НЯКОИ СВОЙСТВА НА ТЕТРАЕДРИТЕ СЪС СТЕНИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИ НА ЕДНА НОРМКРИВА C^3 ОТ ТРЕТИ КЛАС

Анани Лангов

§ 1. *H*-криви и техните свойства

В статията [1] на Хурвиц с проективни средства са доказани следните теореми:

1) Ако стените на два тетраедъра са оскулачни равнини за една неразпадаща се крива C_3 от трета степен, то техните 8 върха лежат на друга крива U_3 също от трета степен.

2) Ако през правата l минават две оскулачни равнини на кривата C_3 и l пресича U_3, то l е бисеканта на U_3.

3) Съществуват ∞^1 тетраедри, описани около C_3 (в смисъл, че стените им са оскулачни равнини на C_3) и вписани в U_3, при това всяка точка на U_3 е връх на точно един такъв тетраедър.

Като се вземе пред вид, че съвкупността от оскулачните равнини на една крива C_3 от трета степен е крива C^3 от трети клас ([2], 272) и това, че права, през която минават две равнини, принадлежащи на една крива C^3 от трети клас, наричаме ос на C^3, то теоремите на Хурвиц могат да се изкажат и така:

1) Ако стените на два тетраедъра принадлежат на неразпадаща се крива C^3 от трети клас, то 8-те им върха лежат на крива U_3 от трета степен.

2) Ако правата l е ос на C^3 и пресича U_3, то тя е бисеканта на U_3.

Дефиниция 1. Тетраедър, стените на който принадлежат на кривата C^3 от трети клас, наричаме *H*-тетраедър относно C^3. Крива от трета степен U_3, в която са вписани два (а следователно и ∞^1) *H*-тетраедъра относно C^3, наричаме *H*-крива относно C^3.

Тъй като *H*-тетраедъра и *H*-криви ще строим относно една и съща крива C^3, то думите „относно C^3“ по-нататък в статията ще бъдат изпускани.

H-кривата, минаваща през върховете на *H*-тетраедрите $A(A_1 A_2 A_3 A_4)$ и $B(B_1 B_2 B_3 B_4)$, ще означаваме $H(A, B)$. Правите на пространството ще разделим на три класа в зависимост от положението им спрямо C^3.

Дефиниция 2. Правата l ще наричаме права от тип 0, 1 или 2, ако през l минават 0, 1 или 2 равнини, принадлежащи на C^3.

От дефиницията на понятието ос на C^3 следва, че понятията ос на C^3 и права от тип 2 изразяват един и същ факт.

Теорема 1. Ако H-кривата U_3 се разпада, то нейните компоненти са:

1) Права l от тип 0 и неизродена крива от втора степен, която лежи в равнина π, принадлежаща на кривата C^3;

2) Ос o на кривата C^3 и две прави l_1 и l_2 от тип 1, които лежат по една в равнините, минаващи през o и принадлежащи на C^3, и пресичат o в различни точки;

3) Три оси на кривата C^3, които минават през една точка.

Доказателство. Нека $A(A_i)$ и $B(B_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ са два H-тетраедъра, които нямат обща стена и са вписани в U_3 (общ случай).

Връх на единия тетраедър не може да лежи в стена на другия, защото през този връх трябва да минават 4 равнини, принадлежащи на C^3; също така ръб на единия тетраедър не може да пресича ръб на другия тетраедър, защото равнината, определена от тези два ръба, би принадлежала на C^3 и би била обща стена на двата тетраедъра, което е изключено по условие. Следователно никои 4 от 8-те точки A_i, B_i не са компланарни и значи кривата U_3 не се разпада.

За тетраедрите A и B остават още възможностите да имат 1, 2, 3 общи стени.

1. Нека A и B имат точно 1 обща стена $\pi=A_2A_3A_4=B_2B_3B_4$. Тъй като 6 точки на кривата U_3 от 3. степен лежат в равнината π, то U_3 се разпада на крива от 2. степен k_2 и права A_1B_1, която пресича k_2. Правата A_1B_1 е от тип o, защото, ако допуснем, че равнина σ, принадлежаща на C^3, минава през A_1B_1, бихме получили, че тетраедрите A и B имат и втора обща стена σ освен π. Ако допуснем, че k_2 се разпада на двойка прави (l_1, l_2), то върху едната от правите l_1, l_2 ще лежат 3 от точките A_i, B_i $(i=2, 3, 4)$, което води до противоречието, че през една точка минават 4 равнини, принадлежащи на C^3.

2. Нека тетраедрите A и B имат точно две общи стени — $\sigma=A_1A_2A_3=B_1B_2B_3$ и $\tau=A_1A_2A_4=B_1B_2B_4$. Върху оста $\sigma\cap\tau$ на кривата C^3 лежат ръбовете A_1A_2 и B_1B_2 на тетраедрите A и B. Нито една от точките на двойката (A_1, A_2) не съвпада с точка от двойката (B_1, B_2), защото ако например $A_1=B_1$, то трите равнини, принадлежащи на C^3 и минаващи през точката $A_1=B_1$, биха били стени както на тетраедъра A, така и на тетраедъра B, което противоречи на допускането. Както видяхме по-горе, ръбове на двата тетраедъра не могат да лежат в една равнина, т. е. правата A_3A_4 е кръстосана с правата B_3B_4 и следователно U_3 се състои от компонентите: ос o и правите $l_1=A_3B_3$ и $l_2=A_4B_4$. Правите l_1 и l_2 лежат съответно в равнините σ и τ, принадлежащи на C^3.

3. Нека тетраедрите A и B имат три общи стени — $A_1A_2A_3=B_1B_2B_3$, $A_1A_2A_4=B_1B_2B_4$ и $A_1A_3A_4=B_1B_3B_4$. Това условие е равносилно на условието $A_1=B_1$ и тройката оси $(o_1=A_1A_2$, $o_2=A_1A_3$,

$o_3 = A_1A_4$) се явява единствената крива от трета степен, съдържаща върховете на тетраедрите A и B. С това теоремата е доказана.

