lambda_1}(x)-B_{n,\lambda_1}(\lambda_1) \leqq \frac{2}{n^2} \quad \text{для} \quad \lambda_1 \leqq x \leqq 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что существует алгебраический многочлен $B_n(x) \in H_n^1$ такой, что

$$(21)\qquad \begin{aligned} &B_n(x) \leqq \frac{2}{n^2} \quad \text{для} \quad -1 \leqq x \leqq -\lambda^* = -\frac{\ln(2Mn^3)}{n-2}, \\ &2M - B_n(x) \leqq \frac{2}{n^2} \quad \text{для} \quad \lambda^* \leqq x \leqq 1, \\ &-\frac{2}{n^2} \leqq B_n(x) \leqq 2M + \frac{2}{n^2} \quad \text{для} \quad X \leqq \lambda^*. \end{aligned}$$

Обозначим: $x_i = \frac{i}{k}$; $y_i = f(x_i)$; $i = 0, \ldots, n$; $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим алгебраический многочлен n-ной степени:

$$P_1(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i B_n\left(x - \frac{2i-1}{2k}\right) + \sum_{i=1}^{k} a_i' A_n\left(x - \frac{3i-1}{3k}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} a_i'' A_n\left(x - \frac{3i-2}{3k}\right),$$

где $b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{2M}$.

Покажем, что можно выбрать коэффициенты a_i' и a_i'', $i = 1, \ldots, k$, так, чтобы $|a_i'| \leqq 1$, $|a_i''| \leqq 1$, $i = 1, \ldots, k$ и кроме того многочлен $P_1(x)$ удовлетворял (8).

Оценим $\sum_{i=1}^{k} b_i B_n\left(x - \frac{2i-1}{2k}\right)$ для $x \in \Delta_j$. Используя то, что $b_i \leqq 1$, выбор k и (21), получаем

$$y_{j-1} - y_0 - \frac{4(j-1)}{n^2} \leqq \sum_{i=1}^{j-1} b_i B_n\left(x - \frac{2i-1}{2k}\right) \leqq y_{j-1} - y_0 + \frac{4(j-1)}{n^2},$$

$$\sum_{i=j+1}^{k} b_i B_n\left(x - \frac{2i-1}{2k}\right) \leqq 4\frac{k-j}{n^2},$$

$$\min\{0, y_j - y_{j-1}\} - \frac{2}{n^2} \leqq B_n\left(x - \frac{2j-1}{2k}\right) \leqq \max\{0, y_j - y_{j-1}\} + \frac{2}{n^2}.$$

Окончательно, для $x \in \Delta_j$ имеем

$$\min\{y_{j-1}, y_j\} - y_0 - \frac{4k}{n^2} \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i B_n\left(x - \frac{2i-1}{2k}\right) \leqq \tag{22}$$

$$\max\{y_{j-1}, y_j\} - y_0 - \frac{4k}{n^2}.$$

Оценим остальные две суммы в выражении для $P_1(x)$ в интервале Δ_j, не принимая во внимании члены, которые содержат индекс j. Используя (12) и выбор k, получаем

$$\sum_{i=1}^{k}{}' a_i' A_n\left(x - \frac{3i-1}{3k}\right) \leqq \frac{2k}{n^2},$$

$$\sum_{i=1}^{k}{}' a_i'' A_n\left(x - \frac{3i-2}{3k}\right) \leqq \frac{2k}{n^2}. \tag{23}$$

Штрих в суммах означает, что пропущен j-тий член суммы.
Для $x \in \Delta_j$ и $a_j' = a_j'' = 0$ из (22) и (23) получаем

$$\min\{y_{j-1}, y_j\} - \frac{8k}{n^2} \leqq P_1(x) \leqq \max\{y_{j-1}, y_j\} + \frac{8k}{n^2}.$$

Заменяя k на $\dfrac{n-2}{6\ln 2Mn} > k$, получаем для $x \in \Delta_j$:

$$\min\{y_{j-1}, y_j\} - \frac{1}{n} \leqq P_1(x) \leqq \max\{y_{j-1}, y_j\} + \frac{1}{n}. \tag{24}$$

Отметим, что если a_j' растет от 0 до 1 и a_j'' остается фиксированным, то $\min\limits_{x \in \Delta_j} P_1(x)$ может увеличиться не больше чем на $\dfrac{2}{n^2}$, а если a_j' фиксировано, а a_j'' уменьшается с 0 до -1, то $\max\limits_{x \in \Delta_j} P_1(x)$ может уменьшиться не больше чем на $\dfrac{2}{n^2}$. Но если $a_j' = 1$, $a_j'' = -1$, мы имеем

$$P_1\left(\frac{3j-1}{3k}\right) > 2M + \min\{y_{j-1}, y_j\} - \frac{1}{n},$$

$$P_1\left(\frac{3j-2}{3k}\right) < -2M + \max\{y_{j-1}, y_j\} + \frac{1}{n}. \tag{25}$$

Так как $\max P_1(x)$ и $\min P_1(x)$ непрерывно зависят от a_j' и a_j'', то, имея ввиду сделанные замечания из (24) и (25), следует, что можно выбрать a_i' и a_i'' так, чтобы (8) было выполнено.

