АЛГЕБРИЧНИ ОСНОВИ НА ЦЕНТРАЛНАТА СИМЕТРИЯ, ВЪРТЕНЕТО И ХОМОТЕТИЯТА

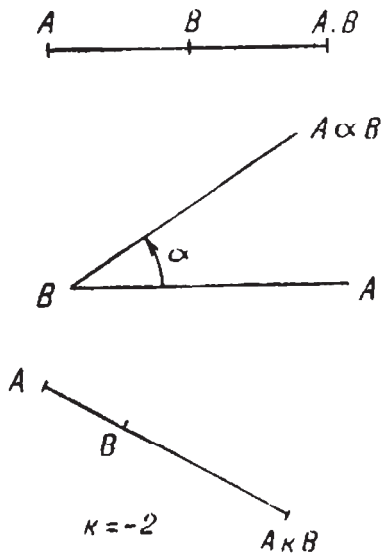
Димитър Вакарелов

Геометрията е област, в която се преплитат действията на най-различни алгебрични системи. Някои от тях са добре известните класически системи като групи, тела, полета, линейни пространства [1]. Други, по-малко известни, са някои квазигрупи [4], [9], системи от квазигрупи [6], тернарни групи [11], [8] и др. Най-често геометрията се „алгебризира", като разкрива алгебричната природа на някои свои обекти и след това я използува за свои вътрешни цели. Например груповите свойства на геометричните преобразувания, векторната алгебра и др. Това е частично използуване на алгебрата от геометрията. Пълна алгебризация на геометрията се получава чрез координатизацията ѝ с помощта на подходяща алгебрична система, което от синтетична превръща геометрията в аналитична. Във всички тези случаи е прието да се говори за построяване на някаква алгебра (обикновено се казва смятане) *в* геометричната теория. Но е възможно и обратното: в рамките на използуваната алгебрична система, откъсната от геометрията и взета в своя чист алгебричен вид, да се развие геометрична теория. В този случай трябва да се говори за геометрия *във* или *на* алгебричната система. Класически примери за това са изследванията на Бахман [2] и неговата школа по геометрия на групите, векторната аксиоматика на афинната и евклидовата геометрия, предложена от Вайл — Рашевски [7], [10] и др. Настоящата работа може да се разглежда като изследване в същото направление. За обект на изследване са избрани централната симетрия, въртенето около точка и хомотетията в евклидовата геометрия.

Централната симетрия, въртенето и хомотетията могат да се разглеждат като алгебрични операции в следния смисъл: Нека са дадени точките A, B и нека точката C е симетрична на A относно B. Тогава C е функция на точките A и B и ако въведем мултипликативно означение за тази функция, можем да запишем $C=A.B$. Аналогично $C=A\alpha B$ означава, че точката C е получена от точката A чрез завъртането ѝ около точката B на ъгъл α в положителната посока на равнината; $T=A\kappa B$ означава, че C е хомотетична на A относно центъра B с коефициент на хомотетия κ (черт. 1). За тези три алгебрични операции — централната симетрия, въртенето и хомотетията, могат да се подберат известен брой верни тъждества, които след това да бъдат

обявени за аксиоми. По този начин се получават три алгебрични системи и основна задача е аксиомите им така да бъдат подбрани, че в рамките на тези системи обратно да е възможно построяването на съдържателна геометрична теория.

В тази работа са разгледани и трите алгебрични системи и тъй като централната симетрия има по-проста природа в сравнение с въртенето и хомотетията, тя е разгледана на първо място и сравнително по-подробно. Това е направено, за да може от нея да се черпят аналогии при разработката на другите две системи. Първото място в реда на изложението е дадено на централната симетрия и по друга причина. Известно е, че централната симетрия се явява частен случай както на въртенето, така и на хомотетията. Последните могат да бъдат така обобщени, че това да не е в сила. Тогава е интересно какво ще бъде влиянието на централната симетрия върху геометрията на въртенето и хомотетията, когато поискаме последните да я съдържат като частен случай.



Черт. 1

Последната част на работата е посветена на общото разглеждане на въртенето и хомотетията. Оказва се, че геометрията на въртенето обхваща теорията на движенията в евклидовата равнина; геометрията на хомотетията представлява афинната геометрия, а синтезът на двете — евклидовата равнина. Въпросът за обхващане на някои от неевклидовите геометрии чрез подходящо изменение в аксиомите в тази работа не е разглеждан.

I. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЯ

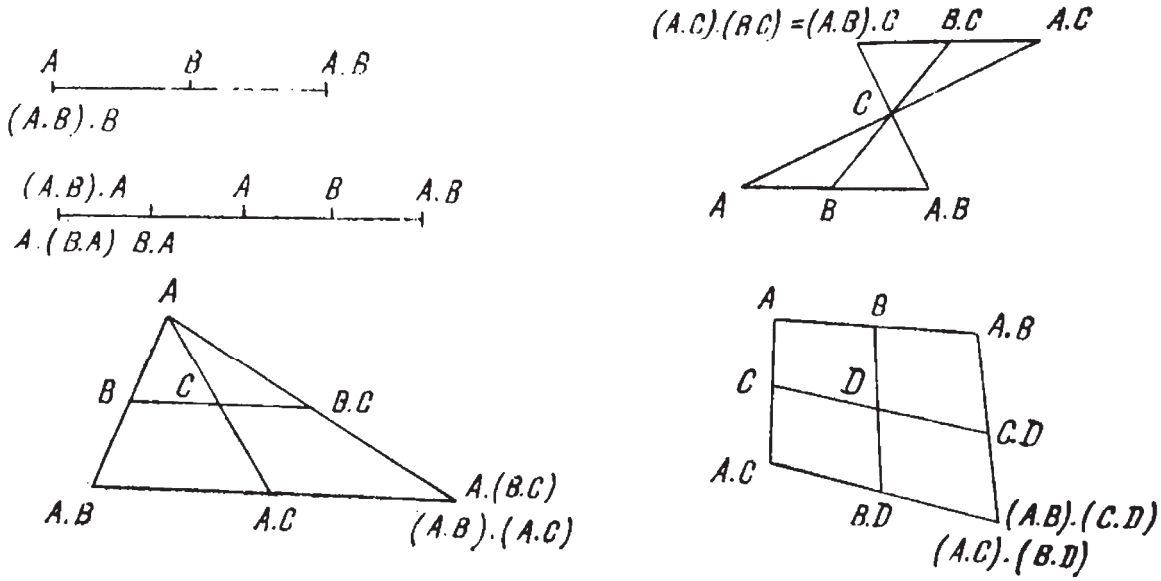
§ 1. Предварителни бележки

Нека са дадени точките A и B. Точката C се нарича **централно симетрична** на A относно B, ако B е среда на отсечката AC. Тогава пишем $C=A.B$ или $C=AB$. За така дефинираното умножение са очевидни например следните неща: $AA=A$ за произволна точка A; каквито и да са точките A и B, имаме $(AB)B=A$. Също така за произволни точки A и B съществува единствена точка X, така че $AX=B$ — това е средата на отсечката AB. По-неочаквани са например тъждествата: $(AB)A=A(BA)$, $A(BC)=(AB)(AC)$, $(AB)C=(AC)(BC)$, $(AB)(CD)=(AC)(BD)$, $((AB)C)D)=((AD)C)B$ и др., чиято геометрична природа се вижда от черт. 2. Всяко от тези тъждества отговаря на известна геометрична теорема, чието доказателство не представлява трудност. Ние обаче ще установим един общ метод за проверка на тъж-

дества от горния тип, който, макар и съвсем елементарен, ще бъде от принципна важност. Методът се базира на следните две основни теореми:

Първа основна теорема. Нека O е произволна точка. Необходимото и достатъчно условие точките P и Q да съвпадат е за векторите $[O, P]$ и $[O, Q]$ да е в сила $[O, P]=[O, Q]$.

Втора основна теорема. Нека O е произволна точка. Необходимото и достатъчно условие за $A.B=C$ е $[O, C]=2[O, B]-[O, A]$.



Черт. 2

Използването на тези две теореми за проверка на тъждества ще поясним с един пример. Нека извършим проверката на тъждеството $((AB)C)D=((AD)C)B$.

Полагаме $((AB)C)D=P$, $((AD)C)B=Q$. Ако O е някаква точка, по втора основна теорема ще имаме: $[O, P]=2[O, D]-(2[O, C]-(2[O, B]$

$$-[O, A]))=2[O, D]-2[O, C]+2[O, B]-[O, A]; \quad [O, Q]=2[O, B]$$

$$-(2[O, C]-(2[O, D]-[O, A]))=2[O, B]-2[O, C]$$

$$+2[O, D]-[O, A]=[O, P].$$

От равенството $[O, P]=[O, Q]$ по първа основна теорема следва $P=Q$, т. е. $((AB)C)D=((AD)C)B$. По същия начин може да бъде проверено всяко от горните тъждества, въобще всяко възможно тъждество.

Този резултат показва и един от пътищата за аксиоматизиране на понятието централна симетрия: трябва да се подберат такива аксиоми, които да гарантират дефиницията на понятието свободен вектор и валидността на първа и втора основна теорема. Последните ще осигурят в известен смисъл пълнотата на избраната система аксиоми.

С помощта на понятието централна симетрия може по два различни начина да се подходи към дефиницията на свободен вектор. Първият начин е традиционният: дефинират се най-напред насочени отсечки, като свободните вектори се явяват класове от еквиполентни помежду си насочени отсечки, докато при втория начин вместо със свободни вектори се работи с транслации. Тези два подхода изискват различни аксиоми, което дава възможност да се получат две различни системи аксиоми за алгебрата на централната симетрия.

§ 2. Аксиоми за алгебрата на централната симетрия (първи вариант)

Дефиниция 2. 1. Непразното множество S ще наричаме алгебра на централната симетрия, ако в него е дефинирана двуместна операция (.), удовлетворяваща следните аксиоми:

$S0$. Произведението $A.B$ е дефинирано за произволни A и B от S.

$S1$. $A.A=A$, $A \in S$.

$S2$. За всеки два елемента A и B от S съществува, и то само един елемент X от S, такъв, че $B.X=A$; бележим $X=A|B$.

$S3$. $((A.B)C).D=((A.D).C).B$ $A, B, C, D \in S$.

Елементите на S ще наричаме точки.

Ще изведем няколко формални следствия от аксиомите.

Следствие 2.1. $A|A=A$ за произволно $A \in S$.

Доказателство. По аксиома $S2$. $A|A$ е единственото решение на уравнението $A.X=A$. По аксиома $S1$. $X=A$, откъдето $A|A=A$.

Следствие 2.2. $(A.B).B=A$, $A|B=B|A$ за произволни A и B от S.

Доказателство. По аксиоми $S3$ и $S1$ имаме: $((A.B).B).A=((A.A).B).B=(A.B).B$, откъдето по $S2$ и следствие 1 имаме $A=((A.B).B)|((A.B).B)=(A.B).B$. Оттук лесно следва, че

$$A|B=B|A.$$

Следствие 2.3. Уравнението $X.B=A$ притежава еднозначно решение за произволни A и B от S.

Доказателство. Съществуване: Нека положим $X=A.B$. Тогава по следствие 2.2 $X.B=(A.B).B=A$, което показва, че $A.B$ е едно решение на уравнението. Единственост: нека $X_1.B=A$ и $X_2.B=A$. Като умножим отдясно с B, получаваме $A.B=(X_1.B).B=X_1$, $A.B=(X_2.B).B=X_2$, откъдето $X_1=X_2$.

Аксиома $S2$ и следствие 2.3 показват, че S е квазигрупа, а $S1$, че S е идемпотентна квазигрупа.

Дефиниция 2.2. Наредена двойка точки (A, B) ще наричаме насочена отсечка или свързан вектор. Точката C ще наричаме среда на насочената отсечка (A, B), ако $A.C=B$.

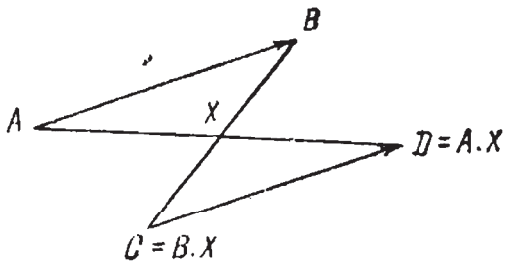
Следствие 2.4. Всяка насочена отсечка има единствена среда. Отсечките (A, B) и (B, A) имат обща среда.

Доказателството следва непосредствено от аксиома $S2$ и следствие 2.2.

Дефиниция 2.3. Насочената отсечка (A, B) ще наричаме равна (еквиполентна) на (C, D) точно тогава, когато отсечките (A, D) и (B, C) имат обща среда, т. е. когато съществува точка X, такава че $A.X=D$ и $B.X=C$. Равенството на (A, B) с (C, D) ще бележим така:

$$(A, B)\sim(C, D).$$

Геометричният смисъл на тази релация се вижда от черт. 3.



Черт. 3

Теорема 2. 1. Релацията равенство на две насочени отсечки е релация на еквивалентност.

Доказателство. 1. $(A, B)\sim(A, B)$. За да бъде в сила тази релация, трябва (A, B) и (B, A) да имат обща среда, което е осигурено от следствие 2. 4.

2. Ако $(A, B)\sim(C, D)$, то $(C, D)\sim(A, B)$. Наистина от $(A, B)\sim(C, D)$ следва, че (A, D) и (B, C) имат обща среда. По следствие 2. 4 имаме, че (A, D) има обща среда с (D, A), а (B, C) — с (C, B), от което следва, че (C, B) и (D, A) също имат обща среда.

3. Ако $(A, B)\sim(C, D)$; $(C, D)\sim(E, F)$, то $(A, B)\sim(E, F)$. От първото условие получаваме, че съществува точка X, така че да е в сила $A.X=D$ и $B.X=C$. От второто условие следва съществуването на точка Y с $C.Y=F$ и $D.Y=E$. Нека Z е такава точка, че да е в сила $B.Z=E$. Ще покажем, че $A.Z=F$. От горните условие следват още и равенствата $F=C.Y$, $C=B.X$, $B=E.Z$, $E.Y=D$, $D.X=A$, които, използувани в този ред, дават: $F=C.Y=(B.X).Y=((E.Z).X).Y=((E.Y).X).Z=(D.X).Z=A.Z$. В четвъртото равенство е използувана аксиомата $S3$. Равенствата $B.Z=E$ и $A.Z=F$ показват, че $(A, B)\sim(E, F)$.

Дефиниция 2. 4. Класовете, на които се разлага съвкупността на всички насочени отсечки чрез релацията $\sim$, ще наричаме свободни вектори или просто вектори. Свободните вектори ще бележим с малки латински букви a, b, c, p, q, r. Ако $(A, B)\in p$, то (A, B) ще наричаме представител на p и това ще бележим още така $p=[A, B]$.

Теорема 2.2 (теорема за нанасяне на вектори). Ако са дадени точките A, B и C, то съществува единствена точка D, така че

$$[A, B]=[C, D].$$

Доказателство. D трябва да удовлетворява системата уравнения $A.X=D$ и $B.X=C$. От второто уравнение намираме $X=C.B$, което, заместено с първото, дава $D=A.(C.B)=A.(B.C)$. Да допуснем съ-

ществуването на друга точка D_1, така че $[A, B]=[C, D_1]$. Тогава $[C, D]=[C, D_1]$, което означава, че съществува Y, такава, че $C.Y=D_1$, $D.Y=C$. Оттук получаваме $D_1=C.Y=(D.Y).Y=D$. С това между другото е установена и следната

Теорема 2. 3 (първа основна теорема). Нека O е произволна точка. Необходимото и достатъчно условие точките P и Q да съвпадат е $[O, P]=]O, Q]$.

Теорема 2. 4. Ако $[A, B]=[A', B']$, $[B, C]=[B', C']$, то $[A, C]=[A', C']$.

Доказателство. От условието имаме $A.X=B'$, $B.X=A'$, $B.Y=C'$, $C.Y=B'$. Нека $A.Z=C'$. Ще покажем, че $C.Z=A'$, откъдето ще следва $[A, C]=[A', C']$. Най-напред преобразуваме и разместваме горните равенства: $A'=B.X$, $B=C'.Y$, $C'=A.Z$, $A.X=B'$, $B'.Y=C$. Използувани в този ред, те дават $A'=B.X=(C'.Y).X=((A.Z).Y).X=((A.X).Y).Z=(B'.Y).Z=C.Z$. В четвъртото равенство е използувана аксиома $S3$.

Дефиниция 2. 5. Нека p и q са вектори. Ще дефинираме сума $p+q$ по следния начин. Нека $p=[A, B]$. По теоремата за нанасяне на вектори намираме точка C, така че $q=[B, C]$. Тогава полагаме

$$p+q=[A, C].$$

Теорема 2. 4 гарантира независимостта на сумата от избора на точката A.

Теорема 2. 5. Съвкупността на свободните вектори е абелева група по отношение на операцията събиране.

Доказателство. Нека $p=[A, B]$, $q=[B, C]$, $r=[C, D]$, тогава $(p+q)+r=([A, B]+[B, C])+[C, D]=[A, C]+[C, D]=[A, D]$, $p+(q+r)=[A, B]+([B, C]+[C, D])=[A, B]+[B, D]=[A, D]=(p+q)+r$. По-нататък ще използуваме означението $\underbrace{p+p+\ldots+p}_{k \text{ пъти}}=kp$. Векторът $[A, A]$ ще наричаме нулев и ще го означаваме с o. Равенството $[A, A]=[B, B]$ тривиално следва от дефиниция 2. 3. Тогава

$$p+o=[A, B]+[B, B]=[A, B]=p, \quad o+p=[A, A]+[A, B]=[A, B]=p.$$

Векторът $[B, A]$ ще наричаме обратен на вектора $[A, B]$. Ако

$$[A, B]=[A', B'],$$

то по следствие 2. 4 имаме $[B, A]=[B', A']$, т, е. обратният елемент не зависи от конкретния представител на $[A, B]$.

Ако $p=[A, B]$, то $[B, A]$ ще бележим с $-p$. Сега лесно се проверява, че $p+(-p)=(-p)+p=o$. Израза $p+(-q)$ ще бележим с $p-q$.

Остава да покажем, че $p+q=q+p$. Нека $p=[A, B]=[C, E]$, $q=[B, C]$. Тогава $p+q=[A, B]+[B, C]=[A, C]$, $q+p=[B, C]+[C, E]=[B, E]$.