Лесно се вижда верността на следното следствие от теорема 1:

Теорема 2. Ако коничното сечение k_2 (може и разпадащо се) е компонента на една H-крива, то равнината на k_2 принадлежи на C^3. Равнина, принадлежаща на C^3, или съдържа конично сечение, компонента на H-кривата U_3, или пресича U_3 в 3 точки (една от които е винаги реална), които образуват триъгълник, чиито страни са оси на C^3.

Последната част на теоремата се доказва по следния начин: нека U_3 пресича равнината π, принадлежаща на C^3, в точката A_1. Съгласно теорема 3 на Хурвиц съществува точно един H-тетраедър с връх A_1, вписан в U_3. Два от върховете му (да ги означим A_2 и A_3) лежат в π и принадлежат на U_3. Правите A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 като ръбове на H-тетраедър са оси на C^3.

Теорема 3. Ако права l от тип 1 е бисеканта на H-кривата U_3, то единствената равнина σ, която минава през l и принадлежи на C^3, съдържа квадратна компонента на U_3.

Доказателство. Да допуснем, че σ не съдържа компонента на кривата U_3; тогава съгласно теорема 2 σ пресича U_3 в три точки, образуващи триъгълник, страните на който са оси на C^3. Лесно е да се види, че тези оси са единствените бисеканти на U_3, които, лежат в σ, и следователно l съвпада с някоя от тях. Но това противоречи на условието, че l е от тип 1. Полученото противоречие доказва теоремата.

T-система конични сечения с базисно конично сечение C^2 наричаме [3] съвкупността от конични сечения, всяко от които минава през върховете на поне един триъгълник, страните на който принадлежат на C^2. В произволно конично сечение на една T-система могат да се впишат ∞^1 триъгълника със страни, които принадлежат на C^2.

Произволна равнина π на кривата C^3 от трети клас пресича останалите равнини, принадлежащи на C^3, в правите на едно конично сечение C^2.

Теорема 4. Ако k_2 е крива от втора степен, която е компонента на H-крива U_3, то k_2 принадлежи на T-системата с базисно конично сечение C^2, получено от пресичането на равнините на кривата C^3 с равнината на k_2.

Доказателство. Нека разгледаме H-тетраедър, вписан в U_3 с връх A_1 — точка от k_2. Тъй като равнината π на k_2 принадлежи на C^3 (т. 2), то още два върха A_2 и A_3 на този тетраедър лежат в π и на U_3, т. е. на k_2. Тъй като страните на триъгълника $A_1A_2A_3$ са оси на C^3, а всички оси на C^3, лежащи в π, принадлежат на C^2, то k_2 принадлежи на разглежданата T-система конични сечения.

§ 2. T-квадрики и техните свойства

Теорема 1. Ако квадриката F^2 минава през H-кривата U_3, то всяка точка $A_1 \in F^2$, през която минава ос на кривата C^3, неинцидентна с F^2, служи за връх на точно един H-тетраедър, вписан в F^2.

Доказателство. Нека a е оста на кривата C^3 през точката A_1 и нележаща на повърхнината F^2. Нека a пресича F^2 втори път в точката A_2. Съществува точно един H-тетраедър с върхове в точките A_1 и A_2. Означаваме другите му върхове с A_3 и A_4.

Разглеждаме T-системата конични сечения в равнината $\pi = A_1A_2A_3$ с базисно конично сечение C^2, дефинирана, както в теорема 4, § 1. Равнината π пресича кривата U_3 (т. 2, § 1) в точките B_1, B_2, B_3, така че страните на триъгълника $B_1B_2B_3$ принадлежат на C^2, или съдържа квадратна компонента k_2 на кривата U_3, принадлежаща на T-системата с базисно конично сечение C^2. Лесно се вижда във втория случай, че k_2 е кривата, в която π пресича квадриката F^2. Означаваме с k_2 кривата, в която π пресича F^2 и в първия случай. Коничното сечение k_2 и в двата случая принадлежи на T-системата с базисно конично сечение C^2. За да се убедим в това, е нужно да забележим, че в първия случай k_2 минава през точките B_1, B_2 и B_3.

Но от теорията на T-системите конични сечения е известно, че ако двата върха A_1, A_2 на триъгълника $A_1A_2A_3$ лежат на коничното сечение k_2, принадлежащо на T-система с базисно конично сечение C^2, а страните му принадлежат на C^2, то и третият му връх A_3 лежи на k_2. Следователно A_3 принадлежи на F^2.

С аналогични разсъждения, разглеждайки T-системата конични сечения в равнината $\sigma = A_1A_2A_4$, стигаме до заключението, че A_4 принадлежи на F^2. Единствеността на тетраедъра с исканите свойства следва от единствеността на построението на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$.

Дефиниция 1. Квадрика, на която лежи поне една H-крива, наричаме H-квадрика относно C^3.

Теорема 2. Ако равнина $\pi \in C^3$ не лежи на T-квадриката F^2, то π пресича F^2 в крива от втора степен, която е компонента на H-крива, лежаща на F^2.

Доказателство. При условията на теоремата π пресича F^2 в крива k_2 от втора степен. Нека X_1, Y_1 са точки $\in k_2$, през които минават оси на C^3, нележащи на F^2. Да построим H-тетраедрите $X(X_1X_2X_3X_4)$ и $Y(Y_1Y_2Y_3Y_4)$, вписани в F^2 (съгл. т. 1). Тъй като точките X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 лежат в π и на F^2, то те лежат на k_2. H-кривата $H(X, Y)$ следователно се разлага на k_2 и правата X_4Y_4, която пресича k_2, и следователно има 3 общи точки с F^2, т. е. $H(X, Y)$ изцяло лежи на F^2.