Таким образом теорема доказана для $m=1$.

Пусть теперь в силу индукционного предположения для каждой функции $g(x)$, заданной на Δ_{m-1}, $\max\limits_{x\in\Delta_{m-1}} g(x)|\leq M$, существует алгебраический многочлен $q(x)\in H^{m-1}_{n(m-1)}$ со свойствами:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\max_{\delta\in\delta^k_{m-1}} \left|\sup_{x\in\delta} g(x)-\sup_{x\in\delta} q(x)\right|\leq\frac{m-1}{n},\\ &\max_{\delta\in\delta^k_{m-1}} \left|\inf_{x\in\delta} g(x)-\inf_{x\in\delta} q(x)\right|\leq\frac{m-1}{n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$ заданной на Δ_m, $\max\limits_{x\in\Delta_m}|f(x)|\leq M$. Обозначим:

$$f_j(x_1,\ldots,x_{m-1})=f\left(x_1,\ldots,x_{m-1},\frac{j}{k}\right),\quad j=0,\ldots,k-1.$$

В силу предположения индукции (26) существуют алгебраические многочлены $q_j\in H^{m-1}_{n(m-1)}$ такие, что

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\max_{\delta\in\delta^k_{m-1}} \left|\sup_{x\in\delta} q_j(x)-\sup_{x\in\delta} f_j(x)\right|\leq\frac{m-1}{n},\\ &\max_{\delta\in\delta^k_{m-1}} \left|\inf_{x\in\delta} q_j(x)-\inf_{x\in\delta} f_j(x)\right|\leq\frac{m-1}{n} \end{aligned}$$

для каждого j, $j=0,\ldots,k-1$.

Построим алгебраический многочлен $P_m(x)\in H^m_{nm}$:

$$P_m(x)=q_0(x_1,\ldots,x_{m-1})+\sum_{j=1}^{k-1}{}' \frac{1}{2M} B_n\left(x_m-\frac{2j-1}{2k}\right)\{q_i(x)-q_{i-1}(x)\}$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{k-1}{}' a'_{i_1\ldots i_m} A^*_n(x-x'_{i_1\ldots i_m})+\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{k-1} a''_{i_1\ldots i_m} A^*_n(x-x''_{i_1\ldots i_m}),$$

где

$$A^*_n(x)=A_n(x_1)\quad A_n(x_2)\ldots A_n(x_m);$$

$$x'_{i_1\ldots i_m}=\left(\frac{3i_1+1}{3k},\ \frac{3i_2+1}{3k},\ldots,\frac{3i_m+1}{3k}\right);$$

$$x''_{i_1\ldots i_m}=\left(\frac{3i_1+2}{3k},\ \frac{3i_2+2}{3k},\ldots,\frac{3i_m+1}{3k}\right).$$

Покажем, что можно выбрать коэффициенты $a'_{i_1 \dots i_m}$ и $a''_{i_1 \dots i_m}$, $|a'_{i_1 \dots i_m}| \leqq 1$, $|a''_{i_1 \dots i_m}| \leqq 1$, $i_1, \dots, i_m = 0, \dots, k-1$, таким образом, что многочлен $P_m(x)$ удовлетворит (8).

Для этого оценим $P_m(x)$, когда $x \in \delta$.

$$\delta = \left\{ x : \frac{l_i}{k} \leqq x_i \leqq \frac{l_i+1}{k},\ i = 1, \dots, m \right\};\ 0 \leqq l_i \leqq k-1.$$

Используя (21), получаем

$$q_0(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2M} B_n\left(x_m - \frac{2j-1}{2k}\right) \{ q_i(x) - q_{i-1}(x) \}$$

$$-\left[\frac{B_n\left(x_m - \frac{2l_m+1}{2k}\right)}{2M} q_{l_m+1} + \left(1 - \frac{B_n\left(x_m - \frac{2l_m+1}{2k}\right)}{2M}\right) q_{l_m} \right] \leqq \frac{2(k-1)}{n^2}.$$

Так как $-\frac{1}{n^2} \leqq \frac{B_n\left(x_m - \frac{2l_m+1}{2k}\right)}{2M} \leqq 1 + \frac{1}{n^2}$, окончательно получаем

$$q_0(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2M} B\left(x_m - \frac{2j-1}{2k}\right) \{ q_j(x) - q_{j-1}(x) \}$$

