ВЪРХУ НАПРЕЧНИЦИТЕ НА ПРОСТРАНСТВОТО ОТ НЕПРЕКЪСНАТИТЕ ФУНКЦИИ С МЕТРИКА ОТ ХАУСДОРФОВ ТИП

Тодор П. Боянов и Васил А. Попов

В теорията на апроксимацията се изучават редица въпроси, свързани със следната задача: дадено е линейно метрично пространство L и крайномерно линейно подпространство $L' \subset L$. За произволен елемент $x \in L$ се търси такова $x' \in L'$, че разстоянието между x и x' да бъде минимално. Всеки конкретен избор на L' дава апарат за апроксимиране, повече или по-малко подходящ при дефинираното в L разстояние. Една характеристика на линейното метрично пространство, определяща възможностите за апроксимиране в него, е въведеното от А. Н. Колмогоров в [1] понятие „напречник". В. М. Тихомиров в [2] и [3] изследва напречниците на множества във функционални банахови пространства. За пространството от непрекъснатите функции с метрика от хаусдорфов тип [7], което не е банахово, Бл. Сендов и Б. Пенков дават в [5], [6] оценки отгоре и отдолу и асимптотика на n-тия напречник. В настоящата работа се използва модификация на техния метод за намиране на точните стойности на напречниците (теорема 1 и теорема 2).

Дефиниции

Да означим с C_Δ линейното пространство от непрекъснатите в интервала $\Delta = [a, b]$ функции. C_Δ се превръща в метрично пространство при въвеждане на следното разстояние от хаусдорфов тип [4], [7]:

$$r(f, g) = \max\{\max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \| f(x), g(y) \|, \max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \| g(x), f(y) \|\},$$

където

$$\| f(x), g(y) \| = \max\{ |x-y|, |f(x)-g(y)| \}, \quad f \in C_\Delta, \ g \in C_\Delta.$$

Разстояние между $f \in C_\Delta$ и множеството $G \subset C_\Delta$ ще наричаме

$$r(f, G) = \inf_{g \in G} r(f, g).$$

Това е най-доброто приближение на f чрез елементи на G.

Отклонение на множеството $F \subset C_1$ от множеството $G \subset C_1$ се дефинира като

$$\delta(F;\ G) = \sup_{f \in F} r(f,\ G)$$

и тогава n-тият напречник на C_1 относно хаусдорфовото разстояние е

$$d_n(C_1) = \inf \delta(C_1;\ L_j),$$

където inf се взема по всички линейни подпространства $L_j \subset C_1$ с размерност j, $j \leqq n$. Напречникът представлява най-доброто приближение на цялата съвокупност C_1 с линейни комбинации на фиксиран брой непрекъснати функции. От дефиницията се вижда, че редицата от напречниците е монотонно намаляваща, т. е.

$$d_k(C_1) \geqq d_{k+1}(C_1).$$

Теорема 1. В сила са равенствата

$$d_n(C_1) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{b-a}{n}, & n = 3k, \\[2ex] \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{b-a}{n-1}, & n = 3k+1, \\[2ex] \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{b-a}{n-\frac{1}{2}}, & n = 3k+2. \end{cases}$$

Не съществува n-мерно линейно подпространство $L \subset C_1$, за което $d_n(C_1) = \delta(C_1;\ L)$.

Доказателството на теорема 1 ще извършим, като получим оценки отгоре и отдолу за $d_n(C_1)$.

Ще използуваме по-нататък следните две помощни непрекъснати функции на променливата x, които зависят и от положителните параметри h и ε, $h > \varepsilon > 0$:

$$\eta(h,\ \varepsilon;\ x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqq h+\varepsilon, \\[1ex] \dfrac{1}{2\varepsilon}(h+\varepsilon-|x|), & h-\varepsilon \leqq |x| \leqq h+\varepsilon, \\[1ex] 1, & |x| \leqq h-\varepsilon; \end{cases} \tag{1}$$

$$\tau(\varepsilon;\ x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqq \varepsilon, \\[1ex] \dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon-|x|), & |x| \leqq \varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Оценки отгоре

Нека $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; да означим $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $h_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вижда се, че $x \in \Delta_i$ тогава и само тогава, когато $|x - \xi_i| \leqq h_i$.