От теоремите 1 и 2 лесно следват и следните:

Теорема 3. Ако два върха A_1, A_2 на H-тетраедъра $A(A_1A_2A_3A_4)$ лежат на T-квадриката F^2, а правата A_1A_2 не лежи на F^2, то и точките A_3 и A_4 лежат на F^2.

Теорема 4. Ако три върха A_1, A_2, A_3 на H-тетраедъра $A(A_1A_2A_3A_4)$ лежат на T-квадриката F^2, а равнината $A_1A_2A_3$ не лежи на F^2, то точката A_4 лежи на F^2.

Теорема 5. Ако F^2 е T-квадрика, то F^2 е прост хиперболоид, конус или двойка равнини, т. е. F^2 има праволинейни образуващи.

Теорема 6. Ако T-квадриката F^2 се разпада на двойка равнини α и β, то поне една от равнините α и β принадлежи на кривата C^3.

Доказателство. На F^2 съгласно дефиницията 1 лежи H-крива U_3. Кривата U_3 се разпада, защото изцяло лежи в равнините α и β. Но тогава (съгл. т. 2, § 1) квадратната компонента на U_3 лежи в равнина $\pi \in C^3$, т. е. едната от равнините α и $\beta \in C^3$.

Теорема 7. Произволна двойка равнини (π, α), на която поне едната равнина $\in C^3$ е T-квадрика.

Доказателство. Нека равнината $\pi \in C^3$. Ако $\alpha \bar{\in} C^3$, то в α има точно една ос o на кривата C^3. Ако $\alpha \in C^3$, то в α има ∞^1 оси на C^3 и една от тях означаваме с o. Правата o пресича равнината π в точка O. През O минават две оси o_1, o_2 на кривата C^3, които лежат в π. H-кривата, която съдържа правите o, o_1 и o_2, лежи на двойката равнини (π, α) и следователно (π, α) е T-квадрика.

Нека F^2 е T-квадрика и A е точка, която лежи на F^2. Ако трите оси на кривата C^3, които минават през точката A, лежат на F^2, то A е особена точка на F^2. Обратното твърдение обаче, че ако A е особена точка на T-квадриката F^2, то трите оси на C^3, минаващи през A, лежат на F^2, е невярно. В последното се убеждаваме, като разгледаме онези точки на T-квадриката F^2, която се разпада на двойка равнини (π, α), където $\alpha \bar{\in} C^3$, които лежат на правата $\pi \times \alpha$ и са различни от точката O, в която единствената ос на кривата C^3, лежаща в α, пробожда π.

Теорема 8. Ако $A(A_1A_2A_3A_4)$, $B(B_1B_2B_3B_4)$ и $C(C_1C_2C_3C_4)$ са три H-тетраедъра, невписани в една H-крива, то съществува T-квадрика, която минава през 12-те им върха.

Доказателство. Разглеждаме H-кривите $H(A, B)$ и $H(A, C)$ и произволна равнина $\pi \in C^3$, в която тези H-криви нямат компоненти. Кривите $H(A, B)$, $H(A, C)$ в такъв случай пресичат (т. 2, § 1) във върховете на триъгълниците $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$, страните на които са оси на C^3 и следователно принадлежат на кривата C^2 от втори клас, правите на която са пресечниците на всички равнини $\in C^3$ с равнината π, също $\in C^3$. Но тогава тези триъгълници са вписани в крива от втора степен k_2. Да означим с F^2 квадриката, която минава през кривата k_2 и върховете на тетраедра A. H-кривите $H(A, B)$ и $H(A, C)$ лежат на F^2, защото всяка от тях има 7 общи точки с F^2.

В пространството P^3 кривата C^3 определя ∞^4 H-тетраедри. Произволна тройка H-тетраедри (съгл. т. 8) определя една T-квадрика. Така в пространството се получават ∞^{12} T-квадрики, като броенето е извършено с повторения. Вземайки пред вид, че всяка T-квадрика е

броена ∞^6 пъти, защото в нея са вписани ∞^6 тройки H-тетраедра, получаваме, че в пространството T-квадриките са ∞^6.

Дефиниция 2. Съвкупността от T-квадриките, определени от кривата C^3 от трети клас, наричаме T-система квадрики, определена от C^3.

Забележка 1. Лесно е да се покаже, че една T-система квадрики се пресича от една равнина $\pi \in C^3$ в T-система конични сечения, което показва, че понятието T-система квадрики е естествено обобщение на понятието T-система конични сечения.

§ 3. Разположение на две H-криви на една T-квадрика

Теорема 1. Всяка H-крива, която лежи на T-квадрика F^2, разпадаща се на двойка равнини (σ, τ), които принадлежат на кривата C^3, има компонента правата $\sigma \times \tau$. Две H-криви, лежащи на F^2, освен в общата компонента $\sigma \times \tau$ се пресичат в още две точки, които служат за върхове на H-тетраедър с един ръб върху правата $\sigma \times \tau$.

Доказателство. Да построим произволен H-тетраедър, вписан в $F^2(\sigma, \tau)$. Ако върхът му $A_1 \not\subset \sigma$, то σ е негова стена. Тъй като поне един негов връх лежи в равнината τ, то и τ е негова стена, т. е. правата $\sigma \times \tau$ е негов ръб. Да вземем два произволни H-тетраедра A и B, вписани в $F^2(\sigma, \tau)$. H-кривата $H(A, B)$ има 4 свои точки на правата $\sigma \times \tau$ и следователно се разпада (вж. т. 1, § 1) на ос $o = \sigma \times \tau$ и две прави l_1 и l_2, които лежат съответно в равнините σ и τ.

Да вземем две H-криви $k_3(o, l_1, l_2)$ и $k_3'(o, l_1', l_2')$ върху $F^2(\sigma, \tau)$. Да означим $A_1 = l_1 \times l_1'$ и да построим H-тетраедъра $A(A_1A_2A_3A_4)$, вписан в $F^2(\sigma, \tau)$. Неговият ръб A_3A_4 трябва да лежи на правата $\sigma \times \tau$, а върхът му A_2 е $l_2 \times l_2'$, защото, ако три върха на един H-тетраедър лежат на една H-крива, то и четвъртият му връх лежи на тази крива. С това теоремата е доказана.