Ще покажем, че $[A,C]=[B, E]$. От $[A, B]=[C, E]$ имаме $A.X=E$, $B.X=C$. От $B.X=C$ следва $C.X=B$, което заедно с $A.X=E$ дава $[A, C]=[B, E]$, т. е. $p+q=q+p$.

Теорема 2. 6 (втора основна теорема). За произволни точки O, A и B е в сила тъждеството $[O, A.B]=2[O, B]-[O, A]$.

Доказателство. $2[O, B]-[O, A]=[O, B]+[O, B]+[A, O]=[O, B]+[A, O]+[O, B]=[O, B]+[A, B]=[O, B]+[B, A.B]=[O, A.B]$. В предпоследното равенство е използувано тъждеството $[A, B]=[B, A.B]$, което се установява лесно.

С помощта на първа и втора основна теорема може да се установява валидността на произволни тъждества, съдържащи операцията (.), по начина, посочен в § 1. Тъй като след малко ще използуваме тъждеството $A.(B.C)=(A.B).(A.C)$ (което се нарича ляв дистрибутивен закон [5]), да установим неговата вярност. По втора основна теорема имаме

$$[O, A.(B.C)]=2[O, B.C]-[O, A]=2(2[O, C]-[O, B])-[O, A]$$
$$=4[O, C]-2[O, B]-[O, A],\ [O, (A.B).(A.C)]=2[O, A.C]-[O, A.B]$$
$$=2(2[O, C]-[O, A])-(2[O, B]-[O, A])=4[O, C]-2[O, B]-[O, A]$$
$$=[O, A.(B.C)].$$

Получихме $[O, A.(B.C)]=[O, (A.B).(A.C)]$. По първа основна теорема имаме $A.(B.C)=(A.B).(A.C)$.

По същия начин се получават и десният дистрибутивен закон $(A.B).C=(A.C).(B.C)$, медиалното тъждество (вж. [4]) $(A.B).(C.D)=(A.C).(B.D)$ и др. Втората основна теорема обаче не може да се прилага за установяване на тъждества, в които участвува производната операция „ “. За да разпространим метода и към такива тъждества, ще установим някои допълнителни свойства на операцията събиране на свободни вектори.

Теорема 2. 7. Ако p е вектор, то уравнението $x+x=p$ има единствено решение, което ще бележим с $\frac{p}{2}$ или $\frac{1}{2}p$. Ако p и q са вектори, то $\frac{p+q}{2}=\frac{p}{2}+\frac{q}{2}$, $\frac{-p}{2}=-\frac{p}{2}$.

Доказателство. Нека $p=[A, B]$ и C е среда на отсечката (A, B), т. е. $A.C=B$. Последното равенство заедно с $C.C=C$ показва, че $[A, C]=[C, B]$. Нека положим $x=[A, C]=[C, B]$. Тогава $x+x=[A, C]+[C, B]=[A, B]=p$. Да допуснем, че x_1 е друго решение на горното уравнение. Нека нанесем x_1 от точка A до точка C_1 и от C_1 до B_1, т. е. $x_1=[A, C_1]=[C_1, B_1]$. Имаме тогава $x_1+x_1=[A, C_1]+[C_1, B_1]=[A, B_1]$. Но $x_1+x_1=p=[A, B]$, откъдето $B_1=B$. Тогава $x_1=[A, C_1]=[C_1, B]$, което е равносилно на равенствата $A.C=B, C_1.C=C_1$. От последното равенство следва, че $C=C_1$, $C_1=C_1$, което, заместено в израза за x_1, дава $x_1=[A, C_1]=[A, C]=x$.

Нека $p=[A, B]$, $q=[B, C]$, а M, N, P са съответно средите на (A, B), (B, C) и (A, C) (вж. черт. 3). Тогава $\frac{p+q}{2}=[A, P]$, $\frac{p}{2}=[A, M]$, $\frac{q}{2}=[B, N]$. Твърдението ще бъде установено, ако докажем, че

$$[B.N]=[M, P].$$

Имаме равенствата $A.M=B$, $B.N=C$, $A.P=C$. Нека $B.X=P$. Ще покажем, че $N.X=M$. Имаме $A=C.P=(B.N).(B.X)=B.(N.X)$; използувани са трето, второ, четвърто равенство и левият дистрибутивен закон. От $A.M=B$ следва $A=B.M$, което заедно с равенството $A=B.(N.X)$ дава $M=N.X$; с това и второто твърдение е установено.

На доказателството на равенството $\frac{-p}{2}=-\frac{p}{2}$ няма да се спираме.

Теорема 2. 8 (трета основна теорема). Ако O, A и B са произволни точки, то в сила е тъждеството

$$[O, A|B]=\frac{1}{2}([O, A]+[O, B])=\frac{1}{2}[O, A]+\frac{1}{2}[O, B].$$

Доказателство. От равенството $B.(A|B)=A$ по втора основна теорема имаме $[O, A]=[O, B(A|B)]=2[O, A|B]-[O, B]$, откъдето по теорема 2. 7 се получава исканото равенство.

Да използуваме сега трите основни теореми за проверка на тъждество, което съдържа и двете действия например $(A|B).(C|D)=(A.C)|(B.D)$. Имаме $[O, (A|B)(C|D)]=2[O, C|D]-[O, A|B]$

$$=2.\frac{1}{2}([O, C]+[O, D])-\frac{1}{2}([O, A]+[O, B])=[O, C]+[O, D]$$

$$-\frac{1}{2}[O, A]-\frac{1}{2}[O, B],\ [O, (AC)|(B.D)]=\frac{1}{2}([O, A.C]+[O, B.D])$$

$$=\frac{1}{2}(2[O, C]-[O, A]+2[O, D]-[O, B])=[O, C]-\frac{1}{2}[O, A]+[O, D]$$

$$-\frac{1}{2}[O, B]=[O, (A|B).(C|D)].$$

По първа основна теорема $(A|B).(C|D)=(A.C)|(B.D)$.

Можем да си зададем въпроса, дали например равенството $A.B=B.A$ е изводимо от аксиомите. Нека приложим първа основна теорема. Имаме $[O, A.B]=2[O, B]-[O, A]$; $[O, B.A]=2[O, A]-[O, B]$, откъдето $2[O, B]-[O, A]=2[O, A]-[O, B]$. Получихме равенство, което не е тъждество. От това равенство обаче следва $3[O, B]=3[O, A]$, откъдето лесно можем да направим погрешния извод, че $[O, B]=[O, A]$, а оттук и $B=A$. Следният пример ни убеждава, че от $A.B=B.A$ не следва $A=B$.

Нека за елементи на S служат върховете на равностранен $\triangle A_1A_2A_3$, вписан в окръжност. A_iA_j дефинираме по следния начин. От двете дъги $\widehat{A_iA_j}$ избираме по-късата и я нанасяме от точка A_j до точка A_k в посока от A_i към A_j. Полагаме $A_iA_j = A_k$. Че така дефинираното умножение удовлетворява аксиомите $S0$, $S1$, $S2$, $S3$, се проверява лесно. Тук обаче е в сила $A.B = B.A$, без да е необходимо за това $A = B$. Например: $A_1.A_2 = A_2.A_1 = A_3$, $A_1 \neq A_2$.

От този пример се вижда, че съществуват и крайни алгебри на централната симетрия. За тях е в сила следната

Теорема 2. 9. Ако S има краен брой точки, то той е нечетно число.

За всяко нечетно n съществува крайна алгебра на централната симетрия с брой на точките n.

Доказателство. Ще докажем най-напред, че ако $A \neq B$ и $A.B = C$, то A, B, C са различни. Да допуснем, че $A = C$. Тогава

$$B = A\ C = A\ A = A$$

в противоречие с $B \neq A$. Аналогично се показва, че $B \neq C$. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са елементите на S. Нека на всяка точка съпоставим симетричната ѝ спрямо A_1. Тогава, ако на A_i симетричната е A_j, то на A_j симетричната ще бъде A_i; при това, ако $A_i \neq A_1$, то $A_j \neq A_1$ и $A_i \neq A_j$. Оттук следва, че като махнем от S точката A_1 (която е симетрична на себе си), остават четен брой точки. Следователно n е нечетно число. (Идеята за това доказателство е заета от [11]).

Ако n е нечетно число, то алгебра S с брой на елементите n построяваме така: за елементи на S вземаме върховете $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на правилен n-ъгълник, вписан в окръжност. Произведението $A_i.A_j$ дефинираме, както в предишния пример. Проверката на аксиомите не изисква особени усилия.

§ 3. Аксиоми на централна симетрия (втори вариант)

В този параграф ще изградим същата теория, като тръгнем от други аксиоми, и вместо с понятието свободен вектор ще работим с понятието транслация.

За аксиоми избираме $S0$, $S1$ и $S2$, а вместо $S3$ вземаме

$S3'$ $(A.B).(C.D) = (A.C).(B.D)$ — медиалният закон и

$S3''$ $(A.B).B = A$.

Че от старата система аксиоми следва новата, видяхме в § 2, където $S3'$ и $S3''$ бяха следствия от аксиомите. Че от $S3'$ и $S3''$ следва $S3$, е установено в [8; теор. 13. 4].(В [8] S е наречено обикновено централно симетрично пространство.) За пълнота привеждаме съответния извод:

Следствие 3. 1. За произволни A, B, C, D е в сила $((A.B).C).D = ((A.D).C).B$.

Доказателство. Имаме $((A.B).C).D=((A.B).C).((D.C).C)$

$$=((A.B).(D.C)).(C.C)=((A.D).(B.C)).(C.C)=((A.D).C).((B.C).C)$$

$$=((A.D).C).B.$$

В случая важна е обаче не еквивалентността на двете системи, а това, че от втората може да се стигне до трите основни теореми, като се използува една друга геометрична идея.

Дефиниция 3. 1. Нека A е фиксирана точка. Преобразуването, при което на всяка точка X от S съпоставяме точката $X.A$, ще наричаме централна симетрия с център A. Бележим го σ_A. Произведението на две централни симетрии σ_A и σ_B се нарича транслация и се бележи $\tau_{A,B}$. Имаме следователно $\tau_{A,B}=\sigma_A\sigma_B$.

Теорема 3. 1. Ако S има поне две различни точки, то никоя транслация не е централна симетрия. Произведението на три централни симетрии е централна симетрия. Произведението на две транслации е транслация. $\sigma_A\sigma_B\sigma_C=\sigma_C\sigma_B\sigma_A$.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват точки A, B и C, такива, че $\tau_{A,B}=\sigma_C$. Тогава $A\tau_{A,B}=(A.A).B=A.B$, $A\sigma_C=A.C$, откъдето $B=C$ и $\tau_{A,B}=\tau_{A,C}$. Също така $C\tau_{A,C}=(C.A).C$, $C\sigma_C=C.C=C$. От равенството $(C.A).C=C$ следва $C.A=C$, от което намираме $A=C$. Получаваме $\tau_{A,B}=\tau_{C,C}$. Нека X е произволна точка. Тогава

$$X\tau_{C,C}=(X.C).C=X,\ X\sigma_C=X.C.$$

От равенството $X.C=X$ следва $X=C$, което противоречи на предположението, че имаме поне две различни точки.

Ще покажем, че за всеки три точки A, B и C съществува, и то само една, точка D, така че $\sigma_A\sigma_B\sigma_C=\sigma_D$. Нека P е такава точка, че $A.P=C$. Тогава полагаме $D=B.P$. Ако X е произволна точка, то

$$X\sigma_A\sigma_B\sigma_C=((X.A).B).C=((X.A).B).(A.P)=((X.A).A).(B.P)$$

$=X.D=X\sigma_D$. Нека $\sigma_D=\sigma_{D'}$. Тогава $D\sigma_D=D.D=D$, $D\sigma_{D'}=D.D'$. От $DD'=D$ следва $D=D'$.

Оттук веднага имаме, че произведението на две транслации е транслация.

Тъждеството $\sigma_A\sigma_B\sigma_C=\sigma_C\sigma_B\sigma_A$ е друго записване на тъждеството $S3.((X.A).B).C=((X.C).B).A$.

Теорема 3. 2. За всеки три точки A, B и C съществува, и то само една, точка D, така че $\tau_{A,B}=\tau_{C,D}$.

Доказателство. Нека D е такава точка, че $\sigma_C\sigma_A\sigma_B=\sigma_D$. Тогава $\tau_{C,D}=\sigma_C\sigma_D=\sigma_C\sigma_C\sigma_A\sigma_B=\sigma_A\sigma_B=\tau_{A,B}$. Използувано е, че произведението $\sigma_C\sigma_C$ е идентитетът. Нека $\tau_{C,D}=\tau_{C,D'}$. Тогава $\sigma_C\sigma_D=\sigma_C\sigma_{D'}$, което, умножено отляво със σ_C, дава $\sigma_D=\sigma_{D'}$, следователно и $D=D'$. С това е доказана и следната

Теорема 3. 3 (първа основна теорема). Нека O е произволна точка. Необходимото и достатъчно условие за $A=B$ е $\tau_{O,A}=\tau_{O,B}$.

Теорема 3. 4. Съвкупността на всички транслации е абелева група. За всяка транслация a съществува, и то само една, транслация x такава, че $xx=a$ (бележим: $x=\sqrt{a}$). За всеки две транслации a и b имаме $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{a^{-1}}=(\sqrt{a})^{-1}$.

Доказателство. Вече установихме, че произведение на две транслации е транслация. Идентитетът i е също транслация, защото $i=\tau_{A,A}=\tau_{B,B}$. Всяка транслация притежава обратна. На $\tau_{A,B}$ обратната е $\tau_{B,A}$. Ще покажем, че $\tau_{A,B}\tau_{C,D}=\tau_{C,D}\tau_{A,B}$. Имаме $\tau_{A,B}\tau_{C,D}=\sigma_A\sigma_B\sigma_C\sigma_D$ $=\sigma_C\sigma_B\sigma_A\sigma_D=\sigma_C\sigma_D\sigma_A\sigma_B=\tau_{C,D}\tau_{A,B}$.

Нека $a=\tau_{A,B}$ и $A.C=B$. Тогава за произволна точка Y имаме $(Y.C).B=(Y.C).(A.C)=(Y.A).(C.C)=(Y.A).C$, което показва, че $\tau_{A,C}=\tau_{C,B}$. Полагаме $x=\tau_{A,C}=\tau_{C,B}$. Тогава $x.x=\tau_{A,C}\tau_{C,B}=\sigma_A\sigma_C\sigma_C\sigma_B$ $=\sigma_A\sigma_B=\tau_{A,B}=a$. Останалата част от доказателството лесно се провежда по аналогия с теорема 2. 7. Също така лесно се установява и теорема 3. 5 (втора основна теорема). За произволни точки O, A, B е в сила тъждеството $\tau_{O,C}=\tau^2_{O,B}\tau^{-1}_{O,A}$, където $C=A.B$.

С това завършва интересната част от теорията, която може да се развие, като се тръгне от системата аксиоми $S0$, $S1$, $S2$, $S3'$ и $S3''$. Оказа се, че $S3$ е еквивалентна на $S3'$ и $S3''$ въз основа на останалите аксиоми. При това лесно може да се посочи пример, от който да се вижда, че от $S3'$ без $S3''$ не следва $S3$.

Ако разглеждаме двете системи аксиоми просто като формулировки на абстрактни алгебрични структури, без да се интересуваме от конкретната геометрична интерпретация, която им беше дадена и без метатеоретичното значение на трите основни теореми, е трудно да се установи тяхната еквивалентност. Наистина от втората система с помощта на следствие 3. 1 лесно следва първата система аксиоми. Но обратното не е тривиално. За да се види това, ще посочим един директен извод на $S3'$ от $S0$, $S1$, $S2$, $S3$ и $S3''$ ($S3''$ следва от $S0$, $S1$, $S2$ и $S3$ — следствие 2. 2).

По S2 съществува X, така че $(B.C).X=(A.B).C$. Това равенство, използувано в очевидното тъждество $(((((A.B).C).C).B).C).(B.C)$ $=(A.C).(B.C)$, дава $(A.C).(B.C)=(((((B.C).X).C).B).C).(B.C)$

$$=(((((B.C).X).C).(B.C)).C).B=(((((B.C).(B.C)).C).X).C).B$$
$$=((((B.C).C).X).C).B=((B.X).C).B=((B.B).C).X=(B.C).X$$
$$=(A.B).C.$$

Медиалният закон сега се получава така:

$$(A.B).(C.D)=(((A.B).D).D).(C.D)=(((A.B).D).C).D$$

$=(((A.C).D).B).D=(((A.C).D).D).(B.D)=(A.C).(B.D)$. Дистрибутивният закон е използуван във второто и четвъртото равенство.

Ще завършим този параграф със забележката, че $S3'$ е еквивалентна въз основа на останалите аксиоми на твърдението, че произведението на три централни симетрии е централна симетрия, т. е. че

от уравнението $((A.B).C).D=A.X$ точката X зависи само от точките B, C, D. Еквивалентността ще бъде установена, ако успеем да докажем $S3$, от което се получава първата система аксиоми. Наистина $(((((A.B).C).D).B).C).D=(A.E).E=A$, откъдето чрез трикратно прилагане на $S3''$ получаваме $((A.B).C).D=((A.D).C).B$.

§ 4. Геометрия на медиалните квазигрупи*

Едно обобщение на алгебрата на централната симетрия се получава, като в системата аксиоми $S0, S1$, $S2$, $S3'$, $S3''$ заменим $S3''$ с твърдението: „уравнението $Y.B=C$ има единствено решение за произволни B и C на S". В такъв случай S се превръща в идемпотентна медиална квазигрупа. Ако изоставим идемпотентния закон, S остава само медиална квазигрупа. Белоусов в [5] установява сводимостта на идемпотентните медиални квазигрупи към абелеви групи. Тойода в [12] установява същото за медиалните квазигрупи. Оказва се, че геометричната теория, развита в предните два параграфа, може да се пренесе и в произволна медиална квазигрупа и чрез нея да се даде просто геометрично доказателство на теоремата на Тойода, от която следват както резултатът на Белоусов от [5], така и втора основна теорема от § 2 или § 3.

И така нека S е медиална квазигрупа. Решенията на уравненията $X.B=C$ и $A.Y=C$ ще бележим съответно с $X=C/B$ и $Y=A\backslash C$. Непосредствено от дефиницията получаваме следните тъждества:

Следствие 4. 1. $A(A\backslash C)=C$, $(C/B).B=C$, $A\backslash(A.B)=B$, $(A.B)/B=A$, $C/(A\backslash C)=A$, $(C/B)\backslash C=B$.