Ако $h = \max\limits_i h_i$, да разделим множеството $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ на два класа: $D_1 = \left\{\Delta_j : h_j > \frac{h}{2}\right\}$ с k елемента и $D_2 = \left\{\Delta_j : h_j \leqq \frac{h}{2}\right\}$ с l елемента, $l = n - k$.

Лема 1. Изпълнено е неравенството

$$d_{3k+2l}(C_\Delta) \leqq h.$$

Нека $\varepsilon \leqq \frac{h_i}{3}$ за всяко i. Да дефинираме при $x \in \Delta$ функциите

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 1, & a \leqq x \leqq \xi_1, \\ \eta(h_1, \varepsilon;\ x - \xi_1), & \xi_1 \leqq x \leqq b; \end{cases}$$

$$\eta_i(x) = \eta(h_i, \varepsilon;\ x - \xi_i),\ i = 2, 3, \ldots, n-1; \tag{3}$$

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \eta(h_n, \varepsilon;\ x - \xi_n), & a \leqq x \leqq \xi_n, \\ 1, & \xi_n \leqq x \leqq b \end{cases}$$

(при $n = 1$ дефинираме $\eta_1(x) \equiv 1$, което води до съответна модификация на (7))

$$\tau_i^-(x) = \tau(\varepsilon;\ x - \xi_i + \varepsilon),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\tau_j^+(x) = \tau(\varepsilon;\ x - \xi_j - \varepsilon),\ \Delta_j \in D_1. \tag{5}$$

Непосредствено от дефинициите (3), (4) и (5) се получават следните свойства:

$$\left|\begin{array}{l} 0 \leqq \eta_i(x) \leqq 1,\ 0 \leqq \tau_i^-(x) \leqq 1;\ x \in \Delta, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 \leqq \tau_j^+(x) \leqq 1,\ x \in \Delta,\ \Delta_j \in D_1; \end{array}\right. \tag{6}$$

$$\left|\begin{array}{l} \eta_1(x) = 1,\ a \leqq x \leqq x_1 - \varepsilon;\ \eta_1(x) = 0,\ x_1 + \varepsilon \leqq x \leqq b; \\ \eta_i(x) = 1,\ |x - \xi_i| \leqq h_i - \varepsilon;\ \eta_i(x) = 0,\ |x - \xi_i| \geqq h_i + \varepsilon, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, n-1; \\ \eta_n(x) = 1,\ x_{n-1} + \varepsilon \leqq x \leqq b;\ \eta_n(x) = 0,\ a \leqq x \leqq x_{n-1} - \varepsilon; \end{array}\right. \tag{7}$$

(8) $$\tau_i^-(\xi_i-\varepsilon)=1\,;\ \tau_i^-(x)=0,\ |x-(\xi_i-\varepsilon)|\geqq\varepsilon,$$
$$i=1,2,\ldots,n;$$

(9) $$\tau_j^+(\xi_j+\varepsilon)=1\,;\ \tau_j^+(x)=0,\ |x-(\xi_j+\varepsilon)|\geqq\varepsilon.$$
$$\Delta_j\in D_1.$$

Да разгледаме линейното пространство $L_\varepsilon\subset C_\Delta$, което е линейна обвивка на функциите $\eta_i(x)$, $\tau_i^-(x)$, $i=1,2,\ldots,n$ и $\tau_j^+(x)$, $\Delta_j\in D_1$. Ще докажем, че

(10) $$\delta(C_\Delta;L_\varepsilon)\leqq h+2\varepsilon,$$

като за всяка функция $f\in C_\Delta$ построим $f^*\in L_\varepsilon$ със свойството

(11) $$r(f,f^*)\leqq h+2\varepsilon.$$

И наистина тогава съгласно дефиницията на отклонение

$$\delta(C_\Delta;L_\varepsilon)=\sup_{f\in C_\Delta}\inf_{f'\in L_\varepsilon}r(f,f')\leqq\sup_{f\in C_\Delta}r(f,f^*)\leqq h+2\varepsilon.$$

Нека $f\in C_\Delta$, $m_i=\min\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$, $M_i=\max\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$, $i=1,2,\ldots,n$.