Теорема 2. Всяка H-крива, която лежи на T-квадрика $F^2(\pi, \alpha)$, разпадаща се на двойка равнини (π, α), където $\alpha \bar{\in} C^3$, минава през точката O, в която единствената лежаща в α ос на кривата C^3 пресича π. Две H-криви върху $F^2(\pi, \alpha)$ освен в точката O се пресичат в още 4 точки, които служат за върхове на H-тетраедър.

Доказателство. Нека A и B са два H-тетраедъра, вписани в $F^2(\pi, \alpha)$. Както в доказателството на теорема 1, лесно се вижда, че π е обща стена на тетраедрите A и B.

Но тогава (т. 1, § 1) $H(A, B)$ се разлага в конично сечение $k_2 \not\subset \pi$ и права $l \not\subset \alpha$. Нека l пресича единствената лежаща в α ос o на кривата C^3 в точка L_1. H-тетраедърът L с връх L_1, вписан в $F^2(\pi, \alpha)$ и $H(A, B)$, има равнината π за стена, а правата o — за ръб и следователно точката $O = o \times \pi$ — за връх. Значи k_2 минава през O.

Нека (k_2, l) и (k_2', l') са две H-криви върху $F^2(\pi, \alpha)$. Да означим $P_1 = l \times l'$. Лесно е да се провери, че H-тетраедърът $P(P_1P_2P_3P_4)$, вписан в $F^2(\pi, \alpha)$, е вписан в двете H-криви и следователно е търсеният.

Теорема 3. Две H-криви, лежащи на T-квадрика, която е конус, се пресичат в неговия връх и още в 4 точки, които са върхове на H-тетраедър.

Доказателство. Известно е, че всяка крива от трета степен, която лежи на конус от втора степен, минава през неговия връх и пресича всяка образуваща на конуса освен във върха още един път, а две такива криви освен във върха се пресичат в още четири точки.

Нека две H-криви лежат на T-квадрика, която е конус. Съгласно казаното те минават през върха на конуса и имат още 4 общи точки. Да означим A_1 една от тях. Тъй като A_1 не е особена точка за конуса, то трите оси на кривата C^3, минаващи през A, не лежат на конуса и следователно (т. 1, § 2) съществува H-тетраедър, вписан в конуса. Лесно е да се види, че този тетраедър е вписан и в двете дадени H-криви.

На простия хиперболоид имаме две системи криви от трета степен ([2], 230). Всяка крива от едната система пресича веднъж всички праволинейни образуващи на хиперболоида, които принадлежат на една система образуващи, и два пъти всички прави от другата система образуващи.

Две криви от една и съща система се пресичат в четири точки, а две криви от различни системи — в пет точки.

Теорема 4. Две H-криви, лежащи на една T-квадрика F^2, която е хиперболоид, се пресичат в четири точки, които са върхове на H-тетраедър. Всички H-криви на F^2 принадлежат на една система.

Доказателство. Нека A_1 е обща точка на дадените H-криви върху T-квадриката F^2. Тъй като хиперболоидът няма особени точки, поне една от осите на кривата C^3, минаващи през точката A_1, не лежи на F^2. Определен е тогава (т. 1, § 2) H-тетраедър $A(A_1A_2A_3A_4)$, вписан в F^2, и върховете му са общи точки на двете дадени H-криви. Ако допуснем, че B_1 е обща точка на двете H-криви, различна от точките A_i $(i=1, 2, 3, 4)$, разсъждавайки, както за точката A_1, ще получим, че има H-тетраедър $B(B_1B_2B_3B_4)$, върховете на който са общи за двете H-криви. Но тъй като крива от трета степен е определена с шест свои точки, то двете H-криви биха съвпадали. Полученото противоречие доказва първата част на теоремата. Втората част на твърдението следва непосредствено от доказаното, че две H-криви, лежащи на F^2, не могат да имат повече от четири общи точки.

Резюмирайки резултатите от теоремите 1, 2, 3 и 4, получаваме следната основна теорема.

Теорема 5. Две H-криви, лежащи на една T-квадрика, имат общ вписан в тях H-тетраедър.

§ 4. *Б*-образуващи на една *T*-квадрика. Непълно пресичане на две *T*-квадрики

Теорема 1. Ако на T-квадриката F^2, която е хиперболоид, лежи ос на кривата C^3, то тя е бисеканта на всички H-криви, лежащи на F^2.

Доказателство. Съгласно теорема 4, § 3, H-кривите, лежащи на F^2, принадлежат на една система, т. е. всяка права, лежаща на F^2, сече тези криви или един, или два пъти. Но съгласно теоремата 2 на Хурвиц ос на C^3, която пресича една H-крива, е бисеканта на тази крива.

Дефиниция 1. Права, лежаща на T-квадрика, която е бисеканта на всички H-криви върху тази T-квадрика, наричаме $Б$-образуваща на T-квадриката.

Лесно е да се види, че на хиперболоид, който е T-квадрика, $Б$-образуващи са всички прави от една система образуващи. На конус, който е T-квадрика, такива са всички прави на него. На T-квадрика, която се разпада на двойка равнини (σ, α), където α не принадлежи на C^3, $Б$-образуващи са всички прави, лежащи в σ, и всички прави, лежащи в α, които принадлежат на снопа с център точката $O = o \times \sigma$ (с o е означена оста на C^3, която лежи в α). На T-квадриката $F^2(\sigma, \tau)$, която се разпада на двойка равнини, принадлежащи на C^3, $Б$-образуващи са всички прави в σ и τ.

Теорема 2. Ако T-квадриката F^2 е конус, то трите оси на кривата C^3, минаващи през върха V на F^2, лежат на F^2.