(28)

$$-[\alpha q_{l_m+1} + (1-\alpha) q_{l_m-1}] \leqq \frac{2k}{n^2},$$

где α — некоторое число, $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

Так как очевидно

$$\sup_{x \in \delta} f(x) \geqq \max \{ \sup_{\substack{x_i \in \left[\frac{l_i}{k}, \frac{l_i+1}{k}\right] \\ i=1,\dots,m-1}} f_{l_m}(x), \sup_{\substack{x_i \in \left[\frac{l_i}{k}, \frac{l_i+1}{k}\right] \\ i=1,\dots,m-1}} f_{l_{m+1}}(x) \},$$

$$\inf_{x \in \delta} f(x) \leqq \min \{ \inf_{\substack{x_i \in \left[\frac{l_i}{k}, \frac{l_i+1}{k}\right] \\ i=1,\dots,m-1}} f_{l_m}(x), \inf_{\substack{x_i \in \left[\frac{l_i}{k}, \frac{l_i+1}{k}\right] \\ i=1,\dots,m-1}} f_{l_{m+1}}(x) \},$$

из (27) и (28) следует

$$\inf_{x \in \delta} f(x) - \left[\frac{m-1}{n} + \frac{2k}{n^2} \right] \leqq q_0(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2M} B_n\left(x_m - \frac{2j-1}{2k}\right)$$

(29)

$$\times \{ q_j(x) - q_{j-1}(x) \} \leqq \sup_{x \in \delta} f(x) + \left[\frac{m-1}{n} + \frac{2k}{n^2} \right].$$

Оценим сейчас остальные две суммы в $P_m(x)$, не принимая во внимании члены с индексом $l_1, \ldots, l_m$. Используя (12) и то, что $a'_{i_1 \ldots i_m} \leq 1$, $a''_{i_1 \ldots i_m} \leq 1$, получаем:

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i_1, \ldots, i_m=0}^{k-1}{}' a'_{i_1 \ldots i_m} A_n^*(x - x'_{i_1 \ldots i_m}) \leq (2^m - 1)\frac{k^m}{n^{2m}}, \\ &\sum_{i_1, \ldots, i_m=0}^{k-1}{}' a''_{i_1 \ldots i_m} A_n^*(x - x''_{i_1 \ldots i_m}) \leq (2^m - 1)\frac{k^m}{n^{2m}}. \end{aligned}$$

Здесь штрих в обеих суммах обозначает, что пропущен член с индексом $l_1, \ldots, l_m$.

Отметим теперь, что когда $a'_{l_1 \ldots l_m}$ меняется от 0 до 1, а $a''_{l_1 \ldots l_m}$ остается фиксированным, то $\min P_m(x)$ для $x \in \delta$ может уменьшиться только на $\frac{2}{n^{2m}}$, и если $a''_{l_1 \ldots l_m}$ меняется от 0 до -1, а $a'_{l_1 \ldots l_m}$ остается фиксированным, то $\max P_n(x)$ для $x \in \delta$ может увеличиться только на $\frac{2}{n^{2m}}$. С другой стороны, если $a'_{l_1 \ldots l_m} = 1$, то

$$(31)\qquad P_m(x'_{l_1 \ldots l_m}) > 2M - \left[2^m \frac{k^m}{n^{2m}} + \frac{m-1}{n} + \frac{2k}{n^2}\right] + \inf_{x \in \delta} f(x),$$

а если $a''_{l_1 \ldots l_m} = 1$, то

$$(32)\qquad P_m(x''_{l_1 \ldots l_m}) < -2M + \left[2^m \frac{k^m}{n^{2m}} + \frac{m-1}{n} + \frac{2k}{n^2}\right] + \sup_{x \in \delta} f(x).$$

Принимая во внимании (29) — (32), непрерывной зависимости

$$\min_{x \in \delta} P_m(x) \quad \text{и} \quad \max_{x \in \delta} P_m(x)$$

от $a'_{l_1 \ldots l_m}$ и $a''_{l_1 \ldots l_m}$ и выбор k получаем, что можем выбрать коэффициенты $a'_{i_1 \ldots i_m}$ и $a''_{i_1 \ldots i_m}$ так, что (8) выполняется.

Этим теорема 1 доказана.

Если мы рассматриваем не единичный куб Δ_m, а куб k со стороной a в m-мерном евклидовом пространстве, то, используя определение хаусдорфового расстояния, из теоремы 1 получаем

Теорема 1'. Пусть $F \in F_k^M$. Тогда

$$E_{n,r}(F) = 6\, m\, a \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

§ 4

Рассмотрим теперь функцию

$$\delta_M(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \neq 0\\ M, & \text{если} \quad x=0\end{cases};$$

в интервале $[-1,1]$, $M>0$.