Следствие 4. 2. За произволни точки A, B, C, D са в сила тъждествата 4. 2. 1. $(A.B)/(C.D)=(A/C).(B/D)$,

4. 2. 2. $((A.B)/C).D=((A.D)/C).B$,

4. 2. 3. $((A/B).C)/D=((A/D).C)/B$.

Доказателство. Нека $A/C=X$ и $B/D=Y$. Тогава $X.C=A$ и $Y.D=B$. Имаме също $(X.Y).(C.D)=(X.C).(Y.D)=A.B$, откъдето $X.Y=(A.B)/(C.D)$. Но $X.Y=(A/C).(B/D)$. Оттук и $(A.B)/(C.D)=(A/C).(B/D)$.

Тъждеството 4. 2. 2. извеждаме така: $((A.B)/C).D)=((A.B)/C).$

$$((D.C)/C)=((A.B).(D.C))/(C.C)=((A.D).(B.C))/(C.C)$$

$=((A.D)/C).((B.C)/C)=((A.D)/C).B$. Използувано е тъждеството 4. 2. 1. във второто и четвъртото равенство, а в останалите равенства — медиалният закон и четвъртото тъждество от следствие 4. 1. Тъждеството 4. 2. 3. се извежда по аналогия с 4. 2. 2.

Дефиниция 4. 1. Точковото преобразуване $X.A$ ще наричаме симетрия и ще бележим със σ_A. Преобразуването σ_A^{-1} ще наричаме

* На въпроси от геометрията на медиалните квазигрупи е посветена статията на Пухарев [9].

симетрия, обратна на σ_A. Произведението $\sigma_A \sigma_B^{-1}$ ще наричаме транслация и ще бележим с τ_{AB}. (Естествено е и $\sigma_A^{-1}\sigma_B$ да наречем транслация, но ние с тази транслация няма да работим.) Транслациите ще бележим с малки латински букви.

Нека отбележим, че $X\sigma_A^{-1}=X/A$, $X\sigma_A\sigma_A^{-1}=X\sigma_A^{-1}\sigma_A=X$, т. е. τ_{AA} е идентитетът в S, който ще бележим с ι.

Теорема 4. 1. В сила са тъждествата $\sigma_A\sigma_B^{-1}\sigma_C=\sigma_C\sigma_B^{-1}\sigma_A$, $\sigma_A^{-1}\sigma_B\sigma_C^{-1}=\sigma_C^{-1}\sigma_B\sigma_A^{-1}$. За всеки три точки A, B, C съществува точно една точка D, така че $\tau_{A,B}=\tau_{C,D}$. Произведението на две транслации е транслация.

Доказателство. Първите две тъждества са друг запис на тъждествата 4. 2. 2. и 4. 2. 3 от следствие 4. 2.

Нека положим $D=(B/A).((A/A)\backslash C)$. Тогава, ако X е произволна точка, имаме $X\tau_{CD}=(X.C)/D=(X.C)/((B/A).((A/A)\backslash C))$

$$=(X/(B/A)).(C/((A/A)\backslash C))=(X/(B/A)).(A/A)=(X.A)/((B/A).A)$$

$=(X.A)B=X\tau_{A,B}$, откъдето $\tau_{A,B}=\tau_{C,D}$. Единствеността на D следва тривиално.

Нека a и b са транслации и нека $a=\tau_{A,B}$. Тогава по доказаното преди малко съществува точка C, така че $b=\tau_{B,C}$ и $ab=\tau_{A,B}\tau_{BC}=\sigma_A\sigma_B^{-1}\sigma_B\sigma_C^{-1}=\sigma_A\sigma_C^{-1}=\tau_{A,C}$.

Теорема 4. 2. Транслациите образуват абелева група.

Доказва се по аналогия с теорема 3. 4.

Оттук до края на този параграф означението $\tau_{A,B}$ за транслация заменяме с $[A, B]$. Произведението на две транслации преименуваме на сума, за която възприемаме обичайното адитивно записване. Транслацията $[A, A]$ ще бележим с o, $-[A, B]$ ще бъде $[B, A]$. При това записване, което напомня за тясната връзка на транслацията с векторите, ще имаме $[A, B]+[B, C]=[A, C]$.

Ще докажем следната

Теорема 4. 3.

1) $[A, B]+[C, D]=[A, (D/C).((C/C)\backslash B)]=[A, (B/C).((C/C)\backslash D)]$.

2) Ако $[A, B]=[C, D]$, то за всяка точка X е в сила $(X/A).B=(X/C).D$.

3) Ако $[A, B]=[C, D]$, то $[A.A, B.A]=[C.C, D.C]$ и

$$[A, (A/A).B]=[C, (C/C).D].$$

4) $[A.A, B.A]+[B.B, C.B]=[A.A, C.A]$.

5) $[A, (A/A).B]+[B, (B/B).C]=[A, (A/A).C]$.

Доказателство. 1) Търсим точка E, така че $[C, D]=[B, E]$. По теорема 4. 1 $E=(D/C).((C/C)\backslash B)$, откъдето $[A, B]+[C, D]=[A, B]+[B, E]=[A, E]=[A, (D/C).((C/C)\backslash B)]$. Ще докажем, че $[A, B]+[C, D]=[A, D]+[C, B]$. Наистина $[A, B]+[C, D]-[A, D]-[C, B]=[A, B]+[C, D]+[D, A]+[B, C]=[A, A]=o$, откъдето следва горното равенство. Тогава $[A, B]+[C, D]=[A, D]+[C, B]=[A, (B/C).((C/C)\backslash D)]$.

2) От $[A, B]=[C, D]$ следва $[B, A]=[D, C]$, което означава

$$\sigma_B\,\sigma_A^{-1}=\sigma_D\,\sigma_C^{-1}.$$

От последното равенство получаваме

$$\sigma_A^{-1}=\sigma_B^{-1}\sigma_D\,\sigma_C^{-1}=\sigma_C^{-1}\sigma_D\,\sigma_B^{-1}\quad \sigma_A^{-1}\sigma_B=\sigma_C^{-1}\sigma_D\,\sigma_B^{-1}\sigma_B=\sigma_C^{-1}\sigma_D.$$

Полученото равенство $\sigma_A^{-1}\sigma_B=\sigma_C^{-1}\sigma_D$ означава, че за произволна точка X е в сила $(X/A).B=(X/C).D$.

3) От $[A, B]=[C, D]$ следва $[B, A]=[D, C]$, а от 2) за произволна точка $X(X/B).A=(X/D).C$. Също така

$$(X.(A.A))/(B.A)=(X/B).((A.A)/A)=(X/B).A,\quad (X(C.C))/(D.C)$$
$$=(X/D).((C.C)/C)=(X/D).C.$$

Оттук получаваме

$$(X.(A.A))/(B.A)=(X.(C.C))/(D.C),$$

което означава, че $[A.A, B.A]=[C.C, D.C]$. За да установим следващото равенство, използуваме 1):—$[A,(A/A).B]+[C,(C/C).D]=[(A/A).B, A]+[C, (C/C).D]=[(A/A).B, (A/C).(C/C)\setminus((C/C).D))]=[(A/A).B, (A/C).D]$. От $[A, B]=[C, D]$ по 2) следва $(X/A).B=(X/C).D$ за произволно X. Тогава при $X=A$ имаме $(A/A).B=(A/C).D$, което показва, че

$$[(A/A).B,\ (A/C).D]=o.$$

4) Ще покажем най-напред, че $[B.B, C.B]=[B.A, C.A]$. Имаме

$$(X.(B.B))/(C.B)=(X/C).((B.B)/B)=(X/C).B.$$
$$(X.(B.A))/(C.A)=(X/C).(B.A)/A)=(X/C).B.$$

откъдето $(X.(B.B)/(C.B)=X.(B.A))/(C.A)$ за произволна точка X. Тогава $[A.A,B.A]+[B.B, C.B]=[A.A, B.A]+[B.A, C.A]=[A.A,C.A]$.

5) Като използуваме 1), получаваме $[A, (A/A).B]+[B, (B/B).C]=[A, (((A/A).B)/B).((B/B)\setminus((B/B).C))]=[A, (A/A).C]$.

Теорема 4. 4. Нека p е произволна транслация. Дефинираме съответствията φ и ψ в съвкупността на всички транслации така: ако $p=[A, B]$, полагаме $\varphi(p)=[A.A, B.A]$ и $\psi(p)=[A, (A/A).B]$. (Теорема 4. 3. 3. гарантира еднозначността на тези съответствия.) Твърди се, че φ и ψ са автоморфизми на групата на всички транслации: при това $\varphi.\psi=\psi.\varphi$.

Доказателство. От 4) и 5) на теорема 4. 3 следва, че φ и ψ са ендоморфизми, а че те са обратими съответствия, се проверява непосредствено. Нека $p=[A, B]$. Тогава $\varphi\psi p=[A.A, ((A/A).B).A]$, а $\psi\varphi p=[A.A, ((A.A)/(A.A)).(B.A)]$. Имаме обаче $((A.A)/(A.A)).(B.A)=((A/A).(A/A)).(B.A)=((A/A).B).((A/A).A)=((A/A).B).A$, което доказва равенството $\varphi\psi=\psi\varphi$.

Теорема 4. 5. За произволни точки O, A и B е в сила тъждеството $[O, A.B]=\varphi[O, A]+\psi[O, B]+[O, O.O]$.

Доказателство. $\varphi[O, A]+\psi[O, B]+[O, O.O]=[O.O, A.O]+[O, (O/O).B]+[O, O.O]=[O, A.O]+[O, (O/O).B]=[O, ((A.O)/O).((O/O)\backslash((O/O).B))]=[O, A.B]$.

Теорема 4. 5. е един от вариантите на известната теорема на Тойода за медиалните квазигрупи, чрез която последните се свеждат към абелеви групи. Чисто алгебрично доказателство на теоремата на Тойода може да се намери и в [4], като там са дадени указания и за други източници.

Нека видим какво дава теорема 4. 5, когато е изпълнена още и $S1 . [A.A=A]$ за всяко A. Тогава $\varphi[O, A]=[O, A.O]$, $\psi[O, B]=[O, O.B]$, $[O, O.O]=[O, O]=o$, откъдето $[O, A.B]=[O, A.O]+[O, O.B]$. Специално $[O, B]=[O, B.B]=[O, B.O]+[O, O.B]$, откъдето $[O, O.B]=[O, B]-[O, B.O]$. Оттук се получава $[O, A.B]=\varphi[O, A]-\varphi[O, B]+[O, B]$. Ако автоморфизма φ интерпретираме като разтягане на вектора, към който се прилага, то горната формула изразява хомотетия с център B и коефициент φ. Ако φ интерпретираме като ъгъл на въртене на вектора, към който φ се прилага, тогава същата формула изразява въртене на точката A около центъра B на ъгъл φ в някаква фиксирана посока. И двете тълкувания в този случай оправдават названието на σ_A като симетрия, защото и хомотетията, и въртенето са естествени обобщения на централната симетрия в евклидовата равнина. И наистина, ако предположим още и валидността на

$$S3''.(A.B).B=A,$$

получаваме $\varphi[O, A]=-[O, A]$, а $\psi[O, B]=2[O, B]$, от което следва формулата за централната симетрия $[O, A.B]=2[O, B]-[O, A]$. Разбира се, тези тълкувания са възможни само ако е в сила идемпотентният закон $S1$. Ще покажем, че подобни геометрични тълкувания за автоморфизмите φ и ψ са валидни и в произволна медиална квазигрупа.

В S дефинираме две нови операции, които ще бележим $A\varphi B$ и $A\psi B$ по следния начин: Нека O е фиксирана точка. Полагаме

$$[O, A\varphi B]=\varphi([O, A]-[O, B])+[O, B],$$

$$[O, A\psi B]=\psi([O, A]-[O, B])+[O, B].$$

Може да се провери, че така дефинираните операции не зависят от точката O. Например за втората операция това се проверява така:

$$[O, A\psi B]=\psi([O, A]-[O, B])+[O, B]=\psi[B, A]+[O, B]=[B, (B/B)A]$$
$$+[O, B]=[O, (B/B)A],$$

откъдето получаваме, че $A\psi B=(B/B).A$. Лесно се установява, че операциите $A\varphi B$ и $A\psi B$ са квазигрупи идемпотентни и медиални, като освен това са свързани и със следния обобщен медиален закон:

$$(A\varphi B)\psi(C\varphi D)=(A\psi C)\varphi(B\psi C).$$

Като се използват тези неща, се установява

Теорема 4. 6. За произволни точки O, A и B е в сила тъждеството $[O, A.B]=[O, A\varphi O]+[O, B\psi O]+[O, O.O]$.

Като имаме пред вид даденото геометрично тълкуване на φ и ψ в идемпотентния случай, е ясно какъв е геометричният смисъл на горното равенство. Теорема 4. 6 показва още, че всяка медиална квазигрупа е съставена по един определен начин от две идемпотентни и медиални квазигрупи, свързани помежду си с обобщения медиален закон. Теорема 4. 6 показва, че отказът от условието за идемпотентност не представлява съществено обобщение на операцията централна симетрия, докато отказът от аксиомата $S3''$ води вече до истинско обобщение: преобразуването $X.A=X\sigma_A$ може да се тълкува като въртене около точката A или като хомотетия с център A.

Следващите две части в изложението са посветени именно на въртенето и хомотетията.

II. ВЪРТЕНЕ ОКОЛО ТОЧКА

§ 5. Предварителни бележки

Вече казахме какво означава $A\alpha B$: ако A и B са точки в някаква равнина, в която е избрана положителна посока на въртене, то $A\alpha B$ е точка, която се получава от завъртането в положителната посока на точката A около точката B на ъгъл α. За така дефинираната тричленна алгебрична операция са в сила например следните тъждества:

$$A\alpha A=A,\ A\circ B=A,\ (A\alpha B)\beta B=A(\alpha+\beta)B,$$

$$(A\,0\,B)\beta(C\alpha D)=(A\beta C)\alpha(B\beta D)$$

и др. Нашата цел ще бъде да подберем известен брой такива тъждества, които да играят ролята на аксиоми за алгебрата на въртенето. Следователно ходът на изложението ще бъде аналогичен на този от част I. Ще спестим само бележките от съдържателен характер.

§ 6. Аксиоми на въртенето

Дефиниция 6. 1. Нека са дадени две непразни множества S и R. Елементите на S ще наричаме точки и ще ги бележим с главни латински букви $A, B, C, \ldots$ Елементите на R ще наричаме ъгли и ще ги бележим с малки гръцки букви $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ В съвкупността на точките и ъглите е дефинирана една тричленна алгебрична операция, наречена въртене, първият и третият аргумент на която са точки, а вторият — ъгъл. Ако A и B са точки, а α — ъгъл, резултатът от операцията е точка, която ще бележим с $A\alpha B$. Съвкупностите S и R заедно с операцията въртене ще наричаме алгебра на въртенето, ако са в сила следните аксиоми:

$R0$. $A\alpha B$ е дефинирана за произволни A и B от S и α от R.

$R1$. Ако $A \neq B$ и $A\alpha B = A\beta B$, то $\alpha = \beta$. S има поне два елемента.

$R2$. Съществува елемент $o \in R$ такъв, че $AoB = A$ за произволни A и B от S. R има поне два елемента.

$R3$. За всеки елемент α съществува елемент $-\alpha$, такъв, че

$$(A\alpha B)(-\alpha)B = A$$

за произволни A и B от S.

$R4$. За всяка наредена двойка (α, β) от елементи на R съществува, и то само един елемент $\gamma \in R$, такъв, че $(A\alpha B)\beta B = A\gamma B$.

$R5$. $A\alpha A = A$ за произволни $A \in S$, $\alpha \in R$.

$R6$. $(A\alpha B)\beta(C\alpha D) = (A\beta C)\alpha(B\beta D)$ за произволни A, B, C, D от S и α, β от R.

$R7$. Ако $\alpha \neq o$, то за всяка наредена двойка елементи A и B от S съществува точно един елемент $X \in S$, такъв, че $B\alpha X = A$. Бележим $X = A\ \alpha B$.

Аналогични алгебрични системи са разгледани в [6], като онези, за които е изпълнена аксиомата $R4$, са наречени S-системи, а самата $R4$ — ляво обобщено тъждество на Stein.

Дефиниция 6. 2. Еднозначно съществуващия ъгъл γ от аксиома $R4$ ще наричаме сума на ъглите α и β и ще го бележим с $\gamma = \alpha + \beta$. Тогава $R4$ добива вида $(A\alpha B)\beta B = A(\alpha+\beta)B$.

Теорема 6. 1. R заедно с операцията събиране на ъгли е абелева група.

Доказателство. Нека A и B са различни точки. Такива има по $R1$. По $R4$ имаме $A((\alpha+\beta)+\gamma)B = A(\alpha+\beta)B\gamma B = ((A\alpha B)\beta B)\gamma B$

$$= (A\alpha B)(\beta+\gamma)B = A(\alpha+(\beta+\gamma))B.$$

Понеже $A \neq B$, от $R1$ следва $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$. За нулев елемент на групата избираме елемента o от $R2$. По $R4$ и $R2$ имаме

$$A(\alpha+o)B = (A\alpha B)oB = A\alpha B,$$

откъдето по $R1$ $\alpha+o=\alpha$. За противоположен на α избираме елемента $-\alpha$ от $R3$. По $R4$, $R3$ и $R2$ имаме $A(\alpha+(-\alpha))B = (A\alpha B)(-\alpha)B = A = AoB$, откъдето $\alpha+(-\alpha)=o$. Сумата $\alpha+(-\beta)$ ще бележим с $\alpha-\beta$. За да докажем, че $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, постъпваме така:

$$A(\alpha+\beta)B = (A\alpha B)\beta B = (A\alpha B)\beta(B\alpha B) = (A\beta B)\alpha(B\beta B) = (A\beta B)\alpha B$$
$$= A(\beta+\alpha)B.$$

Във второто и четвъртото равенство е използувана аксиома $R5$, а в третото — $R6$.

§ 7. Ротации и транслации

Дефиниция 7. 1. Преобразуването, което трансформира точката X в точката $X\alpha A$, ще наричаме ротация с център A и ъгъл α и ще бележим ρ_A^α. Имаме следователно $X\rho_A^\alpha = X\alpha A$.