Доказателство. Щом F^2 е T-квадрика, то на F^2 лежи H-крива U_3. Но F^2 е конус, следователно U_3 минава през върха V на конуса. Трите оси на C^3, минаващи през точката V, пресичат още веднъж U_3, освен в точката V и следователно са образуващи на конуса F^2.

Теорема 3. На T-квадриката F^2 има или три, или ∞^1 оси на кривата C^3.

Доказателство. Ако F^2 се разпада на двойка равнини, то (съгл. т. 6, § 2) поне едната от равнините на двойката принадлежи на C^3 и в нея има ∞^1 оси на C^3, т. е. твърдението в този случай е изпълнено. Ако F^2 е конус (съгл. т. 2), трите оси на C^3, минаващи през върха на конуса, лежат на F^2. Ако допуснем, че с конуса е инцидентна друга ос на C^3, то вземайки пред вид, че всички прави върху един конус минават през върха му, достигаме до абсурда, че през върха на конуса F^2 минават повече от три оси на C^3. Това доказва, че на F^2 в този случай има точно 3 оси на C^3.

Нека F^2 е хиперболоид. Избираме неразпадаща се H-крива U_3, която лежи на F^2 (че такава H-крива съществува, се проверява лесно). Съгласно теорема 1 всяка лежаща на F^2 ос на C^3 е бисеканта на U_3.

На U_3 построяваме (3,3)-значно съответствие по следния начин: Нека A е точка от U_3 и нека $Б$-образуващата на квадриката F^2, минаваща през A, пресича U_3 в точката A_1. През A_1 прекарваме трите оси на C^3, които (съгл. теорема 2 на Хурвиц) нека да пресичат U_3 в точките A_1', A_2', A_3'. На точката A съпоставяме тройката точки A_1', A_2', A_3'. Да проверим колко точки от кривата U_3 в това съответствие се изобразяват в точката A_1'. За това през точката A_1' прекарваме трите оси на C^3, които нека пресичат U_3 в точките B_1', B_2', B_3', а $Б$-образуващите на F^2, които минават през тези точки, нека пресичат U_3 в

точките B_1, B_2, B_3. Непосредствено се проверява, че всяка от точките B_1, B_2, B_3 в построеното горе съответствие се изобразява в точката A_1'. Това доказва (3,3)-значността на това съответствие. Съгласно принципа на Шал това съответствие има 6 двойни точки. Но лесно се проверява, че ако A е двойна точка, то и точката B, в която $Б$-образуващата на F^2, минаваща през точката A, пресича U_3, е също двойна. Следователно тези 6 точки определят 3 различни оси на C^3, лежащи на F^2. Не е изключено обаче това съответствие да е тъждественото преобразувание в U_3 и тогава на F^2 се разполагат ∞^1 оси на C^3.

Ако две T-квадрики се пресичат в една H-крива U_3, то те имат и обща права l, която е бисеканта на U_3, защото допълва U_3 до крива от четвърта степен и следователно двете T-квадрики имат и обща $Б$-образуваща. Обратната теорема обаче не е вярна без допълнителни уговорки.

Теорема 4. Две T-квадрики F^2 и F_1^2, които имат обща $Б$-образуваща l от тип o, се пресичат и в една H-крива.

Доказателство. Нека π е равнина на кривата C^3, която минава през точката O на правата l. Равнината π пресича T-квадриките F^2 и F_1^2 съответно в коничните сечения k_2 и k_2', които съгласно теорема 2, § 2, са компоненти на H-криви $k_3=(k_2, l_1)$ и $k_3'=(k_2, l_1')$, лежащи съответно на F^2 и F_1^2. Тъй като l е $Б$-образуваща на F^2 и пресича k_2 само в точката O, то l пресича и правата l_1. Със същите разсъждения получаваме, че l пресича и l_1'. Оста o на кривата $C^3 \not\supset O$ и $o \not\subset \pi$ също пресича l_1 и l_1'. Но тъй като l_1 и l_1' пресичат пресичащите се прави l и o, то l_1 пресича l_1' в точката P_1. H-тетраедърът $P(P_1P_2P_3P_4)$ със стени $P_2P_3P_4 \not\supset \pi$ е вписан както в H-кривата k_3, така и в k_3', т. е. е вписан в F^2 и F_1^2.

Използувайки друга точка O_1, лежаща на l, ще получим след същите разсъждения H-тетраедър $Q(Q_1Q_2Q_3Q_4)$, вписан в F^2 и F_1^2. H-кривата $H(P, Q)$ е търсената.

Теорема 5. Ако A, B, C, D са четири H-тетраедъра, невписани в една T-квадрика и нямащи обща стена, то T-квадриките $F^2(A, B, C)$, $F^2(A, B, D)$, $F^2(A, C, D)$ и $F^2(B, C, D)$ имат обща $Б$-образуваща от тип 0 или 2.

Доказателство. T-квадриките $F^2(A, B, C)$ и $F^2(A, B, D)$ при поставеното условие, че H-тетраедрите A, B, C, D нямат обща стена, нямат обща равнинна компонента и тъй като имат обща H-крива $H(A, B)$, се пресичат по права l, която е бисеканта на $H(A, B)$. Правата l лежи на T-квадриката $F^2(A, B, C)$ и е бисеканта на H-кривата $H(A, B)$, следователно тя е $Б$-образуваща на $F^2(A, B, C)$ и значи бисеканта на H-кривата $H(B, C)$, която също лежи на $F^2(A, B, C)$. По аналогичен път се установява, че l е бисеканта на $H(B, D)$. Но ако l е бисеканта на две криви $H(B, C)$ и $H(B, D)$, лежащи на T-квадриката $F^2(B, C, D)$, то l е $Б$-образуваща на T-квадриката $F^2(B, C, D)$. С аналогични разсъждения се доказва, че l е $Б$-образуваща и на T-квадриката $F^2(A, C, D)$.