Ще покажем, че неравенството (11) е изпълнено за функцията

(12) $$f^*(x)=\sum_{\Delta_j\in D_1}\{f(\xi_j)\,.\,\eta_j(x)+[m_j-f(\xi_j)]\,.\,\tau_j^-(x)+[M_j-f(\xi_j)]\,.\,\tau_j^+(x)\}$$
$$+\sum_{\Delta_j\in D_2}\{M_j\,.\,\eta_j(x)+[m_j-M_j]\,.\,\tau_j^-(x)\}.$$

Ще използуваме свойствата (6), (7), (8) и (9), за да представим стойностите на f^* в по-прост вид.

А. Нека $(x, f(x))$ е точка от графиката на f. Да разгледаме следните два случая:

1. $x\in\Delta_j$, $\Delta_j\in D_1$:

Лесно се вижда, че

$$f^*(\xi_j-\varepsilon)=f(\xi_j)+[m_j-f(\xi_j)]=m_j,$$
$$f^*(\xi_j+\varepsilon)=f(\xi_j)+[M_j-f(\xi_j)]=M_j.$$

2. $x\in\Delta_j$, $\Delta_j\in D_2$.

Сега $f^*(\xi_j-\varepsilon)=m_j$, а $f^*(\xi_j)=M_j$.

Тъй като $x\in\Delta_j$, то $m_j\leqq f(x)\leqq M_j$ и поради непрекъснатостта на f^* може да се намери и в двата случая точка $x'\in[\xi_j-\varepsilon,\ \xi_j+\varepsilon]$, за която $f^*(x')=f(x)$. От друга страна, $|x-\xi_j|\leqq h$ и $|x'-\xi_j|\leqq\varepsilon$, откъдето

$$|f(x),\ f^*(x')|=\max\{|x-x'|,0\}\leqq h+\varepsilon.$$

Тогава $\min_{y \in \Delta} | f(x), f^*(y) \leqq f(x), f^*(x') \leqq h+\varepsilon$ и поради произволния избор на x

(13) $$\max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} | f(x), f^*(y) \leqq h+\varepsilon.$$

Б. Да разгледаме точка $(x, f^*(x))$ от графиката на f^*. Възможни са следните случаи:

1. $x-\xi_j \leqq 2\varepsilon$, $\Delta_j \in D_1$.

Сумата от (12) се представя във вида

$$f^*(x)=f(\xi_j)+[m_j-f(\xi_j)] \cdot \tau_j^-(x)+[M_j-f(\xi_j)] \cdot \tau_j^+(x),$$

откъдето $m_j \leqq f^*(x) \leqq M_j$. Но $f(x)$ е непрекъсната и $m_j=\min_{x \in \Delta_j} f(x)$, $M_j=\max_{x \in \Delta_j} f(x)$, следователно съществува точка $x' \in \Delta_j$, за която $f(x')=f^*(x)$. Тъй като $x-\xi_j \leqq 2\varepsilon$ и $|x'-\xi_j| \leqq h$, то $|x-x'| \leqq h+2\varepsilon$ откъдето следва

(14) $$f^*(x), f(x') | = \max\{|x-x'|, 0\} \leqq h+2\varepsilon.$$

2. $x-\xi_j \leqq 2\varepsilon$, $\Delta_j \in D_2$.

От (12) получаваме $f^*(x)=M_j+[m_j-M_j] \cdot \tau_j^-(x)$. Отново $m_j \leqq f^*(x) \leqq M_j$, а от това неравенство, както и в първия случай, следва (14).

3. $2\varepsilon \leqq |x-\xi_j| \leqq h_j-\varepsilon$, $\Delta_j \in D_1$.

Сега $f^*(x)=f(\xi_j)$ и ако положим $x'=\xi_j$, то

(15) $$f^*(x), f(x') | \leqq h-\varepsilon.$$

4. $2\varepsilon \leqq |x-\xi_j| \leqq h_j-\varepsilon$, $\Delta_j \in D_2$.

От (12) се определя $f^*(x)=M_j$. Като означим с x' точката от Δ_j, в която $f(x')=M_j$, получаваме неравенството (15).