Теорема 7. 1. Ако $\alpha \neq o$ и $\rho_A^\alpha = \rho_B^\beta$, то $A = B$ и $\alpha = \beta$.

Доказателство. От $\rho_A^\alpha = \rho_B^\beta$ следва, че $X \alpha A = X \beta B$ за всяка точка X. При $X = B$ получаваме $B \alpha A = B \beta B = B$. Това означава, че уравнението $B \alpha Y = B$ има решение $Y = A$. Понеже $\alpha \neq o$, по $R7$ това решение е единствено. Но по $R5$ имаме $B \alpha B = B$, което означава, че и B е решение на уравнението $B \alpha Y = B$, т. е. $Y = B$, откъдето получаваме $A = B$. Между другото доказахме, че при $\alpha \neq o$ $B \alpha B = B$. Нека сега $X \neq A$. Тогава от $X \alpha A = X \beta A$ по $R1$ следва $\alpha = \beta$.

Теорема 7. 2. Произведението на две ротации ρ_A^α и ρ_A^β е ротация и ако $\alpha + \beta \neq o$, то тя е точно $\rho_A^{\alpha+\beta}$.

Доказателство. Нека X е произволна точка. Тогава

$$X \rho_A^\alpha \rho_A^\beta = (X \alpha A) \beta A = X(\alpha + \beta) A = X \rho_A^{\alpha+\beta}, \text{ т. е. } \rho_A^\alpha \rho_A^\beta = \rho_A^{\alpha+\beta}.$$

Ако $\rho_A^\alpha \rho_A^\beta = \rho_B^\gamma$, то $\rho_A^{\alpha+\beta} = \rho_B^\gamma$ и ако $\alpha + \beta \neq o$, то по теорема 7. 1 имаме $\alpha + \beta = \gamma$ и $A = B$.

Теорема 7. 3. Ако $A \neq B$ и $\alpha \neq o$, произведението на ротациите ρ_A^α и ρ_B^β е ротация тогава и само тогава, когато $\alpha + \beta \neq o$.

Доказателство. Най-напред ще установим следната

Лема. Ако $\alpha + \beta \neq 0$, то системата

$$X \alpha Y = B$$

$$X(-\beta) Y = A$$

притежава единствено решение за X и Y. За да намерим явния вид на X и Y, допускаме, че системата има решение. Тогава $(A \beta Y) = (X(-\beta) Y) \beta Y = X(-\beta + \beta) Y = X o Y = X$. Полученото X заместваме в първото уравнение $B = X \alpha Y = (A \beta Y) \alpha Y = A(\beta + \alpha) Y$. Понеже $\beta + \alpha = \alpha + \beta \neq o$, уравнението $A(\beta + \alpha) Y = B$ има единствено решение

$$Y = B \ (\beta + \alpha) A.$$

Тогава $X = A \beta Y = A \beta (B \ (\beta + \alpha) A)$. Че така намерените X и Y са наистина решения на системата, се проверява така: $X \alpha Y = (A \beta Y) \alpha Y = A(\beta + \alpha) Y = A(\beta + \alpha)(B \ (\beta + \alpha) A) = B$, $X(-\beta) Y = (A \beta Y)(-\beta) Y = A$.

Да докажем сега теоремата. Нека най-напред $\alpha + \beta \neq o$. Нека C и D са точки, за които

$$C \alpha D = B,$$

$$C(-\beta) D = A.$$

Такива има по лемата. Нека сега X е произволна точка. Имаме

$$X \rho_A^\alpha \rho_B^\beta = (X \alpha A) \beta B = (X \alpha (C(-\beta) D)) \beta (C \alpha D) = (X \beta C) \alpha ((C(-\beta) D) \beta D)$$

$$= (X \beta C) \alpha C = X(\beta + \alpha) C = X(\alpha + \beta) C = X \rho_C^{\alpha+\beta},$$

откъдето $\rho_A^\alpha \rho_B^\beta = \rho_C^{\alpha+\beta}$,

Нека произведението на две ротации е ротация, т. е. нека имаме $\rho^{\alpha}_{A}\rho^{\beta}_{B}=\rho^{\gamma}_{C}$ и нека допуснем, че $\alpha+\beta=0$. Тогава $\beta=-\alpha$ и $\rho^{\gamma}_{C}=\rho^{\alpha}_{A}\rho^{-\alpha}_{B}$. Ако X е произволна точка, имаме $X\gamma C=(X\alpha A)(-\alpha)B$. Нека $X=C$. Тогава $C=C\gamma C=(C\alpha A)(-\alpha)B$, откъдето $C\alpha B=C\alpha A=E$. Последните две равенства показват, че A и B са решения на уравнението $C\alpha Y=E$, и понеже $\alpha\neq o$ по $R7$ решението е единствено, т. е. $A=B$, което противоречи на условието $A\neq B$.

Дефиниция 7. 2. Ако $\alpha\neq o$, то произведението $\rho^{\alpha}_{A}\rho^{-\alpha}_{B}$ ще наричаме транслация и ще бележим с τ^{α}_{AB}. Очевидно τ^{α}_{AA} е идентитет.

Теорема 7. 4. Транслацията τ^{α}_{AB} е ротация тогава и само тогава, когато $A=B$.

Доказателството следва от теореми 7. 3 и 7. 2.

Теорема 7. 5. Ако C е точка, а τ^{α}_{AB} транслация, то съществува, и то само една, точка D, така че $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{\beta}_{CD}$. При това, ако $\alpha=\beta$, точката D не зависи от α, а само от точките A, B и C.

Доказателство. Ще докажем най-напред следната

Лема: 1 $A\alpha(B\beta C)=(A\alpha B)\beta(A\alpha C)$ (ляв дистрибутивен закон);
2. $(A\alpha B)\beta C=(A\beta C)\alpha(B\beta C)$ (десен дистрибутивен закон);
3. $(X\beta P)(-\beta)((P\alpha A)(-\alpha)B)=X(-\beta)((X\alpha A)(-\alpha)\beta)$.

Левият и десният дистрибутивен закон следват веднага от $R5$ и. $R6$, затова пристъпваме към третото тъждество. Като използуваме $R6$. и дистрибутивните закони, пресмятаме

$$(X\beta P)(-\beta)((P\alpha A)(-\alpha)B)=((X\beta P)(-\beta)(P\alpha A))(-\alpha)((X\beta P)(-\beta)B)$$
$$=(((X\beta P)(-\beta)P)\alpha((X\beta P)(-\beta)A))(-\alpha)((X\beta P)(-\beta)B)$$
$$=(X\alpha((X\beta P)(-\beta)A)(-\alpha)((X\beta P)(-\beta)B)$$
$$=((X\alpha(X\beta P))(-\beta)(X\alpha A))(-\alpha)((X\beta P)(-\beta)B)$$
$$=((X\alpha(X\beta P))(-\alpha)(X\beta P))(-\beta)((X\alpha A)(-\alpha)B)=X(-\beta)((X\alpha A)(-\alpha)B)$$

Нека сега докажем теоремата. Първи случай $\alpha=\beta$. Нека точка Q е такава, че $B=A(-\beta)Q$, където $-\beta\neq o$. Това е възможно поради $R7$. Тогава полагаме $D=(C\beta A)(-\beta)Q$. Проверяваме

$$X\tau^{\alpha}_{CD}=(X\alpha C)(-\alpha)((A\beta A)(-\beta)Q)=X(-\alpha)((X\beta A)(-\beta)Q),$$

като в последното равенство е използувана лема 3. По същия начин имаме

$$X\tau^{\alpha}_{AB}=(X\alpha A)(-\alpha)B=(X\alpha A)(-\alpha)(A(-\beta)Q)$$
$$=(X\alpha A)(-\alpha)((A\beta A)(-\beta)Q)=X(-\alpha)((X\beta A)(-\beta)Q)=X\tau^{\alpha}_{CD},$$

откъдето имаме $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{\alpha}_{CD}$. Така намерената точка D очевидно не зависи от ъгъл α. Че D е единствена, се установява лесно.

Втори случай: $\alpha \neq \beta$. Тогава $-\alpha + \beta \neq o$ и по теорема 7. 3. съществува точка E, такава, че $\rho_C^{-\beta} \rho_A^{\alpha} = \rho_E^{-\beta+\alpha}$. Понеже $\beta \neq o$, имаме

$$(-\beta + \alpha) - \alpha \neq 0$$

и тогава пак по теорема 7. 3 съществува точка D такава, че

$$\rho_E^{-\beta+\alpha} \rho_B^{-\alpha} = \rho_D^{-\beta}.$$

Имаме следователно $\rho_D^{-\beta} = \rho_C^{-\beta} \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha}$. Ще покажем, че $\tau_{AB}^{\alpha} = \tau_{CD}^{\beta}$. Наистина $\tau_{CD}^{\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_D^{-\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_C^{-\beta} \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} = \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} = \tau_{AB}^{\alpha}$.

Теорема 7. 6. Произведение на две транслации е транслация.

Доказателство. Нека са дадени транслациите τ_{AB}^{α} и τ_{CD}^{β}. По теорема 7. 5. съществува точка E така, че $\tau_{CD}^{\beta} = \tau_{BE}^{\alpha}$. Тогава

$$\tau_{AB}^{\alpha} \tau_{CD}^{\beta} = \tau_{AB}^{\alpha} \tau_{BE}^{\alpha} = \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_B^{\alpha} \rho_E^{-\alpha} = \rho_A^{\alpha} \rho_E^{-\alpha} = \tau_{AE}^{\alpha}.$$

Теорема 7. 7. Съвкупността на всички транслации е абелева група.

Доказателство. По теорема 7. 6 произведението на две транслации е транслация. Обратната на транслацията τ_{AB}^{α} е τ_{BA}^{α}, а τ_{AA}^{α} е идентитет за произволно A и α. Остава да се покаже, че групата е абелева. За целта ще установим следната

Лема. В сила е тъждеството

$$\rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_C^{\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_{A\beta B}^{\alpha} \rho_B^{-\alpha}.$$

Нека X е произволна точка. Тогава

$$X \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_C^{\beta} = ((X \alpha A)(-\alpha)B) \beta C = ((X \alpha A)(-\alpha)B) \beta ((C \alpha B)(-\alpha)B)$$

$$= ((X \alpha A) \beta (C \alpha B)(-\alpha)(B \beta B) = ((X \alpha A) \beta (C \alpha B))(-\alpha)B$$

$$= ((X \beta C) \alpha (A \beta B))(-\alpha)B = X \rho_C^{\beta} \rho_{A\beta B}^{\alpha} \rho_B^{-\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_C^{\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_{A\beta B}^{\alpha} \rho_B^{-\alpha}.$$

Нека сега разгледаме

$$\tau_{AB}^{\alpha} \tau_{CD}^{\beta} = \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_C^{\beta} \rho_D^{\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_{A\beta B}^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} \rho_D^{-\beta} = \rho_C^{\beta} \rho_D^{-\beta} \rho_{(A\beta B)(-\beta)B}^{\alpha} \rho_B^{-\alpha}$$

$$= \rho_C^{\beta} \rho_D^{-\beta} \rho_A^{\alpha} \rho_B^{-\alpha} = \tau_{CD}^{\beta} \tau_{AB}^{\alpha}.$$

Дефиниция 7. 3. Една точкова трансформация ще наричаме движение, ако тя е ротация или транслация. Очевидно идентитетът е движение.

Теорема 7. 8. Едно различно от идентитета движение е ротация точно тогава, когато има само една двойна точка, и транслация точно тогава, когато няма двойни точки.

Доказателство. Нека φ е различно от идентитета движение. Тогава φ е ротация ρ_A^{α} с $\alpha \neq o$ или транслация τ_{AB}^{α} с $A \neq B$. Нека

$$X\rho_A^\alpha = X.$$

Това означава, че $X\alpha A = X$; по $R7$ $A = X$. Следователно единствената двойна точка на ρ_A^α е A. Да допуснем, че транслацията τ_{AB}^α има двойна точка X. Тогава $(X\alpha A)(-\alpha)B = X$, откъдето $X\alpha A = X\alpha B$, и по $R7$ $A = B$ в противоречие с $A \neq B$. Следователно транслацията няма двойни точки. Доказателството се завършва от факта, че φ в случая не може да бъде едновременно и ротация, и транслация.

Теорема 7. 9. Съвкупността от движенията е група, в която транслациите образуват инвариантна подгрупа.

Доказателство. Нека φ е движение, а τ_{AB}^α — произволна транслация. Ще покажем, че $\varphi^{-1}\tau_{AB}^\alpha\varphi$ е транслация. Ако φ е транслация, това е очевидно. Нека φ е ротация ρ_C^β. Тогава $\varphi^{-1} = \rho_C^{-\beta}$. Като използуваме лемата от теорема 7. 7, получаваме

$$\varphi^{-1}\tau_{AB}^\alpha\varphi = \rho_C^{-\beta}\rho_A^\alpha\rho_B^{-\alpha}\rho_C^\beta = \rho_C^{-\beta}\rho_C^\beta\rho_{A\beta B}^\alpha\rho_B^{-\alpha} = \rho_{A\beta B}^\alpha\rho_B^{-\alpha} = \tau_{A\beta B,B}^\alpha.$$

Теорема 7. 10. Всяко движение е автоморфизъм на алгебрата на въртенето.

Доказателство. Тъй като всяко движение е ротация или произведение от ротации, достатъчно е да покажем това за ротации. Трябва да докажем, че $(A\alpha B)\rho_C^\beta = (A\rho_C^\beta)\alpha(B\rho_C^\beta)$. И наистина

$$(A\alpha B)\rho_C^\beta = (A\alpha B)\beta C = (A\beta C)\alpha(B\beta C) = (A\rho_C^\beta)\alpha(B\rho_C^\beta).$$

Теорема 7. 11. Групата на движенията е инвариантна подгрупа на групата на автоморфизмите на алгебрата на въртенето.

Доказателство. Нека φ е автоморфизъм, а ψ е движение. Ще покажем, че $\varphi^{-1}\psi\varphi$ е движение. Достатъчно е да разгледаме случая, когато ψ е ротация ρ_A^α. Нека X е произволна точка.

Тогава

$$X\varphi^{-1}\psi\varphi = X\varphi^{-1}\rho_A^\alpha\varphi = ((X\varphi^{-1})\alpha A)\varphi = (X\varphi^{-1}\varphi)\alpha(A\varphi)$$
$$= X\alpha(A\varphi) = X\rho_{A\varphi}^\alpha, \text{ т. е. } \varphi^{-1}\rho_A\varphi = \rho_{A\varphi}^\alpha.$$

§ 8. Векторна алгебра

Дефиниция 8. 1. Наредената двойка точки (A, B) ще наричаме насочена отсечка. За насочената отсечка (A, B) казваме, че е геометрически равна (еквиполентна) на (C, D) точно тогава, когато съществува някакъв ъгъл α, такъв, че $\tau_{A,B}^\alpha = \tau_{C,D}^\alpha$. Бележим $(A, B) \sim (C, D)$.

Теорема 8. 1. Релацията $\sim$ в съвкупността на всички насочени отсечки е релация на еквивалентност.

Доказателството се основава на следната

Лема. Ако $\tau_{AB}^\alpha = \tau_{CD}^\alpha$, то $\tau_{AB}^\beta = \tau_{CD}^\beta$.

Доказателството на тази лема е аналогично на първия случай от теорема 7. 5.

Дефиниция 8. 2. Чрез релацията $\sim$ съвкупността на насочените отсечки се разлага в класове, които ще наричаме свободни вектори. Елементите на един свободен вектор се наричат негови представители. Ако p е свободен вектор и $(A, B) \in p$, то това ще бележим $p=[A, B]$.

Теорема 8. 2. Ако A, B, C са точки, то съществува точно една точка D, така че $[A, B]=[C, D]$. Доказателството следва от теорема 7. 5. Оттам получаваме, че $D=(C(-\alpha)B)\,\alpha\,(B\ \alpha\,A)$ за някакво $\alpha \neq o$.

Като непосредствено следствие получаваме

Теорема 8. 3. (Първа основна теорема). Необходимото и достатъчно условие за $A=B$ е $[O, A]=[O, B]$ за някаква точка O.

Теорема 8. 4. Ако $[A, B]=[A', B']$, $[B, C]=[B', C']$, то $[A, C]=[A', C']$.

Доказателство. От условието имаме $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{\alpha}_{A'B'}$, $\tau^{\alpha}_{BC}=\tau^{\alpha}_{B'C'}$; тогава $\tau^{\alpha}_{AB}\,\tau^{\alpha}_{BC}=\tau^{\alpha}_{A'B'}\,\tau^{\alpha}_{B'C'}$. Но $\tau^{\alpha}_{AB}\,\tau^{\alpha}_{BC}=\rho^{\alpha}_{A}\,\rho^{-\alpha}_{B}\,\rho^{\alpha}_{B}\,\rho^{-\alpha}_{C}=\rho^{\alpha}_{A}\,\rho^{-\alpha}_{C}=\tau^{\alpha}_{AC}$; аналогично

$$\tau^{\alpha}_{A'B'}\,\tau^{\alpha}_{B'C'}=\tau^{\alpha}_{A'C'},$$

откъдето $\tau^{\alpha}_{AC}=\tau^{\alpha}_{A'C'}$, т. е. $[A, C]=[A', C']$.

Дефиниция 8. 3. Сума на два вектора p и q дефинираме така: Избираме точка A и по теорема 8. 2 търсим точки B и C, така че $p=[A, B]$ и $q=[B, C]$. Тогава полагаме $p+q=[A, C]$.

Теорема 8. 4 гарантира коректността на дефиницията.

Теорема 8. 5. Съвкупността на свободните вектори е абелева група по отношение на операцията събиране на вектори.

Доказателството следва от теорема 7. 6. Нулев елемент се оказва векторът $\bar{o}=[A, A]=[B, B]$. Обратен на $[A, B]$ е $[B, A]$, т. е. $-[A, B]=[B, A]$.

Теорема 8. 6. $[A, B]+[C, D]=[A, (D(-\alpha)C)\,\alpha\,(C\ \alpha\,B)]$

$$=[A, (B(-\alpha)C)\,\alpha\,(C\ \alpha\,D)], \quad \alpha \neq o.$$

Доказателство. Първото равенство следва от дефиницията на сума и теорема 8. 2. От комутативността на сумата, както в теорема 4. 3, имаме $[A, B]+[C, D]=[A, D]+[C, B]$, откъдето с помощта на първото равенство следва второто равенство.