Да допуснем, че l е права от тип 1. Нека σ е единствената равнина, която принадлежи на C^3 и минава през l. Ще докажем, че квадриките $F^2(A, B, C)$, $F^2(A, B, D)$, $F^2(A, C, D)$ и $F^2(B, C, D)$ имат σ за компонента. Да допуснем, че някоя от тези квадрики няма σ за своя компонента. Да я означим F^2. Равнината σ пресича F^2 в конично сечение k_2, което е компонента на H-крива (т. 2, § 2). Но k_2 съдържа l и (съгл. т. 1, § 1) се разпада на правата l от тип 1 и права o, която е ос на C^3.

Да допуснем, че F^2 е хиперболоид. Но всяка ос на C^3, лежаща на хиперболоид, който е T-квадрика, е $Б$-образуваща (т. 1, § 4). Но това, че l и o са $Б$-образуващи на F^2, които се пресичат, противоречи на свойството, че $Б$-образуващите на един хиперболоид са от една и съща система образуващи на F^2. Нека F^2 е конус. Но на конуса лежи само една тройка (o_1, o_2, o_3) оси на C^3. Нека $o=o_1$. Но тогава $l=o_2$ или $l=o_3$, което противоречи на условието, че l е от тип 1. Остава възможността F^2 да е разпадаща се на двойка равнини T-квадрика и понеже F^2 съдържа коничното сечение k_2, което лежи в σ, то σ е компонента на F^2.

И така T-квадриките $F^2(A, B, C)$, $F^2(A, B, D)$, $F^2(A, C, D)$, $F^2(B, C, D)$ имат обща компонента равнината $\sigma \in C^3$, а това означава, че дадените H-тетраедри имат обща стена, което беше изключено по условие. Полученото противоречие доказва, че l е от тип 0 или 2.

Теорема 6. Нека F^2 е T-квадрика и o — ос на C^3, лежаща на F^2, а σ и τ са равнините, които принадлежат на C^3 и минават през o. T-квадриките F^2 и (σ, τ) имат обща H-крива.

Доказателство. Ако F^2 е разпадаща се T-квадрика, твърдението е очевидно. Ако F^2 е конус, то вземайки пред вид, че трите оси на C^3, лежащи на конуса, минават през върха му, твърдението се доказва просто. Затова нека F^2 е хиперболоид. Равнината σ пресича F^2 в конично сечение k_2, което съдържа правата o и следователно се разпада на двойката прави (o, l_1). С помощта на правата l_2 коничното сечение k_2 може да се допълни до H-крива, която лежи на F^2 (т. 2, § 2). Но правата l_2 съгласно теорема 1, § 1, лежи в τ. Следователно $l_2=\tau\times F^2$. Така H-кривата (o, l_1, l_2) лежи на F^2 и (σ, τ).

§ 5. Съвкупности I^3 и техните свойства

Теорема 1. Нека k_3 е H-крива, а a — нейна бисеканта от тип 0. Съществуват ∞^3 H-тетраедри, всеки от които е вписан в някоя квадрика от снопа (k_3, a).

Доказателство. Квадриките, които минават през кривата $k_4=(k_3, a)$ от четвърта степен, образуват сноп. Всички те (съгл. т. 1, § 2) са T-квадрики. Във всяка от тези ∞^1 T-квадрики (съгл. същата теорема) могат да се впишат ∞^2 H-тетраедри. Всичко получаваме ∞^3 H-тетраедри със свойствата, изказани в условието на теоремата.

Дефиниция 1. Съвкупността от H-тетраедрите, вписани в произволна T-квадрика от снопа (k_3, a), където k_3 е H-крива, а a — нейна бисеканта от тип 0, наричаме съвкупност I_a^3.

Ще докажем, че I_a^3 не зависи от избора на k_3.

Теорема 2. Ако k_3' е H-крива с бисеканта a, то $I_a^3(k_3') \equiv I_a^3(k_3)$.

Доказателство. Нека H-тетраедърът $A(A_i)$ $(i=1,2,3,4)$ принадлежи на съвкупността $I_a^3(k_3)$. Значи съществува T-квадрика α^2 от снопа (k_3, a), в която тетраедърът A е вписан. Да разгледаме T-квадриката β^2 от снопа (k_3', a), която минава през точката A_1. T-квадриките α^2 и β^2, имащи обща $Б$-образуваща от тип 0, съгласно т. 4, § 4, се пресичат в H-крива m_3, която очевидно минава през точката A_1. Единственият H-тетраедър, вписан в H-кривата m_3, с връх A_1 очевидно съвпада с тетраедъра A и следователно A е вписан и в β^2. Последното показва, че тетраедърът $A \in I_a^3(k_3')$. Обратното твърдение се доказва по аналогичен път.

Теорема 3. Ако H-тетраедрите A и B принадлежат на съвкупността I_a^3, то H-кривата $H(A, B)$ има правата a за своя бисеканта.

Доказателство. Нека съвкупността I_a^3 е определена с помощта на H-кривата k_3. Да изберем H-тетраедър P, вписан в k_3. Тъй като $A \in I_a^3$, съществува T-квадрика α^2 от снопа (k_3, a), в която A е вписан. Но H-кривата $H(A, P)$ лежи на α^2 и следователно правата a е нейна бисеканта. По аналогичен път получаваме, че и H-кривата $H(B, P)$ има a за бисеканта. Затова T-квадриката $F^2(A, B, P)$ има a за $Б$-образуваща и тъй като H-кривата $H(A, B)$ лежи на $F^2(A, B, P)$, то $H(A, B)$ има a за бисеканта.

От теоремите 2 и 3 лесно се доказват и следващите следствия:

Следствие 1. Съвкупността I_a^3 може да се определи като съвкупност от H-тетраедри, такива, че H-кривата, определена от два произволни тетраедъра от тази съвкупност, да има правата a от тип 0 за бисеканта.