5. При $x \in [a, a+\varepsilon]$ и $x \in [b-\varepsilon, b]$ аналогично на предишния случай се получава за $x'=\xi_1$, съответно за $x'=\xi_n$, неравенството

(16) $$\| f^*(x), f(x') \| \leqq h.$$

6. $|x-x_j| \leqq \varepsilon$, $j=1, 2, \ldots, n-1$.

Сега само $\eta_j(x)$ и $\eta_{j+1}(x)$ не са нули и

$$f^*(x)=A_j \cdot \eta_j(x)+A_{j+1} \cdot \eta_{j+1}(x)$$

$$=A_j \cdot \frac{1}{2\varepsilon}(-x+x_j+\varepsilon)+A_{j+1} \cdot \frac{1}{2\varepsilon}(x-x_j+\varepsilon),$$

където

$$A_k=\begin{cases} f(\xi_k), & \Delta_k \in D_1, \\ M_k, & \Delta_k \in D_2, \end{cases} \quad k=j,\ j+1.$$

Непосредствено се вижда, че при $|x-x_j| \leqq \varepsilon$ функцията f^* е линейна и тъй като в краищата на интервала има стойности

$f^*(x_j-\varepsilon)=A_j$ и $f^*(x_j+\varepsilon)=A_{j+1}$, то $A_j \leqq f^*(x) \leqq A_{j+1}$, респективно $A_{j+1} \leqq f^*(x) \leqq A_j$. Нека $f(y_k)=A_k$, $y_k \in \Delta_k$, като $y_k-x_j \leqq h$, $k=j, j+1$. Съществува точка $x' \in [y_j, y_{j+1}]$, за която $f(x')=f^*(x)$ и

$$\| f^*(x), f(x') \| \leqq h+\varepsilon. \tag{17}$$

Като се обединят (14), (15), (16) и (17), се получава, че за всяко $x \in \Delta$ може да се намери $x' \in \Delta$, за което

$$\| f^*(x), f(x') \| \leqq h+2\varepsilon,$$

и следователно

$$\max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \| f^*(x), f(y) \| \leqq h+2\varepsilon. \tag{18}$$

Неравенствата (13) и (18) доказват (11), откъдето следва (10) и тъй като размерността на подпространството L_ε не надминава $3k+2l$, лема 1 е доказана.

Да предположим, че $x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$, $i=0, 1, \ldots, n$. В този случай $h_i=\dfrac{b-a}{2n}$ за $i=1, 2, \ldots, n$, класът D_1 съвпада с цялото множество $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, $k=n, l=0$ и от лема 1 получаваме

Следствие 1. В сила е следното неравенство

$$d_{3n}(C_\Delta) \leqq \frac{b-a}{2n}. \tag{19}$$

Втора оценка отгоре се получава, като изберем $n+1$ точки $x_i=a+2i\cdot\dfrac{b-a}{2n+1}$, $i=0, 1, \ldots, n$ и $x_{n+1}=b$. Сега $h_i=\dfrac{b-a}{2n+1}$ за $i=1, 2, \ldots, n$, $h_{n+1}=\dfrac{b-a}{2(2n+1)}$ и поради това D_1 съдържа Δ_j за $j=1, 2, \ldots, n$, $D_2=\{\Delta_{n+1}\}$, т. е. $k=n$, $l=1$, и лема 1 ни дава

Следствие 2. В сила е следното неравенство

$$d_{3n+2}(C_\Delta) \leqq \frac{b-a}{2n+1}. \tag{20}$$

Оценки отдолу

Лема 2. Нека $L \subset C_\Delta$ е крайномерно подпространство на C_Δ и $\delta(C_\Delta; L) \leqq \alpha$. Тогава за всяко $t \in [a, b]$ съществуват функции $\varphi_t(x) \in L$, $\psi_t(x) \in L$ и $\theta_t(x) \in L$ със свойствата