Теорема 8. 7. 1. Ако $[A, B]=[C, D]$, то $[A, B\,\alpha\,A]=[C, D\,\alpha\,C]$ за произволен ъгъл α.

2. $[A, B\,\alpha\,A]+[B, C\,\alpha\,B]=[A, C\,\alpha\,A]$.

Доказателство. 1. Ако $\alpha=o$, горното равенство е очевидно. Нека $\alpha \neq o$. От $[A, B]=[C, D]$ следва $-[A, B]=-[C, D]$, т. е. $[B, A]=[D, C]$, от което имаме $\tau^{-\alpha}_{BA}=\tau^{-\alpha}_{DC}$. Това означава, че за произволна точка X е в сила $(X(-\alpha)B)\,\alpha\,A=(X(-\alpha)D)\,\alpha\,C$. Също така имаме

$$(X\,\alpha\,A)(-\alpha)(B\,\alpha\,A)=(X(-\alpha)B)\,\alpha\,(A(-\alpha)A)=(X(-\alpha)B)\,\alpha\,A.$$

Аналогично

$$(X\alpha C)(-\alpha)(D\alpha C)=(X(-\alpha)D)\alpha C=(X(-\alpha)B)\alpha A=(X\alpha A)(-\alpha)(B\alpha A),$$

т. е. $\tau^{\alpha}_{A,\,B\alpha A}=\tau^{\alpha}_{C,\,D\alpha C}$, което означава, че $[A,\ B\alpha A]=[C,\ D\alpha C]$.

2. Като използуваме теорема 8. 6, получаваме

$$[A,\ B\alpha A]+[B,\ C\alpha B]=[A,\ ((C\alpha B)(-\alpha)B)\alpha(B)\alpha(B\alpha A))]=[A, C\alpha A].$$

Дефиниция 8. 4. Ако p е свободен вектор, дефинираме вектора p^{α} по следния начин. Ако $p=[A,\ B]$, то полагаме $p^{\alpha}=[A,\ B\alpha A]$. (Теорема 8. 7. 1 гарантира коректността на дефиницията.) Операцията p^{α} ще наричаме **въртене на вектора p на ъгъл α.**

Теорема 8. 8. Операцията въртене на вектор на ъгъл α е автоморфизъм на групата на свободните вектори.

Доказателство. Теорема 8. 7. 2, записана по друг начин, дава $[A,\ B]^{\alpha}+[B,\ C]^{\alpha}=[A,\ C]^{\alpha}=([A,\ B]+[B,\ C])^{\alpha}$, което показва, че въртенето е ендоморфизъм. Понеже съответствието е еднозначно обратимо, получаваме, че въртенето е автоморфизъм.

Теорема 8. 9. Въртенето на вектори притежава следните свойства:

1. $p^{o}=p$; 4. $\bar{o}^{\alpha}=\bar{o}$;
2. $(p^{\alpha})^{\beta}=p^{\alpha+\beta}$; 5. $(-p)^{\alpha}=-p^{\alpha}$;
3. $(p+q)^{\alpha}=p^{\alpha}+q^{\alpha}$; 6. $(p-q)^{\alpha}=p^{\alpha}-q^{\alpha}$.

Доказателство. Нека $p=[A,\ B]$. Имаме $p^{o}=[A,\ B\,o\,A]=[A,\ B]=p$, $(p^{\alpha})^{\beta}=[A,\ (B\alpha A)\beta A]=[A,\ B(\alpha+\beta)A]=[A,\ B]^{\alpha+\beta}=p^{\alpha+\beta}$. Тъждеството 3 следва от теорема 8. 8. По 3. имаме $o^{\alpha}=(o+o)^{\alpha}=\bar{o}^{\alpha}+\bar{o}^{\alpha}$, откъдето $o^{\alpha}=o$. Също така от $p+(-p)=o$ следва

$$\bar{o}=\bar{o}^{\alpha}=(p+(-p))^{\alpha}=p^{\alpha}+(-p)^{\alpha},$$

откъдето $(-p)^{\alpha}=-p^{\alpha}$.

Теорема 8. 10 (втора основна теорема). За произволни точки O, A, B и ъгъл α е в сила тъждеството

$$[O,\ A\alpha B]=([O,\ A]-[O,\ B])^{\alpha}+[O,B]=[O,A]^{\alpha}-[O,\ B]^{\alpha}+[O,B].$$

Доказателство. $([O,\ A]-[O,\ B]^{\alpha}+[O,\ B]=([O,\ A]+[B,\ O]^{\alpha}+[O,B]$

$$=[O,\ B]+[B,\ A]^{\alpha}=[O,\ B]+[B,\ A\alpha B]=[O,\ A\alpha B].$$

На значението на първа и втора основна теорема няма да се спираме.

§ 9. Централна симетрия и въртене

От въведените аксиоми не следва, че централната симетрия се явява частен случай на въртенето. За това е необходима специална

аксиома, която ще въведем след малко. Тази аксиома трябва да осигурява съществуването и единствеността на специален ъгъл, който ще бележим с π, така че операцията $A\pi B$ да удовлетворява аксиомите на централната симетрия. Ако вземем аксиомите от § 3, трябва да имаме: 1) $A\pi A=A$; 2) уравнението $A\pi X=B$ да бъде еднозначно решимо; 3) $(A\pi B)\pi B=A$ за всяка точка A и B; 4) $(A\pi B)\pi(C\pi D)=(A\pi C)\pi(B\pi D)$. Условията 1) и 4) се удовлетворяват за всеки ъгъл. За да е в сила 2), трябва $\pi\neq o$. Значи ъгъл π се характеризира с условията $\pi\neq o$ и $(A\pi B)\pi B=A$. Затова постулираме:

Аксиома R 8. Съществува, и то само един, ъгъл $\pi\neq o$, такъв, че за произволни A и B е в сила $(A\pi B)\pi B=A$.

Аксиомата може да се отслаби, като тъждеството $(A\pi B)\pi B=A$ се изисква за поне две различни точки A_0 и B_0. От равенството

$$(A_0\pi B_0)\pi B_0=A_0$$

следва $2\pi=o$. Това се получава така: $A_0=(A_0\pi B_0)\pi B_0$, понеже $A_0\neq B_0$ по $R1$ $2\pi=o$. Тогава $(A\pi B)\pi B=(A\,2\pi\,B)=A\,o\,B=A$ за произволни A и B.

Ъгълът π ще наричаме изправен.

Теорема 9. 1. Всяко от следните равенства характеризира изправения ъгъл:

1. $\pi\neq o$ и $2\pi=o$;

2. $\pi\neq o$ и $\pi=-\pi$;

3. $p^\pi=-p$; където p е вектор;

4. $[A, B]=[B, A\pi B]$.

Доказателство. За 1. и 2. това е очевидно. Нека $p=[A, B]$. Тогава имаме $p^\pi=[A, B\pi A]$. Като използуваме 2., имаме

$$(X\pi A)(-\pi)(B\pi A)=(X(-\pi)B)\pi(A(-\pi)A)=(X(-\pi)B)\pi A$$
$$=(X\pi B)(-\pi)A.$$

Полученото равенство означава, че $\tau^\pi_{B,A}=\tau^\pi_{A,\,B\pi A}$, т. е. $[B, A]=[A, B\pi A]$ или $-p=p^\pi$. Нека сега $p^\pi=-p$, т. е. $[A, B\pi A]=[B, A]$. Това означава, че например $\tau^\pi_{A,\,B\pi A}=\tau^\pi_{B,\,A}$, от което следва, че за произволна точка X е в сила $(X\pi A)(-\pi)(B\pi A)=(X\pi B)(-\pi)A$. При $X=B$ се получава $B\pi A=B(-\pi)A$, а от него — $(B\pi A)\pi A=B$. Че $\pi\neq o$, се вижда от равенството $[A, B\pi A]=[B, A]$, защото, ако $\pi=o$, ще имаме $[A, B]=[B, A]$, което не е възможно при $B\neq A$.

Четвъртото тъждество се разглежда по съвсем същия начин.

Като използуваме, че $p^{\pi}=-p$, да приложим втора основна теорема за ъгъл π. Имаме $[O, A\pi B]=([O, A]-[O, B])^{\pi}+[O, B]=-([O, A]-[O, B])+[O, B]=2[O, B]-[O, A]$, т. е. получихме резултата на теорема 2. 6. По-нататък всичко, което беше доказано в § 2 и § 3 за централната симетрия, може да се докаже и тук. Специално ще споменем, че от аксиома R следва еднозначната решимост на уравнението $x+x=p$, където p е вектор. Решението пак ще бележим с $\frac{p}{2}$ или с $\frac{1}{2}p$, като са в сила и следните свойства:

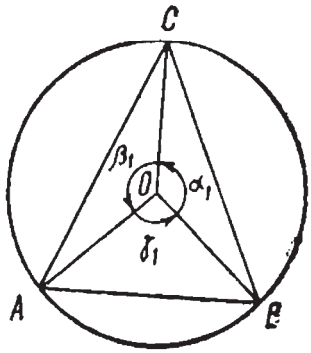
$$\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q,\ \frac{1}{2}(-p)=-\frac{1}{2}p,$$

т. е. $\frac{1}{2}$ е автоморфизъм. Ще употребяваме и обозначенията

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p\right)=\frac{1}{4}p \text{ и т. н.}$$

§ 10. Триъгълник

Дефиниция 10. 1. Ще казваме, че наредената тройка точки (A, B, C) образува триъгълник, ако точките са различни и съществуват точка O и ъгли α_1, β_1 и γ_1, такива, че $C=B\alpha_1 O$, $A=C\beta_1 O$, $B=A\gamma_1 O$. Точка O ще наричаме център на триъгълника, а ъглите α_1, β_1, γ_1 — централни ъгли. Ъглите α, β, γ ще наричаме ъгли съответно при върховете A, B, C на триъгълника, ако $2\alpha=\alpha_1$, $2\beta=\beta_1$, $2\gamma=\gamma_1$, (черт. 4).



Черт. 4

Ще употребяваме стандартните означения $\triangle ABC$, $\sphericalangle A=\alpha$ и т. н.

Дадената дефиниция притежава един недостатък, който изцяло не може да се избегне: първо, не е ясно дали съществуват ъглите при върховете α, β и γ, защото не е сигурно дали уравненията $2\alpha=\alpha_1$, $2\beta=\beta_1$, $2\gamma=\gamma_1$ са решими винаги спрямо α, β и γ и, второ, ако техните решения съществуват, то те сигурно не са единствени. Това се вижда от следната

Теорема 10. 1. Ако уравнението $2x=\delta$ има решения, то те са точно две.

Доказателство. Нека x_1 е едно решение на уравнението. Тогава очевидно е, че $x_1+\pi$ е също решение, защото

$$2(x_1+\pi)=2x_1+2\pi=2x_1+o=2x_1=\delta.$$

Нека x_2 е произволно решение. Ще покажем, че $x_2 = x_1$ или $x_2 = x_1 + \pi$. Нека $x_2 = x_1 + k$. Тогава $\delta = 2x_2 + 2k = \delta + 2k$, откъдето $2k = o$. Но по $R8$ единствените решения на уравнението $2k = o$ са $k = o$ и $k = \pi$, което доказва твърдението.

Теорема 10. 1 показва, че ако съществуват ъглите при върховете на триъгълника, то те не са еднозначно определени. Ако α е едно от значенията на ъгъла при върха A, то другото ще бъде $\alpha + \pi$,

За да притежава всеки триъгълник ъгли при върховете, въвеждаме следната

Аксиома R 9. За всеки ъгъл α съществува ъгъл x така, че $(A\,x\,B)\,x\,B = A\,\alpha\,B$ за произволни точки A и B.

Друга форма на R 9 е, че уравнението $2x = \alpha$ притежава решение за произволно α. От теорема 10. 1 следва, че броят на решенията е точно две. Едното от тях ще бележим с $\frac{\alpha}{2}$, а другото — с $\frac{\alpha}{2} + \pi$. Ако с ε бележим ъгъл, който е равен на o или на π, тогава $x = \frac{\alpha}{2} + \varepsilon$ ще е общо записване на двете решения.

При тези означения, ако α_1, β_1, γ_1 са централните ъгли на един триъгълник, за ъглите при върховете α, β и γ ще имаме изразите:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \varepsilon_1, \quad \beta = \frac{\beta_1}{2} + \varepsilon_2, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{2} + \varepsilon_3.$$

В сила е следната

Теорема 10. 2. Ако O е център на $\triangle ABC$, α_1, β_1 и γ_1 са централните му ъгли, а α, β, γ — ъглите при върховете, то:

1. O е различна от A, B и C.
2. α_1, β_1 и γ_1 са различни от o и $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = o$.
3. α, β и γ са различни от o и π и $\alpha + \beta + \gamma$ е равно на o или π.

Доказателство. От дефиницията за триъгълник имаме

$$C = B\,\alpha_1\,O, \; A = C\,\beta_1\,O, \; B = A\,\gamma_1\,O.$$

Ако $O = B$, то $C = B\,\alpha_1\,O = B\,\alpha_1\,B = B$ в противоречие с $C \neq B$. Аналогично $O \neq C$ и $O \neq A$. Ако допуснем, че $\alpha_1 = o$, получаваме $C = B$, следователно $\alpha_1 \neq o$. Аналогично $\beta_1 \neq o$, $\gamma_1 \neq o$. От трите дефиниционни равенства имаме

$$B = A\,\gamma_1\,O = (C\,\beta_1\,O)\,\gamma_1\,O = ((B\,\alpha_1\,O)\,\beta_1\,O)\,\gamma_1\,O = B(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)O.$$

Понеже $B \neq O$, имаме $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = o$. Ако допуснем, че $\alpha = o$, π, ще получим, че $2\alpha = o = \alpha_1$ в противоречие с $\alpha_1 \neq o$. Аналогично имаме $\beta_1 \neq o$, π; $\gamma_1 \neq o$, π. От $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = o$, следва $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = o$, т. е. $2(\alpha + \beta + \gamma) = o$, откъдето $\alpha + \beta + \gamma = o$ или π. Лесно се вижда, че за всеки триъгълник съществуват точно 8 наредени тройки ъгли (α, β, γ), които могат да бъдат негови ъгли при върховете му, като половината от тях имат сбор o, а другата половина — π.

Теорема 10. 3. Следните три условия са еквивалентни.

1. Точките A, B, C образуват триъгълник.

2. Точките A, B, C са различни и съществуват ъгли α_1, β_1, γ_1, различни от o, а произведението $\rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1}\rho_A^{\alpha_1}$ е идентитетът.

3. Точките A, B, C са различни и съществуват ъгли β_1 и γ_1, различни от o, така че да е в сила $(A\gamma_1 C)\beta_1 B = A$.

Доказателство. Нека е даден $\triangle ABC$. Тогава точките A, B, C са различни и съществуват точка O и ъгли α_1, β_1 и γ_1, различни от o (по теорема 10. 2), такива, че $C = B\alpha_1 O$, $A = C\beta_1 O$, $B = A\gamma_1 O$, и при това $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = o$. Нека X е произволна точка. Тогава

$$X\rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1}\rho_A^{\alpha_1} = ((X\gamma_1 C)\beta_1 B)\alpha_1 A = ((X\gamma_1 C)\beta_1 B)\alpha_1(C\beta_1 O)$$

$$= ((X\gamma_1 C)\alpha_1 C)\beta_1(B\alpha_1 O) = ((X\gamma_1 C)\alpha_1 C)\beta_1 C = X(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)C = XoC = X,$$

т. е. $\rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1}\rho_A^{\alpha_1}$ е идентитет.

Нека $\rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1}\rho_A^{\alpha_1}$ е идентитет. Тогава $\rho_A^{-\alpha_1} = \rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1}$, откъдето

$$(A\gamma_1 C)\beta_1 B = A\rho_C^{\gamma_1}\rho_B^{\beta_1} = A\rho_A^{-\alpha_1} = A(-\alpha_1)A = A.$$

Нека точки A, B, C са различни, $\beta_1 \neq o$, $\gamma_1 \neq o$ и $(A\gamma_1 C)\beta_1 B = A$. Ще покажем, че образуват триъгълник. Нека o е такава точка, че $B = A\gamma_1 O$. (Понеже $\gamma \neq o$, това е възможно.) Тогава $A = A\gamma_1(C\beta_1 O)$. Понеже $\gamma_1 \neq o$, имаме $C\beta_1 O = A$. Полагаме $\alpha_1 = -\beta_1 - \gamma_1$. Тогава

$$B\alpha_1 O = B(-\gamma_1 - \beta_1)O = (B(-\gamma_1)O)(-\beta_1)O = A(-\beta_1)O = C.$$

С това доказателството е завършено.

Лесно се вижда, че ако е даден $\triangle ABC$ и α_1, β_1, γ_1 са негови централни ъгли, то съществуват $\triangle CAB$ и $\triangle BAC$ съответно с централни ъгли тройките γ_1, α_1, β_1 и $-\beta_1$, $-\alpha_1$, $-\gamma_1$. Това дава повод за триъгълниците $\triangle CAB$ и $\triangle BCA$ да казваме, че са еднакво ориентирани с $\triangle ABC$, а за $\triangle BAC$ и $\triangle CBA$ — че са противно ориентирани с $\triangle ABC$.

Дефиниция 10. 2. Триъгълникът ABC ще наричаме равнобедрен с основа AB, ако за ъгъла при върха C може да се избере такава стойност γ, че да е в сила $B = A\gamma C$.

Теорема 10. 4. Ако $A \neq C$, $\gamma \neq 0$, π и $B = A\gamma C$, то точките A, B, C образуват равнобедрен триъгълник с основа AB.