Следствие 2. Ако H-тетраедрите A и B принадлежат на съвкупността I_a^3, то всеки H-тетраедър, вписан в кривата $H(A, B)$, също принадлежи на I_a^3.

Следствие 3. Ако A, B, C са три H-тетраедъра, принадлежащи на I_a^3, то T-квадриката $F^2(A, B, C)$ има правата a за $Б$-образуваща и всеки H-тетраедър, вписан в $F^2(A, B, C)$, принадлежи на I_a^3.

Ще казваме, че T-квадриката F^2 принадлежи на съвкупността I_a^3, ако всеки H-тетраедър, вписан в F^2, принадлежи на I_a^3.

Забележка 1. В забележка 1, § 2 беше споменато, че T-квадриките, определени от кривата C^3, се пресичат от една равнина $\pi \in C^3$ в T-система конични сечения. Вземайки пред вид, че всички T-квадрики, принадлежащи на една съвкупност I_a^3, минават през правата a, ще получим, че T-квадриките от една съвкупност I_a^3 се пресичат от π в съвкупност конични сечения от T-системата конични сечения, които минават през една точка $O = a \times \pi$. Лесно е още да се види, че всеки две такива конични сечения имат общ вписан триъгълник, на

който страните са оси на C^3. Такава съвкупност от конични сечения се нарича *O*-мрежа от *T*-система конични сечения [3].

Дефиниция 2. Съвкупността от *H*-тетраедри с обща стена σ наричаме съвкупност I_σ^3.

Дефиниция 3. Нека o е ос на кривата C^3, а A — произволен *H*-тетраедър, на който никой ръб не е правата o. Съвкупността от *H*-тетраедри, вписани в *H*-кривите, минаващи през върховете на тетраедъра A и имащи правата o за бисеканта, наричаме съвкупност $I^3_{o,A}$.

Теорема 4. Ако *H*-тетраедърът $B \in I^3_{o,A}$, то $I^3_{o,A} \equiv I^3_{o,B}$.

Доказателство. Тъй като $B \in I^3_{o,A}$, то *H*-кривата $H(A, B)$ има o за бисеканта. Нека $X \in I^3_{o,A}$. Това означава, че *H*-кривата $H(A, X)$ има o за бисеканта. Но тогава *T*-квадриката $F^2(A, B, X)$ има o за *Б*-образуваща и $H(X, B)$ има o за бисеканта, което означава, че $X \in I^3_{o,B}$. С аналогични разсъждения се установява, че всеки тетраедър, принадлежащ на $I^3_{o,B}$, принадлежи и на $I^3_{o,A}$.

С подобни разсъждения лесно се установяват и следващите теореми 5 и 6.

Теорема 5. Ако X и Y са два *H*-тетраедъра, принадлежащи на $I^3_{o,A}$, то o е бисеканта на $H(X, Y)$ и всеки *H*-тетраедър, вписан в $H(X, Y)$, принадлежи на $I^3_{o,A}$.

Теорема 6. Ако три *H*-тетраедъра X, Y, Z принадлежат на една съвкупност $I^3_{o,A}$, то *T*-квадриката $F^2(X, Y, Z)$ има o за *Б*-образуваща и всеки *H*-тетраедър, вписан в $F^2(X, Y, Z)$, също принадлежи на $I^3_{o,A}$.

В този случай ще казваме, че $F^2 \in I^3_{o,A}$.

Теорема 7. Четири *H*-тетраедъра A, B, C, D, невписани в една *T*-квадрика, определят една от съвкупностите I_a^3, I_σ^3 или $I^3_{o,A}$.

Доказателство. Ако дадените тетраедри имат обща стена σ, то те принадлежат на съвкупността I_σ^3. Ако нямат обща стена, *T*-квадриките $F^2(A, B, C)$, $F^2(A, B, D)$, $F^2(A, C, D)$ и $F^2(B, C, D)$ имат обща *Б*-образуваща от тип 0 или 2 (т. 5, § 4). Да означим с a или o тази *Б*-образуваща съответно, ако е от тип 0 или 2. В първия случай дадените *H*-тетраедри са вписани в *T*-квадриките $F^2(A, B, C)$, $F^2(A, B, D)$ и принадлежат на съвкупността I_a^3, определена от *H*-кривата $H(A, B)$. Във втория случай разглеждаме съвкупността $I^3_{o,A}$. Кривата $H(A, B)$ лежи на $F^2(A, B, C)$, която има o за *Б*-образуваща и следователно o е бисеканта на $H(A, B)$, т. е. $B \in I^3_{o,A}$. С аналогични разсъждения се доказва, че и $C \in I^3_{o,A}$ и $D \in I^3_{o,A}$.

Че съвкупностите I_a^3 и $I^3_{o,A}$ са определени еднозначно, се вижда от следните разсъждения. Нека дадените тетраедри принадлежат на съвкупности I_a^3 и I_b^3 ($I^3_{o,A}$ и $I^3_{o',A'}$). Но тогава те биха били вписани в *T*-квадриката, определена от $H(A, B)$ и нейните бисеканти a и b (o и o'), което е изключено по условие.

Теорема 8. Две T-квадрики F^2 и F_1^2, които принадлежат на една от съвкупностите I_a^3, I_σ^3 или $I_{o,A}^3$, имат обща H-крива.

Доказателство. Случай а). Нека F^2 и F_1^2 принадлежат на I_a^3. Тъй като правата a от тип 0 е обща $Б$-образуваща на F^2 и F_1^2, то (съгл. т. 4, § 4) те имат обща H-крива.

Случай б). Нека F^2 и F_1^2 принадлежат на I_σ^3. Лесно се вижда, че F^2 и F_1^2 имат равнината σ за обща компонента и следователно $F^2=(\sigma, \alpha)$, а $F_1^2=(\sigma, \beta)$. Нека $l=\alpha\times\beta$ и A и B са H-тетраедри с по един връх върху l и по една стена σ. Тогава H-кривата $H(A, B)$ лежи на F^2 и F_1^2.