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon>0$ существует натуральное $n(\varepsilon, M)$ такое, что если $n>n(\varepsilon, M)$, то

$$(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n} \leqq E_{n,r}(\delta_M) \leqq \frac{\ln n}{n-1}$$

и следовательно

$$E_{n,r}(\delta_M) \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Доказательство. В [7] доказано, что для $\delta_M(x)$ для каждого n существует единственный алгебраический многочлен $Q_n(x) \in H_n^1$ такой, что

$$E_{n,r}(\delta_M)=r(Q_n(x), \delta_M(x)).$$

Явный вид многочлена $Q_n(x)$ такой:

$$Q_n(x)=(-1)^s \lambda_n T_s\left(\frac{2x^2}{1-\lambda_n^2}-\frac{1+\lambda_n^2}{1-\lambda_n^2}\right),$$

где $T_s(x)=\cos(s \arccos x)$ — многочлен Чебышева, $s=\left[\frac{n}{2}\right]$ и константа λ_n определяется из условия

$$M-\lambda_n=\frac{\lambda_n}{2}\left[\left(\frac{1+\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)^s+\left(\frac{1-\lambda_n}{1+\lambda_n}\right)^s\right]. \tag{33}$$

Очевидно $\lambda_n=E_{n,r}(\delta_M)$.

Пользуясь снова неравенством $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \geqq e^{2\lambda}$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, получаем из (33):

$$M \geqq \frac{\lambda_n}{2} e^{2\lambda_n s}+\lambda_n. \tag{34}$$

Из (34) следует, что существует n_M такое, что для $n>n_M$ имеет место

$$\lambda_n \leqq \frac{\ln n}{2s}. \tag{35}$$

Действительно, полагая в (24) $\lambda_n = \frac{\ln n}{n}$, получаем

$$M \geqq \frac{\ln n}{4s} \cdot n + \frac{\ln n}{2s},$$

которое невозможно для больших n.

Из $s = \left[\frac{n}{2}\right]$ и (35) следует

$$E_{n,r}(\delta_M) \leqq \frac{\ln n}{n-1}.$$

С другой стороны, для каждого $\varepsilon > 0$ существует λ_ε такое, что если $\lambda < \lambda_\varepsilon$, то

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \leqq 1 + (2+\varepsilon)\lambda. \tag{36}$$

Из (33), (36) и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ получаем, что если $n > n_\varepsilon$, то имеет место

$$M \leqq \lambda_n + \frac{\lambda_n}{2}\left[(1+(2+\varepsilon)\lambda_n)^s + 1\right]. \tag{37}$$

Из (37) следует, что для достаточно больших n

$$\lambda_n \geqq \frac{\ln n}{2(1+\varepsilon)s}. \tag{38}$$

Действительно, полагая в (37) $\lambda_n = \frac{\ln n}{2(1+\varepsilon)s}$ и предполагая n настолько большим, что $\lambda_n < \frac{M}{2}$, получаем

$$0 < \frac{M}{2} \leqq \frac{\ln n}{4(1+\varepsilon)s}\, n^{\frac{2+\varepsilon}{2+2\varepsilon}}. \tag{39}$$

Но (39) противоречит $M > 0$.

Из (38) следует очевидно вторая часть неравенства теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл., Б. Пенков: ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Изв. МИ БАН, 6 (1962), 27—50.
2. Хаусдорфф, Ф.: Теория множеств. Москва, ОНТИ, 1936.
3. Pompeiu, M. D.: Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Ann. de la Fac. des Sci. Toulouse, VII (1905), 265—315.

4. Скороход, А.: Предельные теоремы для случайных процессов. Теория вероятн. и ее прим. 1 (1956), 289—319.
5. Гихман, И., А. Скороход: Введение в теорию случайных процессов. Москва, Наука, 1965.
6. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. УМН, XXIV (1969), № 5, 141—178.
7. Сендов, Бл.: Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 55 (1962), 1—39.
8. Popov, V. Approximation de fonctions d'un grand nombre de variables indépendantes au moyen de polynômes dans la métrique de Hausdorff. Compt. rend. de l'Acad. bulg. des Sciences, 19 (1966), № 7, 561—564.

Постъпила на 9. XI. 1969 г.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES BY POLYNOMIALS IN THE METRIC OF HAUSDORFF

Bl. Sendov and V. A. Popov

(SUMMARY)

For the best approximation $E_{n,r}(f)$ of a function $f(x)$, defined on the unit cube in the m-dimensional euclidean space, by polynomials of degree n with respect to the distance of Hausdorff [1], [6] the following estimate is found (Theorem 1):

$$E_{n,r}(f) = 6m \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

For the function $\delta_M(x)$ defined on the interval $[-1,1]$ by

$$\delta_M(x) = \begin{cases} M & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}; \quad M > 0,$$

is proved the asymptotics (Theorem 2):

$$E_{n,r}(\delta_M) \sim \frac{\ln n}{n}.$$