Доказателство. Очевидно точките A, B, C са различни. Полагаме $\gamma_1 = 2\gamma$, $\beta_1 = \pi - \gamma$. Ако докажем, че $(A\gamma_1 C)\beta_1 B = A$, то по теорема 10. 3 ще следва, че точките A, B, C образуват триъгълник, очевидно равнобедрен. Следователно ще трябва да докажем тъждеството

$$(A2\gamma C)(\pi - \gamma)(A\gamma C) = A.$$

Нека се възползуваме от теорема 8. 10 (втора основна теорема). Избираме произволна точка O. Тогава имаме

$$[O, (A\,2\gamma\,C)(\pi-\gamma)(A\,\gamma\,C)]=([O, A\,2\gamma\,C]-[O, A\,\gamma\,C])^{\pi-\gamma}+[O, A\,2\gamma\,C]$$
$$=-([O, A\,2\gamma\,C]-[O, A\,\gamma\,C])^{-\gamma}+[O, A\,\gamma\,C]=-([O, A]^{2\gamma}-[O, C]^{2\gamma}+[O, C]$$
$$-[O, A]^{\gamma}+[O, C]^{\gamma}-[O, C])^{-\gamma}+[O, A]^{\gamma}-[O, C]^{\gamma}+[O, C]=-[O, A]^{\gamma}$$
$$+[O, C]^{\gamma}+[O, A]-[O, C]+[O, A]^{\gamma}-[O, C]^{\gamma}+[O, C]=[O, A],$$

т. е.

$$[O, (A\,2\gamma\,C)(\pi-\gamma)(A\,\gamma\,C)]=[O, A].$$

От полученото равенство по теорема 8. 3 (първа основна теорема) следва исканото тъждество.

Нека потърсим централния ъгъл α_1. По теорема 10. 3 $\alpha_1=-\beta_1-\gamma_1$. Понеже $\beta_1=\pi-\gamma$, $\gamma_1=2\gamma$, ще имаме

$$\alpha_1=-(\pi-\gamma)-2\gamma=-\pi-\gamma=\pi-\gamma=\alpha_1.$$

Оттук следва следната

Теорема 10. 5. Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен, то ъглите при основата му или са равни, или се различават с π.

Дефиниция 10. 3. Триъгълникът ABC ще наричаме правоъгълен с прав ъгъл при върха C, ако $\gamma_1=\pi$.

Теорема 10. 6. Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа AB и D е средата на основата AB, то $\triangle BCD$ е правоъгълен с прав ъгъл при точка D.

Доказателство. Нека $\triangle ABC$ има централни ъгли α_1, β_1 и 2γ, като $B=A\,\gamma\,C$. За точка D имаме $A\,\pi\,B$. Като се използват теоремите 8. 3 и 8. 10, лесно се доказва, че $\rho_B^{\beta_1}\rho_C^{\gamma}\rho_D^{\alpha_1}$ е индентитетът, откъдето следва, че точките B, C, D образуват триъгълник с прав ъгъл при точката D.

Теорема 10. 7. Ако точките A, B, C образуват триъгълник с център O и φ е движение, то точките $A\varphi$, $B\varphi$, $C\varphi$ образуват триъгълник с център $O\varphi$ и централни ъгли, съответно равни на централните ъгли на $\triangle ABC$.

Доказателството следва непосредствено от дефиницията за триъгълник и теорема 17. 10.

Теорема 10. 8. Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа AB, то не съществува движение, което да го преобразува в $\triangle BAC$.

Доказателство. Да допуснем, че съществува движение φ, така че $A\varphi=B$, $B\varphi=A$ и $C\varphi=C$. От $C\varphi=C$ следва, че φ е ротация с център C. От $A\varphi=B$ и $A\,\gamma\,C=B$ следва, че $\varphi=\rho_C^{\gamma}$. От $B\varphi=A$ следва, че $B\,\rho_C^{\gamma}=A$, т. е. $B\,\gamma\,C=A$, откъдето $B=A(-\gamma)C$. Понеже $A\neq C$, получаваме, че $\gamma=-\gamma$, което дава, че $2\gamma=0$. Последното равенство противоречи на условието, че ABC е триъгълник.

Дефиниция 10. 4. За точките A, B, C ще казваме, че са колинеарни, ако не образуват триъгълник.

Изглежда, че въведените аксиоми са недостатъчни за характеризиране на понятието колинеарност. Не се вижда например дали същe-

ствуват три различни и колинеарни точки. Разбира се, необходимите свойства на колинеарността могат да се въведат с помощта на нови аксиоми, но те едва ли ще бъдат прости по формулировка. Свойствата на правата по-лесно могат да се опишат с понятието централна подобност, което ще въведем аксиоматично в следващия параграф.

III. ХОМОТЕТИЯ

§ 11. Аксиоми на хомотетията

Дефиниция 11. 1. Нека са дадени множествата S и H. Елементите на S се наричат точки и се бележат с главни латински букви, а елементите на H — с малки латински букви. За елементите на S и H е дефинирана една тричленна операция, наречена хомотетия, първият и третият аргумент на която са точки, а вторият е елемент на H. Ако A и B са точки, а $k \in H$, то резултатът от операцията е точка, което ще бележим AkB. Точката B се нарича център на хомотетията, а елементът k — коефициент на хомотетията. Съвкупностите S и H заедно с операцията хомотетия се нарича алгебра на хомотетията, ако са в сила следните аксиоми:

$H0$. AkB е дефинирана за произволни A, B от S и k от H.

$H1$. Ако $A \neq B$ и $AkB = AlB$, то $k = l$. Съществуват поне две различни точки.

$H2$. 1. Съществува елемент $1 \in H$, така че $A1B = A$.

$H2$. 2. Съществува елемент $0 \in H$, така че $A0B = B$.

$H3$. Ако $k \in H$ и $k \neq 0$, то съществува елемент $k^{-1} \in H$, такъв, че за произволни A и $B \in S$ е в сила $(AkB)k^{-1}B = A$.

$H4$. 1. За всяка наредена двойка (k, l) от елементи на H съществува, и то само един, елемент $m \in H$, такъв, че за произволни $A, B \in S$ е в сила $(AkB)lB = AmB$.

$H4$. 2. За всяка наредена двойка (k, l) от елементи на H съществува точно един елемент $m \in H$, такъв, че за произволни точки A, B, C и $n \neq 0$, 1 да е в сила

$$(CnB)n^{-1}(AkB) = (Cn(AlB))n^{-1}(AmB).$$

$H5$. $AkA = A$ за произволни $A \in S$ и $k \in H$.

$H6$. $(AkB)l(CkD) = (AlC)k(BlD)$ за произволни точки A, B, C, D и коефициенти k и l.

$H7$. Ако $k \neq 0$, $k \neq 1$, то уравнението $BkX = A$ притежава, и то само едно, решение, което ще бележим $X = A|kB$.

Операцията хомотетия по формалните си свойства твърде много прилича на въртенето. Това се вижда от голямото сходство на техните аксиоми. Затова теоремите, чиито доказателства са аналогични на съответни теореми на въртенето, ще се дават без доказателства.

Теорема 11. 1. Елементите 1 и 0 от аксиоми $H2$. 1. и $H2$. 2 са различни.

Доказателство. Нека A и B са различни точки (такива има съгласно H 1). Да допуснем, че $1=0$. Тогава $A=A\,1\,B=A\,0\,B=B$ в противоречие с $A\neq B$.

Дефиниция 11. 1. Еднозначно съществуващия елемент m от аксиома H 4. 1 ще наричаме произведение на елементите k и l и ще бележим $m=k.l$ или $m=kl$. Еднозначно съществуващия елемент m от аксиома H 4. 2 ще наричаме сума на елементите k и l и ще бележим $m=k+l$.

Тогава например H 4. 1 ще изглежда така:

$$(A\,k\,B)\,l\,B=A\,kl\,B.$$

Теорема 11. 2. Ненулевите елементи от H по отношение на операцията умножение образуват абелева група с единичен елемент 1.

Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 6. 1.

§ 12. Хомотетии и транслации

Дефиниция 12. 1. Преобразуването, което трансформира точката X в точката $X\,k\,A$, се нарича хомотетия с център точка A и коефициент k. Бележи се с X_A^k. Ако $k=0$, хомотетията се нарича изродена. Лесно се вижда, че X_A^1 е идентитетът на S и X_A^{k-1} при $k\neq 0$ е обратното преобразуване на X_A^k.

За хомотетиите са в сила следните теореми:

Теорема 12. 1. Ако $k\neq 0$, $k\neq 1$, то от $X_A^k=X_B^l$ следва $A=B$ и $k=l$.

Теорема 12. 2. Произведението на хомотетиите X_A^k и X_A^l е хомотетия и ако $k.l\neq 0$, 1, то тя е точно X_A^{kl}.

Теорема 12. 3. Ако $A\neq B$, k и l са различни от 0 и 1, то произведението на хомотетиите X_A^x и X_B^l е хомотетия точно тогава, когато $kl\neq 1$. В този случай съществува, и то само една, точка C, така че $X_A^k X_B^l=X_C^{kl}$.

Дефиниция 12. 2. Ако $k\neq 0$, то произведението $X_A^k X_B^{k-1}$ ще наричаме транслация и ще я бележим с τ_{AB}^k.

Очевидно τ_{AB}^1 и τ_{AA}^k са идентитети.

Теорема 12. 4. Транслацията τ_{AB}^k е хомотетия точно тогава, когато $A=B$ или $k=1$ и в такъв случай тя е идентитетът.

Теорема 12. 5. Ако $\tau_{AB}^k\,(k\neq 1)$ е транслация, C е дадена точка, а $l\,(l\neq 1,\ 0)$ е коефициент, съществува точно една точка D, така че $\tau_{AB}^k=\tau_{CD}^l$; при това, ако $k=l$, точката D не зависи от k, а само от точките A, B и C.

Теорема 12. 6. Произведението на две транслации е транслация.

Теорема 12. 7. Съвкупността от всички транслации е абелева група.

Дефиниция 12. 3. Една точкова трансформация ще наричаме подобност, ако е неизродена хомотетия или транслация.

Теорема 12. 8. Една различна от идентитета подобност е хомотетия точно тогава, когато има само една двойна точка; е транслация точно тогава, когато няма двойни точки.

Теорема 12. 9. Съвкупността от подобностите е група, в която групата на транслациите е инвариантна подгрупа.

Теорема 12. 10. Всяка подобност е автоморфизъм в алгебрата на хомотетиите.

Теорема 12. 11. Групата на подобностите е инвариантна подгрупа на групата на автоморфизмите на алгебрата на хомотетиите.

Доказателствата на тези теореми са с незначителни изменения, идентични с доказателствата на съответните теореми от § 7.

§ 13. Векторна алгебра

Дефиниция 13. 1. Насочените отсечки (A, B) и (C, D) се наричат геометрически равни, ако съществува коефициент $k \in H$, $k \neq 0, 1$, така че $\tau^k_{AB} = \tau^k_{CD}$.

По-нататък нещата се развиват, както в § 8: доказва се, че релацията равенство на две насочени отсечки е релация на еквивалентност и класовете на еквивалентност са наречени свободни вектори В сила е първата основна теорема; доказва се, че свободните вектори образуват абелева група.

Дефиниция 13. 2. Ако p е свободен вектор, а $k \in H$, дефинираме вектора kp по следния начин: ако $p = [A, B]$, полагаме

$$kp = [A, B\, k\, A].$$

Както в § 8, се доказва, че дефиницията на kp не зависи от представителя на вектора p. По този начин се дефинира умножение на вектор с елементи на H.

Теорема 13. 1. За операцията умножение на вектор с елементи на H са в сила свойствата:

1. $1\, p = p \quad 0\, p = \bar{0}$;
2. $k(l\, p) = (k\, l)\, p$;
3. $k(p + q) = kp + kq$;
4. $(k + l)p = kp + lp$;
5. Ако $kp = lp$ и $p \neq \bar{0}$, то $k = l$.

Навсякъде в горните тъждества p и q са вектори, а k и l са елементи на H.

Доказателство. Нека $p = [B, A]$. Тогава $1\, p = [B, A\, 1\, B] = [B, A] = p$,

$$0\, p = [B, A\, o\, B] = [B, B] = \bar{o}, \quad k(lp) = k\,[B, A\, l\, B] = [B, (A\, l\, B) k\, B]$$

$$= [B, A\,(lk)\, B] = [B, A(kl)B] = (kl)\,[B, A] = (kl)\, p.$$

Свойство 3 се доказва буквално, както свойство 3 от теорема 8. 9.

Нека припомним аксиома H 4. 2: за произволни точки A, B, C и $n \neq 0$, 1, k и l е в сила тъждеството $(C\,n\,B)n^{-1}\,(A\,k\,B)$

$$=(C\,n\,(A\,l\,B))n^{-1}(A(k+l)B).$$

Това тъждество означава, че $\tau^n_{B,\,A\,k\,B}=\tau^n_{A\,l\,B,\,A(k+l)B}$, от което следва равенството $[B,\ A\,k\,B]=[A\,l\,B,\ A(k+l)B]$. Но $[B,\ A\,k\,B]=k[B,\ A]=kp$, $[A\,l\,B,\ A(k+l)B]=[A\,l\,B,\ B]+[B,\ A(k+l)B]=-l[B,\ A]+(k+l)[B,\ A]$. От полученото равенство $kp=-lp+(k+l)p$ следва, че $(k+l)p=kp+lp$.

Нека $p\neq\bar{o}$. Тогава $B\neq A$; от $kp=lp$ следва $[B,\ A\,k\,B]=[B,\ A\,l\,B]$, откъдето по първа основна теорема $A\,k\,B=A\,l\,B$. Понеже $A\neq B$, по H 1 следва $k=l$.

От горните свойства лесно следват равенствата:

6. $k\,.\,\bar{o}=\bar{o}$;

7. $k(-p)=-kp$;

8. $k(p-q)=kp-kq$.

Теорема 13. 2. За операцията събиране в H са в сила свойствата:

1. $(k+l)+m=k+(l+m)$;

2. $k+l=l+k$;

3. $k+0=0+k=k$;

4. $k(l+m)=kl+km$.

Доказателство. Нека $p\neq\bar{o}$. Тогава $((k+l)+m)p=(k+l)p+mp$

$$=kp+lp+mp=kp+(l+m)p=(k+(l+m))p$$

откъдето по теорема 13. 2. 5 следва тъждеството 1. Нека докажем например 4. Имаме $(k(l+m))p=k((l+m)p)=k(lp+mp)$

$$=k\,lp+k\,mp=(kl+km)p,\ \text{откъдето}\ k(l+m)=kl+km.$$

§ 14. Централна симетрия и хомотетия

Ще поискаме в H да има константа, която ще бележим -1, такава, че $A(-1)B$ да бъде централна симетрия. За целта въвеждаме аксиома H 8, която е аналогична на R 8.

Аксиома H 8. Съществува, и то само един, елемент на H, който ще бележим с -1, такъв, че $-1\neq 1$ и за произволни A и B да е в сила $(A(-1)B\,(-1)B=A$.

Тази аксиома означава, че $(-1)(-1)=(-1)^2=1$.

Значението на H 8 се разкрива от следната

Теорема 14. 1. Съвкупността H заедно с дефинираните в нея операции събиране и умножение е поле.

Доказателство. По отношение на умножението ненулевите елементи на H образуват абелева група (теорема 11. 2.) От теорема 13. 2 (и теорема 11. 1) следва, че за да бъде H поле, достатътъчно е да се докаже съществуването на обратен елемент по отношение на събирането. Нека положим $-k=(-1).k$. Ще покажем, че $k+(-k)=0$. За целта ще установим, че $(-1).p=-p$. Нека $p=[A, B]$. Тогава $(-1)p$

$$=(-1)[A, B]=[A, B(-1)A]=2[A, A]-[A, B]=-[A, B]=-p.$$

В предпоследното равенство е използувано, че $B(-1)A$ е централна симетрия.

Имаме сега $(k+(-k))p=(k+(-1).k)p=kp+((-1).k)p=kp+(-1)(kp)=kp-kp=\bar{o}=0.p$. Понеже p можем да изберем различен от $\bar{o}$, имаме $k+(-k)=0$.

От това вече следва, че H е поле.

Забележка 1. От аксиома H 8 следва, че ако уравнението $x^2=k$ има решение $x=x_1$, то всяко друго решение x_2 е x_1 или $-x_1$. В § 10, за да има всеки триъгълник ъгли при върховете, беше въведена аксиома R 9, от която следваше, че уравнението $2x=\alpha$ притежава решение. Ако сега въведем аналогична аксиома, ще получим, че уравнението $x^2=k$ притежава решение за произволно k, от което следва, че всички елементи на H, специално и -1, са квадрати.

Забележка 2. Ог теорема 13. 1 следва, че съвкупността на свободните вектори е векторно пространство над полето H. Тъй като за всяка точка A и за всеки вектор p съществува единствена точка B, така че $p=[A, B]$, то векторното пространство заедно с S се превръща в точково афинно пространство над H.

§ 15. Права линия

Дефиниция 15. 1. Точките A, B, C ще наричаме колинеарни, ако съществува коефициент k, такъв, че $AkB=C$. Ако $A\neq B$, права линия ще наричаме съвкупността на всички точки, колинеарни с A, B и ще я бележим с AB.

Тъй като $A1B=A$ и $A0B=B$, то точките A и B принадлежат на правата AB.

Теорема 15. 1. Ако $C\neq D$ са точки от правата AB, то правата CD съвпада с правата AB.

Доказателство. С помощта на първа и втора основна теорема лесно се доказва тъждеството

$$(AkB)m(AlB)=A(m(k-l)+l)B.$$

Нека $C=AkB$ и $D=AlB$ и нека X е точка от правата CD. Тогава $X=CmD$. Като използуваме горното тъждество, получаваме, че

$$X = A(m(k-l)+l)B,$$

което показва, че X е от правата AB. Нека Y е точка от прагата AB. Тогава $Y = A\,n\,B$. Понеже $C \neq D$, имаме $k \neq l$, т. е. $k-l \neq 0$. Тогава $(k-l)^{-1}$ съществува. Лесно се вижда, че $n = (n-l)(k-l)^{-1}(k-l)+l = m(k-l)+l$, където $m = (n-l)(k-l)^{-1}$. Тогава

$$Y = A\,n\,B = A(m(k-l)+l)B = (A\,k\,B)\,m\,(A\,l\,B) = C\,m\,D,$$

т. е. Y е точка от правата CD.

Лесно се доказва, че при неизродена хомотетия образът на права е пак права.

Дефиниция 15. 2. За правата AB ще казваме, че е успоредна на CD ($AB \parallel CD$), ако съществува неизродена хомотетия, преобразуваща AB в CD.

Теорема 15 2. Успоредните прави или се сливат, или нямат общи точки.