Случай в). F^2 и F_1^2 принадлежат на съвкупност $I_{o,A}^3$. T-квадриката (σ, τ), където σ и τ са равнините, които принадлежат на C^3 и минават през o, пресича F^2 и F_1^2 в H-криви (т. 6, § 4) k_3 и k_3', които, лежейки на (σ, τ), имат общ вписан H-тетраедър X (т. 1, § 3). Да вземем H-тетраедрите Y и Z, вписани съответно в F^2 и F_1^2. Тъй като F^2 и F_1^2 принадлежат на съвкупността $I_{o,A}^3$, то съществуват H-тетраедри Y' и Z' с по един ръб върху правата o, вписани в H-кривите $H(A, Y)$ и $H(A, Z)$. Тетраедрите Y' и Z' са вписани и в T-квадриката (σ, τ). H-кривата $H(Y', Z')$, лежейки на (σ, τ), пресича k_3 и k_3' (т. 1, § 3) в H-тетраедри Y'' и Z''. H-кривите $H(Y, Y'')$ и $H(Z, Z'')$, лежейки на T-квадриката $F^2(A, Y, Z)$, имат общ вписан H-тетраедър (т. 5, § 3) L. Но $H(Y, Y'')$ лежи на F^2, а $H(Z, Z'')$ — на F_1^2, откъдето получаваме, че L е вписан в F^2 и F_1^2. H-кривата $H(X, L)$ е търсената.

Теорема 9. Съвкупността от T-квадрики, принадлежащи на една от съвкупностите I_a^3, I_σ^3 или $I_{o,A}^3$, е линейна система от трето измерение.

Доказателство. Твърдението на теоремата за I_σ^3 е очевидно, защото всяка от T-квадриките, която принадлежи на I_σ^3, се разпада на двойка равнини, съдържаща равнината σ, а в останалите случаи следва от следните разсъждения:

а) Ако α^2 и β^2 са T-квадрики, принадлежащи на I_a^3, $(I_{o,A}^3)$, то всяка квадрика на снопа (α^2, β^2) също принадлежи на I_a^3 $(I_{o,A}^3)$.

Тъй като (съгл. т. 8) α^2 и β^2 се пресичат в правата $a(o)$ и в една H-крива, която определя $I_a^3(I_{o,A}^3)$, то всяка квадрика на снопа е T-квадрика (т. 1, § 2), която принадлежи на $I_a^3(I_{o,A}^3)$.

б) Ако три T-квадрики α^2, β^2, γ^2 принадлежат на $I_a^3(I_{o,A}^3)$, то всеки два снопа от мрежата $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ имат обща T-квадрика, принадлежаща на $I_a^3(I_{o,A}^3)$.

Лесно е да се види, че α^2, β^2 и γ^2 имат общ вписан H-тетраедър и че T-квадриките на разглежданата мрежа минават през върховете му. Ако k_3 и k_3' са H-кривите, които определят сноповете T-квадрики, принадлежащи на $I_a^3(I_{o,A}^3)$, то k_3 и k_3' имат общ вписан тетраедър и следователно през тях минава квадрика, която е търсената.

в) Всеки две мрежи от T-квадрики, принадлежащи на $I_a^3(I_{o,A}^3)$, има общ сноп T-квадрики.

Дадените мрежи имат базисни H-тетраедри и снопът, определен от H-кривата, която минава през върховете им и правата $a(o)$, е търсеният сноп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurwitz, A.: Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven III Ordnung. Math. Ann., **20** (1882), 135—140.
2. Schröter, H.: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven, dritter Ordnung. Leipzig, 1880.
3. Глаголев, А. А: Теория T-системы. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, **39** (1956) вып. 3, 71—103.

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TÉTRAÈDRES AUX FACES APPARTENANTS À UNE COURBE RATIONNELLE NORMALE C^3 DE CLASSE TROIS

A. S. Langov

(RÉSUMÉ)

On choisit une courbe rationnelle normale C^3 de classe trois dans P^3 et on considère tous les tétraèdres dont les faces appartiennent à C^3. On les appelle des H-tétraèdres par rapport à C^3.

Dans § 1 on étudie les propriétés d'une H-courbe par rapport à C^3, qui est une courbe rationnelle normale de troisième degré passant par les sommets de deux H-tétraèdres.

Dans le § 2 les deux théorèmes principaux sont: 1) si la quadrique F^2 passe par une H-courbe, chacun de ses points est le sommet d'un H-tétraèdre (par rapport à C^3), inscrit dans F^2; 2) par les sommets de trois H-tétraèdres passe une quadrique. On appelle une quadrique ayant ces propriétés une T-quadrique.

Dans le § 3 on étudie les H-courbes, situées sur une T-quadrique. On démontre que deux H-courbes sur une T-quadrique F^2 se coupent et les points d'intersection donne les sommets d'un H-tétraèdre.

Une génératrice d'une T-quadrique, qui appartient au système des bisécantes de toutes les H-courbes sur F^2 s'appelle B-génératrice de F^2.

Dans le § 4 on étudie l'intersection de deux T-quadriques. On démontre que, si deux T-quadriques ont une B-génératrice commune, alors elles se coupent suivant une H-courbe. Grâce à ce théorème on introduit dans le § 5 les notions: l'I_a^3 — l'ensemble des H-tétraèdres, inscrits dans des T-quadriques, ayant pour B-génératrice une droite a, qui n'est pas un axe de C^3; 2) l'I_σ^3 — l'ensemble des H-tétraèdres qui ont une face commune σ; 3) l'$I^3_{o,A}$ — l'ensemble des H-tétraèdres inscrits dans les H-courbes, passant par les sommets du tétraèdre A et ayant l'axe o de la courbe C^3 pour bisécante. On étudie les propriétés de ces ensembles.