Доказателство. Нека AB и CD имат една обща точка M и нека φ е хомотетия, която преобразува AB в CD. Ако φ е идентитет, очевидно AB ще се слива с CD. Нека φ не е идентитет. Тогава M е двойна точка за φ, т. е. M е центърът на хомотетията и $\varphi = X_M^k$, където $k \neq 1$. Нека X е произволна точка от AB. Образът на X при хомотетията φ е $X' = X\,k\,M$ и ако $X \neq M$, то по теорема 15. 1 X' също ще бъде от AB, т. е. образът на AB — правата CD, съвпада с AB.

Дали обаче съществуват успоредни прави, които са различни, само с помощта на въведените аксиоми не може да се докаже, защото не е ясно дали съществуват неколинеарни точки.

Лесно се доказва и следната

Теорема 15. 3. Ако AB е права и C е точка, то през C минава единствена права, успоредна на AB.

Повече геометрията на пространството S не е необходимо да се развива, защото е ясно как може това да се осъществи. Нека припомним само, че в геометрията на въртенето дефиницията за неколинеарност беше в положителна форма, а тази за колинеарност — в отрицателна форма, докато тук в геометрията на хомотетията (т. е. в афинната геометрия) нещата са наопаки.

В следващата част ще покажем, че ако на S наложим едновременно геометрията на въртенето и хомотетията, то чрез подходящи аксиоми, които да ги свързват, S може да бъде превърнато в двумерно евклидово пространство. На въпроса, дали при подходящ синтез на геометрията на въртенето и хомотетията може да се получи някое неевклидово метрично пространство, няма да се спираме.

IV. ВЪРТЕНЕ И ХОМОТЕТИЯ

§ 16. Обща подобност, свободни вектори

Ще предполагаме, че са дадени съвкупностите S, R и H и в тях са дефинирани операциите въртене и хомотетия, удовлетворяващи ак-

сиомите съответно на въртенето и хомотетията. Сега ще искаме за операциите въртене и хомотетия да бъдат изпълнени и някои допълнителни аксиоми, които ще въвеждаме постепенно, когато стане необходимо. Първата обща аксиома на въртенето и хомотетията е следната

Аксиома $RH1$. $(A\alpha B)k(C\alpha D)=(AkC)\alpha(BkD)$, където A, B, C, D са точки, $\alpha\in R$, $k\in H$.

Теорема 16. 1. В сила е равенството $\rho^{\alpha}_{A}X^{k}_{A}=X^{k}_{A}\rho^{\alpha}_{A}$.

Доказателство. Нека X е произволна точка. Тогава

$$X\rho^{\alpha}_{A}X^{k}_{A}=(X\alpha A)kA=(X\alpha A)k(A\alpha A)=(XkA)\alpha(AkA)$$

$$=(XkA)\alpha A=XX^{k}_{A}\rho^{\alpha}_{A}.$$

Дефиниция 16. 1. Една точкова трансформация φ ще наричаме обща подобност, ако е произведение на движение и подобност.

Теорема 16. 2. Ако φ е подобност, а ψ е движение, то $\varphi\psi$ е обща подобност.

Доказателство. φ може да бъде хомотетия и транслация, а ψ — ротация и транслация.

1. Нека $\varphi=X^{k}_{A}$ $\psi=\rho^{\alpha}_{B}$. Тогава, ако X е произволна точка, имаме

$$X\varphi\psi=XX^{k}_{A}\rho^{\alpha}_{B}=(XkA)\alpha B=(XkA)\alpha(BkB)=(X\alpha B)k(A\alpha B)$$

$$=X\rho^{\alpha}_{B}X^{k}_{A\alpha B},$$

т. е. $\varphi\psi=\rho^{\alpha}_{B}X^{k}_{A\alpha B}$, което показва, че $\varphi\psi$ може да се представи като произведение на движение и подобност. Последното означава, че $\varphi\psi$ е обща подобност.

2. Нека $\varphi=\tau^{k}_{AB}$ $\psi\rho^{\alpha}_{C}$. Тогава $X\varphi\psi=X\tau^{k}_{AB}\rho^{\alpha}_{C}=((XkA)k^{-1}B)\alpha C$

$$=((X\alpha C)k(A\alpha C))k^{-1}(B\alpha C)=X\rho^{\alpha}_{C}\tau^{k}_{A\alpha C,\,B\alpha C},$$

т. е. пак $\varphi\psi$ е представено като произведение на движение и подобност. Аналогично се разглеждат и останалите два случая.

От тази теорема следва, че ако φ и ψ са подобност и движение, то $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ са общи подобности.

Теорема 16. 3. Ако са дадени τ^{α}_{AB} и $k\neq 0, 1$, съществува, и то само една, точка D, така че $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{k}_{AD}$.

Доказателство. Ще използуваме тъждеството

$$(X\alpha Y)(-\alpha)((YkA)k^{-1}P)=X(-\alpha)((XkA)k^{-1}P),$$

което се доказва, както тъждеството 3 от теорема 7. 5. Щом $k\neq 0, 1$, то и $k^{-1}\neq 0, 1$. Тогава съществува P така, че $Ak^{-1}P=B$. Тогава полагаме $D=A(-\alpha)P$. Нека X е произволна точка. Тогава

$$X\tau^k_{AD}=(X\,k\,A)k^{-1}D=(X\,k\,A)k^{-1}\,(A\,(-\alpha)P)$$

$$=((X\,k\,A)k^{-1}\,A)(-\alpha)\,((X\,k\,A)k^{-1}P)=X(-\alpha)\,((X\,k\,A)k^{-1}\,P)$$

$$=(X\,\alpha\,Y)\,(-\alpha)\,((Y\,k\,A)k^{-1}\,P).$$

Нека положим $Y=A$. Тогава $X\tau^k_{AD}=(X\,\alpha\,A)\,(-\alpha)\,((A\,k\,A)k^{-1}\,p)$ $=(X\,\alpha\,A)\,(-\alpha)\,(Ak^{-1}P)=(X\,\alpha\,A)\,(-\alpha)B=X\,\tau^{\alpha}_{A,\,B}$.
Че точка D е единствена, се проверява лесно.

Доказаната теорема показва, че няма разлика между транслациите, дефинирани с помощта на ротации и хомотетии, откъдето получаваме

Теорема 16. 4. Произведение на две транслации е транслация.

Теорема 16. 5. Съвкупността на общите подобности е група, която съдържа като инвариантни подгрупи групата на движенията и групата на подобностите. Сечението на двете последни е групата на транслациите, която е инвариантна в тях. Групата на общите подобности е инвариантна подгрупа на групата на автоморфизмите на алгебрата на въртенето и хомотетията.

Доказателство. Ще докажем само, че произведението на две общи подобности е обща подобност. Нека φ_1 и φ_2 са движения, а ψ_1 и ψ_2 подобности: тогава $\varphi_1\psi_1$ и $\varphi_2\psi_2$ са общи подобности. По теорема 16. 2 $\psi_1\varphi_2$ е обща подобност, т. е. съществуват движение φ_3 и подобност ψ_3, така че $\psi_1\varphi_2=\varphi_3\psi_3$.

Тогава имаме $\varphi_1\psi_1\varphi_2\psi_2=\varphi_1\varphi_3\psi_3\psi_2=\varphi_4\psi_4$, където $\varphi_4=\varphi_1\varphi_3$, $\psi_4=\psi_3\psi_2$. Но φ_1 и φ_3 са движения, следователно и φ_4 е движение. Аналогично ψ_4 е подобност, откъдето $\varphi_4\psi_4$ е обща подобност.

Останалите твърдения от теоремата се установяват по начин, аналогичен на теореми 7. 9 и 7. 11.

Теорема 16. 5. Ако $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{\alpha}_{CD}$ и $k\neq 1$, то $\tau^k_{AB}=\tau^k_{CD}$.

Доказателство. От $\tau^{\alpha}_{AB}=\tau^{\alpha}_{CD}$ и $k\neq 1, 0$ следва, че за всяко X имаме $(X\,\alpha\,A)\,(-\alpha)B=(X\,\alpha\,C)\,(-\alpha)D$.

Специално при $X=C$ получаваме $(C\,\alpha\,A)\,(-\alpha)B=C(-\alpha)D$. Нека положим $D=(C\,k\,A)k^{-1}\,Q$ (това е възможно, защото $k\neq 0,\ 1$). Като използуваме тъждеството $(C\alpha Y)\,(-\alpha)((Y\,k\,A)k^{-1}\,Q)=C(-\alpha)((C\,k\,A)k^{-1}\,Q)$, получаваме $(C\,\alpha\,A)\,(-\alpha)B=C(-\alpha)D=C(-\alpha)\,((C\,k\,A)k^{-1}\,Q)$

$$=(C\,\alpha\,Y)\,(-\alpha)\,((Y\,k\,A)k^{-1}\,Q).$$

При $Y=A$ равенството продължава $=((C\,\alpha\,A)\,(-\alpha)\,(Ak^{-1}\,Q)$. От полученото равенство заключаваме, че $B=Ak^{-1}\,Q$. Сега ще установим, че $\tau^k_{AB}=\tau^k_{CD}$. Имаме при произволна точка

$$X.X\tau^k_{AB}=(X\,k\,A)k^{-1}\,B=(X\,k\,A)k^{-1}\,(A\,k^{-1}\,Q)$$

$$=((X\,k\,A)k^{-1}\,A)k^{-1}\,((X\,k\,A)k^{-1}Q)=(X\,k^{-1}\,((X\,k\,A)k^{-1}\,Q)$$

$$=(X\,k\,C)k^{-1}((C\,k\,A)k^{-1}\,Q)=(X\,k\,C))k^{-1}\,D)=X\,\tau^k_{CD}.$$

От теорема 16. 5 следва, че дефинициите на свободен вектор от § 8 и § 13 сега са еквивалентни, откъдето веднага следват първа и втора основна теорема за въртенето и хомотетията:

$$[O, A\alpha B]=[O, A]-[O, B]^{\alpha}+[O, B],$$

$$[O, AkB]=k([O, A]-[O, B])+[O, B].$$

От теорема 16. 1 следва непосредствено

Теорема 16. 6. Ако p е свободен вектор, $\alpha \in R$, $k \in H$, то в сила е тъждеството $(kp)^{\alpha}=k(p^{\alpha})$.

Тук е уместно да споменем, че във връзка с R 8 беше въведено означение $2p$ и $\frac{1}{2}p$, където p е вектор. Но 2 може да се получи и като $1+1$, а $\frac{1}{2}$ — като 2^{-1}. Оказва се обаче, че и в двата смисъла тези константи имат едни и същи свойства, и затова можем да ги считаме сега тъждествени. На доказателството на този факт няма да се спираме.

§ 17. Тригонометрични функции

Аксиома $RH2$. За всеки ъгъл α съществува, и то само един, елемент $k \in H$ така, че за произволни точки A и B да е в сила равенството $(A\alpha B)(-1)(AkB)=A(-\alpha)B$.

Така формулирана аксиомата, съществено зависи от аксиома H 8. На мястото на (-1) може да се постави π, но тогава $RH2$ ще зависи от R 8, където е въведен ъгълът π. Аксиомата може да се формулира и в по-слаба форма, която не зависи от константите -1 и π, например така: За всеки ъгъл α съществува $k \in H$ така, че за произволни точки A, B и C да е в сила

$$(C\beta(A\alpha B))(-\beta)(AkB)=(C\beta(AkB))(-\beta)(A(-\alpha)B).$$

Не е трудно да се провери, че ако са налице R 8 или H 8 двете формулировки са еквивалентни.

Дефиниция 17. 1. Елементът k от аксиома $RH2$ е функция на α, за която въвеждаме означението $\cos\alpha$. Оправдание за това означение е геометричният смисъл на $RH2$, който се вижда от черт. 5. След малко ще покажем, че и формалните свойства на $\cos\alpha$ оправдават нейното наименование.

Нека приложим втора основна теорема към $RH2$, като вземем $O=B$. Тогава

$$[B, (A\alpha B)(-1)(AkB)]=[B, A(-\alpha)B]=[B, A]^{-\alpha}.$$

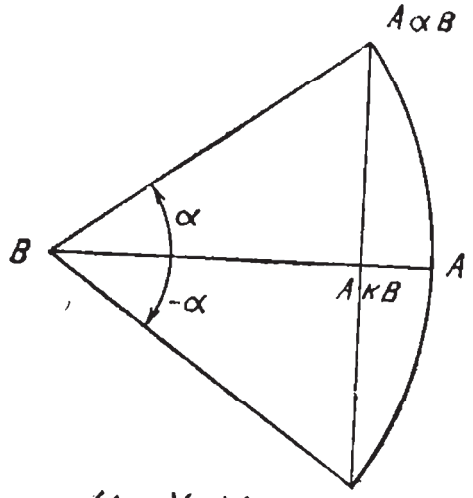
Лявата страна се преобразува

$$[B,\ (A\alpha B)(-1)(AkB)] = 2[B,\ AkB] - [B,\ A\alpha B] = 2k[B,\ A] - [B,\ A]^{\alpha}.$$

Като заместим в горното равенство, получаваме

$$2k\,[B,\ A] = [B,\ A]^{\alpha} + [B,\ A]^{-\alpha}.$$

Ако означим $[B, A]$ с p, получаваме $\cos\alpha . p = \frac{p^{\alpha} + p^{-\alpha}}{2}$. Така доказахме



$(A\alpha B)(-1)(A\kappa B) = A(-\alpha)B$ $\kappa = \cos\alpha$

Черт. 5

Теорема 17. 1. За всеки вектор p е в сила тъждеството

$$\cos\alpha\, p = \frac{p^{\alpha} + p^{-\alpha}}{2}.$$

Дефиниция 17. 2. Нека с $\frac{\pi}{2}$ означим едното от двете решения на уравнението $2x = \pi$ $\left(\text{другото е } \frac{\pi}{2} + \pi\right)$. Функцията $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ще означаваме със $\sin\alpha$.

Теорема 17. 2. За функциите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ са в сила тъждествата:

1. $\cos o = 1, \quad \cos\pi = -1,$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\alpha = \cos(-\alpha);$$

2. $\sin o = 0, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;$

3. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$

4. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$

6. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

7. $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$

Доказателство. Нека p е ненулев вектор. Имаме

1. $\cos o\, p = \frac{1}{2}(p^0 + p^0) = p = 1 . p,$ откъдето $\cos o = 1;$

$\cos\pi\, p = \frac{1}{2}(p^{\pi} + p^{-\pi}) = -p = (-1)p$ — това означава, че $\cos\pi = -1;$

$$\cos\frac{\pi}{2}\,p^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(p^{\pi}+) = 0 = 0\,p.p^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{— това дава } \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos(-\alpha)p = \frac{1}{2}(p^{-\alpha}+p^{\alpha}) = \cos\alpha\,p\,.$$

2. $\sin o = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$\sin\frac{\pi}{2} = \cos o = 1\,,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \cos\alpha\,.$$

3. $(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)p = \cos\alpha\cos\beta\,p - \sin\alpha\sin\beta\,p$

$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha(p^{\beta}+p^{-\beta}) - \sin\alpha(p^{\frac{\pi}{2}-\beta}+p^{-\frac{\pi}{2}+\beta}) = \frac{1}{4}((p^{\beta}+p^{-\beta})^{\alpha}+(p^{\beta}+p^{-\beta})^{-\alpha}$$

$$-(p^{\frac{\pi}{2}-\beta}+p^{-\frac{\pi}{2}+\beta})^{\frac{\pi}{2}-\alpha}(p^{\frac{\pi}{2}-\beta}+p^{-\frac{\pi}{2}+\beta})^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} = \frac{1}{4}(p^{\beta+\alpha}+p^{-\beta+\alpha}+p^{\beta-\alpha}+p^{-\beta+\alpha}$$

$$-p^{\pi-\beta-\alpha}-p^{\beta-\alpha}-p^{-\beta+\alpha}+p^{-\alpha+\beta+\alpha}) = \frac{1}{2}(p^{\beta+\alpha}+p^{-\beta-\alpha}) = \cos(\alpha+\beta)\,p\,.$$

Аналогично се доказва и формулата за $\cos(\alpha-\beta)$.

4. При $\alpha=\beta$ имаме $\cos(\alpha-\alpha) = \cos 0 = 1$, $\cos(\alpha-\alpha) = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$

5. $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Аналогично се доказва и формулата за $\sin(\alpha-\beta)$. От нея получаваме $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Останалите формули е вече ясно как ще се изведат.

Доказаната теорема показва, че функциите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ притежават обичайните алгебрични свойства на обикновените косинус и синус. Тук трябва да споменем, че за дефиницията на cos съществено се използва аксиома $R\,8$ или $H\,8$ (половинка на вектор), а за дефиницията на sin — $R\,8$ и $R\,9$ (половинка на ъгъл). От свойство 4 получаваме, че $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, което показва, че уравнението $x^2 = 1-\cos^2\alpha$ има поне едно решение за всяко α.

Ще изведем една формула, която показва, че въртенето на произволен вектор може да се сведе до частния случай въртене на $\frac{\pi}{2}$. Това се установява в следната

Теорема 17. 3. За всеки вектор p и ъгъл α са в сила тъждествата $\frac{1}{2}(p^{\alpha}-p^{-\alpha}) = \sin\alpha\,.\,p^{\frac{\pi}{2}}$, $p^{\alpha} = \cos\alpha\,p + \sin\alpha\,p^{\frac{\pi}{2}}$.

Доказателство. $2\sin p^{\frac{\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)p^{\frac{\pi}{2}} = p^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha}+p^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha}$
$= p^{\pi-\alpha}+p^{\alpha} = -p^{-\alpha}+p^{\alpha} = p^{\alpha}-p^{-\alpha}$.

Като съберем почленно равенствата $p^{\alpha}+p^{-\alpha}=2\cos\alpha p$ и $p^{\alpha}-p^{-\alpha}$ $=2\sin\alpha\, p^{\frac{\pi}{2}}$, получаваме $p^{\alpha}=\cos\alpha\, p+\sin\alpha\, p^{\frac{\pi}{2}}$.

§ 18. Координати и наредба

За да можем да координатизираме пространството S с помощта на R и H, са необходими допълнителни аксиоми.

Аксиома $RH3$. За всеки две различни точки E и O и точка A съществуват $a \in H$ и $\alpha \in R$, такива, че $A=(E\alpha O)aO$ и ако $A=E$, то $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$.

Нека намерим колко е a при $A=E$ и α съответно равно на o и π. При $\alpha=0$ имаме $EaO=E$ и понеже $E\neq O$ и $E1O=E$, то $a=1$. При $\alpha=\pi$ имаме $E=(E\pi O)aO$. Елементът a е различен от 0, защото в противен случай $E=O$. Тогава от горното равенство имаме

$$(Ea^{-1}O)\pi O=E$$

или $(E\pi O)a^{-1}O=E$, откъдето $a^{-1}=a$, т. е. $a^2=1$. По $H8$. $a=1$ или $a=-1$. Но при $a=1$ получаваме $E\pi O=E$, което дава $E=O$. Следователно $a=-1$.

Нека сега $A=O$. Тогава $(E\alpha O)aO=0$. Понеже при всяко α $E\alpha O\neq O$ и $(E\alpha O)aO=O$, то $a=0$.

Ако имаме $(E\alpha O)aO=A$, то лесно се проверява, че и

$$(E(\alpha+\pi)O(-a)O=A.$$

Наистина

$$(E(\alpha+\pi)O)(-\alpha)O=(((E\pi O)(-1)O)\alpha O)aO=(E\alpha O)aO=A.$$

Тези неща дават повод за въвеждане на следната

Дефиниция 18. 1. Наредената двойка различни точки O и E ще наричаме полярна координатна система. Полярни координати на точката A ще наричаме всяка двойка елементи α и a ($\alpha \in R$, $a \in H$), за които $A=((E\alpha O)aO)$. Пишем $A(\alpha, a)$.

Направените разсъждения по-горе доказват следната

Теорема 18. 1. Всяка точка A спрямо дадена полярна координатна система OE има точно две двойки полярни координати. Ако едната е (α, a), другата е $(\alpha+\pi, -a)$. Точката E има координатни двойки $(0, 1)$ и $(\pi, -1)$. Точката O има безбройно много координатни двойки и всички са от вида $(\alpha, 0)$, Ако $\alpha \in R$, $a \in H$, то съществува единствена точка, която има за координати двойката (α, a).

Нека приложим втора основна теорема към равенството

$$A=(E\alpha O)kO.$$

Получава се

$$[O, A]=[O, (E\alpha O)kO]=k[0, E]^{\alpha}.$$

Ако означим $[O, E]$ с e, а $[O, A]$ — с p, получаваме

Теорема 18. 2. За всеки вектор p съществуват елементи $k \in H$ и $\alpha \in R$, такива, че $p=ke^{\alpha}$.

Дефиниция 18. 2. Ако са дадени вектор p и полярната координатна система OE с $e=[O, E]$, то полярни координати на вектора p ще наричаме всяка двойка елементи α и k ($\alpha \in R$, $R \in H$) за които $p=ke^{\alpha}$. Пишем $p(\alpha, k)$.

Теорема 18. 3. Спрямо дадена полярна координатна система OE с $[O, E]=e$ всеки вектор $p \neq o$ има точно две двойки координати; ако едната е (α, k), другата е $(\alpha+\pi, -k)$. Векторът e има за координати двойките $(0, 1)$ и $(\pi, -1)$. Нулевият вектор има безбройно много координатни двойки, които са от вида $(\alpha, 0)$. Ако $\alpha \in R$ $k \in H$, то съществува единствен вектор, който има за координати двойката (α, k).

Ако (α, k) са полярни координати на вектора p, то $p=ke^{\alpha}$. Като приложим теорема 17. 3, получаваме $p=k\cos\alpha\, p+k\sin\alpha\, p^{\frac{\pi}{2}}$. Това дава повод за следната

Дефиниция 18. 3 Ако спрямо дадена координатна система векторът p има полярни координати (α, k), то двойката елементи $(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$ ще наричаме декартови координати на p. Аналогично, ако A има координати α, a, двойката $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ ще бъде нейни декартови координати.

Теорема 18. 4. Спрямо дадена координатна система всеки вектор има точно една двойка декартови координати. Ако x и y са елементи на H, то съществува единствен вектор, който има за декартови координати двойката (x, y).

Доказателство. Ако p е нулевият вектор, то е ясно, че единствената му двойка декартови координати ще бъде двойката $(0, 0)$. Нека $p \neq o$ и (α, k), $(\alpha+\pi, -k)$ са двете двойки полярни координати. Като използуваме, че $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$, лесно получаваме, че и двете двойки дават една и съща двойка декартови координати, а именно $(k\cos\alpha, k\sin\alpha)$.

За да докажем втората част на теоремата, най-напред ще установим следната

Лема. Ако $e \neq o$ и $se+te^{\frac{\pi}{2}}=o$, то $s=0$ и $t=0$.

Доказателство. Да допуснем противното. Тогава $s \neq 0$ и $t \neq 0$, защото, ако например само $s \neq 0$, а $l=0$, ще получим $se=\overline{0}$, т. е. $e=o$. От $s \neq 0$, $t \neq 0$ следва $e=(s^{-1}t)e^{\frac{\pi}{2}}$. Това показва, че двойката $\left(\frac{\pi}{2}, s^{-1}, t\right)$ е двойка полярни координати на вектора e. Последното

обаче противоречи на теорема 18. 3., според която векторът p има за полярни координати само двойките $(o, 1)$ и $(\pi, -1)$.

Да докажем теоремата. Нека $x \in H$ и $y \in H$ и нека положим $x e + y e^{\frac{\pi}{2}} = p$. Но по теорема 18. 4 за p съществуват елементи α и k (това са неговите полярни координати), така че $p = k \cos\alpha\, e + k \sin\alpha\, e^{\frac{\pi}{2}}$. Като използуваме горното равенство, получаваме $(x - k\cos\alpha) e + (y - k\sin\alpha)\, e^{\frac{\pi}{2}} = o$, откъдето по лемата $x = k\cos\alpha$, $y = k\sin\alpha$. Получихме, че (x, y) е двойка декартови координати на вектора p.

От лемата следва още, че системата

$$a = c\cos\alpha$$
$$b = c\sin\alpha$$

за $(a, b) \neq (0, 0)$ притежава точно две решения за c и α и ако двойката (α, c) е едното решение, то $(\alpha + \pi, -c)$ е другото решение. При това $c \neq 0$. Ако $a = b = 0$, системата има безбройно много решения, които са от вида $(\alpha, 0)$.

Ако повдигнем двете равенства в квадрат и почленно съберем, се получава $a^2 + b^2 = c^2$, при това $c = 0$ точно тогава, когато $a = 0$ и $b = 0$. Оттук лесно следва, че ако $a \in H$, то $a^2 \neq -1$. И наистина, ако допуснем, че има някакво a_0, за което $a_0^2 = -1$, ще получим

$$a_0^2 + 1 = a_0^2 + 1^2 = 0,$$

от което следва противоречивият резултат $a_0 = 0$ и $1 = 0$. Тези неща доказват следната

Теорема 18. 5. За всеки два елемента a и b от H съществува елемент $c \in H$, такъв, че $a^2 + b^2 = c^2$ и не съществува $a \in H$, такова, че $a^2 = -1$. Полето H е питагорово, в което -1 не е квадрат.

От теорема 18. 5. следва, че $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \neq 0$ за произволен брой единици, което доказва

Теорема 18. 6. Полето H е с характеристика 0.

Това означава, че H съдържа рационалните числа и по теоремата на Артин-Шрайер [3] съществува наредба в H, която се съгласува с наредбата на рационалните числа.

Теорема 18. 7. Неравенствата $-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$ и $-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ са изпълнени при всяка възможна наредба в H.

Доказателство. От $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ следва $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, откъдето $1 - \sin^2\alpha \geqq 0$, т. е. $\sin^2\alpha \leqq 1$. От последното неравенство следва, че $-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$. Аналогично се доказва и другото неравенство.

Нека сега намерим израз за координатите (декартови) на $A k B$ чрез координатите на A и B. Нека имаме $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Това означава, че $[O, A] = x_1 e + y_1 e^{\frac{\pi}{2}}$, $[O, B] = x_2 e + y_2 e^{\frac{\pi}{2}}$. По втора основна теорема имаме

$$[O,\ AkB]=k([O,\ A]-[O,\ B])+[O,\ B]=k(x_1 e+y_1 e^{\frac{\pi}{2}}-x_2 e-y_2 e^{\frac{\pi}{2}})$$

$$+x_2 e+y_2 e^{\frac{\pi}{2}}=(k(x_1-x_2)+x_2)e+(k(y_1-y_2)+y_2)e^{\frac{\pi}{2}},$$

откъдето AkB има за координати $(k(x_1-x_2)+x_2,\ k(y_1-y_2)+y_2)$.

Оттук следва, че необходимото и достатъчно условие за колинеарност на точките $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ е да съществува $k \in H$ така, че $x_3=(k(x_1-x_2)+x_2$, $y_3=k(y_1-y_2)+y_2$, откъдето лесно следва, че правата линия, минаваща през точките A и B, има параметрични уравнения

$$\begin{cases} x=k(x_1-x_2)+x_2, \\ y=k(y_1-y_2)+y_2, \end{cases}$$

и общо уравнение от вида $ax+by+c=0$.

Дефиниция 18. 4. Нека е дадена една фиксирана наредба на полето H. Ще казваме, че точката C се намира между A и B относно дадената наредба на H, ако съществува $k \in H$, такава, че $C=AkB$ и $0<k<1$. Бележим $C\ AB$.

Лесно се доказва следната

Теорема 18. 8. Релацията „между" от дефиниция 18. 4 удовлетворява хилбертовите аксиоми [13] на наредбата.

Възниква въпросът, при какви условия релацията „между" не зависи от конкретната наредба на H. Това е равносилно при какви условия за един елемент k от H е изпълнено $o<k<1$ при всяка наредба на H (според теорема 18. 7, ако $k=\cos^2\alpha$ и $\alpha \neq o, \frac{\pi}{2}$, то $0<k<1$ при всяка наредба на H. Тогава, ако в дефиниция 18. 4 заменим k с $\cos^2\alpha$ $\left(\alpha \neq o, \frac{\pi}{2}\right)$, релацията „между" няма да зависи от конкретната наредба на H, но в замяна на това ще загуби доста от свойствата си, специално аксиомата на Паш не се вижда дали винаги ще бъде изпълнена.

§ 19. Скаларно произведение на вектори

Дефиниция 19. 1. Нека са дадени векторите p, q, r с $q \neq o$. Тогава $p=kq^{\alpha}$, $r=lq^{\beta}$. Дефинираме една тернарна операция в съвкупността на всички вектори, приемаща значенията си в H, по следния начин: $pqr=kl\cos(\alpha-\beta)$. Ако q е нулев вектор, операцията не е дефинирана.

Дефинираното действие ще наричаме скаларно произведение на p и r по отношение на вектора q.

Разбира се, трябва да се установи, че pqr не зависи от представянията на p и r чрез q, но това не е трудно.

Теорема 19. 1. Ако $q \neq o$ и $p = x_1 q + y_1 \overset{\pi}{q^2}$, $r = x_2 q + y_2 \overset{\pi}{q^2}$, то $pqr = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Доказателство. Лесно се вижда, че ако $p = kq^{\alpha}$ $r = lq^{\beta}$, то

$$x_1 = k \cos \alpha, \quad y_1 = k \sin \alpha \quad x_2 = l \cos \beta, \; y_2 = l \sin \beta.$$

Тогава $pqr = kl \cos(\alpha - \beta) = (k \cos \alpha)(l \cos \beta) + (k \sin \alpha)(l \sin \beta) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Теорема 19. 2. За скаларното произведение са в сила равенствата:

1. Ако $q \neq o$, то $pqr = pq^{\alpha} r$ за всяко α.

2. Ако $q \neq o$ и $m \neq 0$, то $p(mq)r = m^2 (pqr)$.

3. $pqr = rqp$.

4. $\lambda(pqr) = (\lambda p) qr$.

5. $(p_1 + p_2)qr = p_1 qr = p_2 qr$.

6. Ако $p \neq o$, $q \neq o$, то $pqp > 0$.

Доказателство. Всички тези свойства лесно следват от дефиницията и теорема 19. 1. Нека проверим например свойство 5. Нека $q \neq o$ и $p_1 = x_1 q + y_1 \overset{\pi}{q^2}$, $p_2 = x_2 q + y_2 \overset{\pi}{q^2}$, $r = x_3 q + y_3 \overset{\pi}{q^2}$. Тогава

$$p_1 qr + p_2 qr = (x_1 x_3 + y_1 y_3) + (x_2 x_3 + y_2 y_3)$$
$$= (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 = (p_1 + p_2) qr.$$

От доказаната теорема следва, че съвкупността на всички точки и вектори образува евклидово пространство с размерност 2, т. е. евклидова равнина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артин, Э.: Геометрическая алгебра. Москва, 1969.
2. Бахман, Ф.: Построение геометрии на основе понятия симетрии. Москва, 1969.
3. Бурбаки, Н.: Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. Москва, 1965.
4. Белоусов, В. Д.: Основы теории квазигрупп и луп. Москва, 1967.
5. Белоусов, В. Д.: Транзитивные дистрибутивные квазигруппы. Укр. мат. ж., **10** (1958), № 1, 13—22.
6. Белоусов, В. Д.: Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. Усп. матем. наук, **20**, 1 (121), (1965), 75—146.
7. Вейль, Г.: Симметрия. Москва, 1968.
8. Вакарелов, Д.: Тернарни групи. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **61** (1966/67), 71—104.
9. Пухарев, Н. К.: Геометрические вопросы некоторых медиальных квазигрупп. Сиб. мат. ж., IX (1968), 4,
10. Рашевский, П. К.: Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва, 1964, 2 изд.
11. Сушкевич, А. К.: Теория обобщеных групп. Киев, 1937.
12. Toyoda, K. On axioms of linear functions. Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 221—227.

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

ALGEBRAISCHE GRUNDLAGEN DER ZENTRAL-SYMMETRIE, DER DREHUNG UND DER ZENTRALEN ÄHNLICKEIT

D. Wakarelow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit wird der Versuch gemacht, die im Titel erwähnten geometrischen Transformationen axiomatisch zu behandeln.

Im ersten Teil der Arbeit sind zwei Axiomensysteme für die Zentralsymmetrie behandelt. Als Grundbegriffe werden Punkt und Zentralsymmetrie gewählt. Falls A und B Punkte sind, dann verstehen wir unter $A.B$ einen Punkt, der zentralsymmetrisch zu A bezüglich B ist. Es folgen die Axiome:

S 0. Das Produkt $A.B$ ist für beliebige Punkte A und B definiert.

S 1. $A.A=A$.

S 2. Die Gleichung $B.X=A$ hat genau eine Lösung.

S 3. $((A.B).C).D=((A.D).C).B$.

Es wird gezeigt, daß S **3** durch die folgenden zwei Axiome ersetzt werden kann:

S 3'. $(A.B).(C.D)=(A.C).(B.D)$.

S 3'' $(A.B).B=A$.

Es sind auch geometrische Fragen der medialen [4] Quasigruppen behandelt. Es wird ein geometrischer Beweis eines Satzes von Toyoda gegeben.

Im zweiten Teil sind die Axiome der Drehung angegeben. Es ist ein Teil der Geometrie aufgebaut, der davon abhängt. Grundbegriffe sind Punkt, Winkel und eine ternäre Operation $A\alpha B$. Falls A und B Punkte sind und α ein Winkel ist, so versteht man unter $A\alpha B$ einen Punkt, den man durch die Drehung von A um B um den Winkel α erhält.

Die Axiome sind:

R 0. $A\alpha B$ ist definiert für beliebige Punkte A und B und beliebigen Winkel α.

R 1. Aus $A\neq B$ und $A\alpha B=A\beta B$ folgt $\alpha=\beta$. Es existieren mindestens zwei verschiedene Punkte.

R 2. Es existiert ein Winkel o, so daß $AoB=A$ für beliebige Punkte A und B.

R 3. Für jeden Winkel α existiert ein Winkel $-\alpha$, so daß $(A\alpha B)(-\alpha)B=A$ für beliebige Punkte A und B ist.

R 4. Für je zwei Winkel α und β existiert genau ein Winkel γ, so daß $(A\alpha B)\beta B=A\gamma B$ für beliebige Punkte A und B ist.

R 5. $A\alpha A=A$ für beliebigen Punkt A und Winkel α.

R 6. $(A\alpha B)\beta(C\alpha D)=(A\beta C)\alpha(B\beta D)$ für beliebige Punkte A, B, C und D und Winkel α und β.

R 7. Falls $\alpha\neq o$, so hat die Gleichung $B\alpha X=A$ genau eine Lösung.

Im dritten Teil ist ein System von Axiomen für die zentrale Ähnlichkeit ausgearbeitet. Die Grundbegriffe sind Punkt, Koeffizent der Ähnlich-

keit und eine ternäre Operation AkB, wo A und B Punkte sind und k der Koeffizient ist. Unter AkB versteht man einen Punkt, der zu A ähnlich ist bezüglich B mit dem Ähnlichkeitskoeffizienten k. Die Axiome sind die folgenden:

H 0. AkB ist definiert für die beliebigen Punkte A, B und den Koeffizienten k.

H 1. Aus $A \neq B$ und $AkB = AlB$ folgt $k = l$. Es existieren mindestens zwei verschiedene Punkte.

H 3. Falls $k \neq 0$, existiert k^{-1}, so daß $(AkB)k^{-1}B = A$ für beliebige Punkte A und B ist.

H 4. Für je zwei Koeffizienten k und l existiert genau ein Koeffizient m, so daß $(AkB)lB = AmB$ fur beliebige A und B ist.

H 4. 2 Für je zwei Koeffizienten k und l existiert genau ein Koeffizient m, so daß für beliebige A, B, C und $n \neq 0$, 1. $(CnB)n^{-1}(AkB) = (Cn(AlB)n^{-1}(AmB)$ gilt.

H 5. $AkA = A$ für beliebige A und B.

H 6. $(AkB)l(CkD) = (AlC)k(BlD)$.

H 7. Falls $k \neq 0$, $k \neq 1$, hat die Gleichung $BkX = A$ genau eine Lösung.

Es ist bewiesen worden, daß falls die Zentralsymmetrie ein Spezialfall der Ähnlichkeit ist, dann fällt die Geometrie der Ähnlichkeit mit der affinen Geometrie über einem Körper zusammen.

Im vierten Teil ist die Vereinigung der Geometrie der Drehung mit der Geometrie der Ähnlichkeit betrachtet worden; es sind zusätzliche Axiome eingeführt worden, die die Begriffe der Drehung und der Ähnlichkeit verbinden. Das so erhaltene System ist ein algebraisches Äquivalen der euklidischen Ebene über einem Pythagoreischen Körper.