1. $\varphi_t(x)=0$, $|x-t|>2\alpha$;

$$\varphi_t(t)=1; \tag{21}$$

$$0 \leqq \varphi_t(x) \leqq 1, \ x \in [a, b].$$

2. $\psi_t(x)=0, \quad x-t > \alpha.$

Съществува $\eta_t \in [a, b], \quad \eta_t - t \leqq \alpha$, такова, че

$$\psi_t(\eta_t)=1 \tag{22}$$
$$0 \leqq \psi_t(x) \leqq 1, \; x \in [a, b].$$

3. $\theta_t(x)=0, \quad x-t > \alpha;$

Съществуват $\zeta_t^+ \in [a, b], \quad \zeta_t^+ - t \leqq \alpha$ и $\zeta_t^- \in [a, b], \quad \zeta_t^- - t \leqq \alpha$, такива, че

$$\theta_t(\zeta_t^+)=1, \quad \theta_t(\zeta_t^-)=-1; \tag{23}$$
$$|\theta_t(x)| \leqq 1, \; x \in [a, b].$$

Доказателство. Като използуваме функциите $\eta(h, \varepsilon; x)$ и $\tau(\varepsilon; x)$, дефинирани чрез (1) и (2), при зададени $t \in [a, b]$, $M > 0$ и достатъчно малко $\varepsilon > 0$, да разгледаме функциите $f_1(x)=M.\eta(\alpha+\varepsilon, \varepsilon; x-t)$, $f_2(x)=M.\tau(\varepsilon; x-t)$ и $f_3(x)=M.[\tau(\varepsilon; x-t-\varepsilon)-\tau(\varepsilon; x-t+\varepsilon)]$. От $\delta(C_1; L) \leqq \alpha$ следва, че съществуват функции $\varphi_t(x; M, \varepsilon) \in L$, $\psi_t(x; M, \varepsilon) \in L$ и $\theta_t(x; M, \varepsilon) \in L$, за които

$$r(\varphi_t(x; M, \varepsilon), f_1(x)) \leqq \alpha,$$
$$r(\psi_t(x; M, \varepsilon), f_2(x)) \leqq \alpha,$$
$$r(\theta_t(x; M, \varepsilon), f_3(x)) \leqq \alpha.$$

От дефиницията на хаусдорфово разстояние между функции получаваме

1a. $$\left|\frac{1}{M}\varphi_t(x; M, \varepsilon)\right| \leqq \frac{\alpha}{M}, \; |x-t| \geqq 2\alpha+2\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{M}\varphi_t(t; M, \varepsilon)-1\right| \leqq \frac{\alpha}{M}; \tag{24}$$

$$-\frac{\alpha}{M} \leqq \frac{1}{M}\varphi_t(x; M, \varepsilon) \leqq 1+\frac{\alpha}{M}, \; x \in [a, b].$$

2a. $$\left|\frac{1}{M}\psi_t(x; M, \varepsilon)\right| \leqq \frac{\alpha}{M}, \; |x-t| \geqq \alpha+\varepsilon.$$

Съществува точка $\eta_t \in [a, b], \; |\eta_t - t| \leqq \alpha$, такава, че

$$\left|\frac{1}{M}\psi_t(\eta_t; M, \varepsilon)-1\right| \leqq \frac{\alpha}{M}; \tag{25}$$

$$-\frac{\alpha}{M} \leqq \frac{1}{M}\psi_t(x; M, \varepsilon) \leqq 1+\frac{\alpha}{M}, \; x \in [a, b].$$

За. $\left|\frac{1}{M}\theta_t(x; M, \varepsilon)\right| \leqq \frac{\alpha}{M}, \quad |x-t| \geqq \alpha+2\varepsilon;$

Съществуват точки $\zeta_t^+ \in [a, b]$, $|\zeta_t^+ - t| \leqq \alpha+2\varepsilon$ и $\zeta_t^- \in [a, b]$, $|\zeta_t^- - t| \leqq \alpha+2\varepsilon$, такива, че

$$(26) \qquad \left|\frac{1}{M}\theta_t(\zeta_t^+; M, \varepsilon)-1\right| \leqq \frac{\alpha}{M}; \quad \left|\frac{1}{M}\theta_t(\zeta_t^-; M, \varepsilon)-(-1)\right| \leqq \frac{\alpha}{M};$$

$$\left|\frac{1}{M}\theta_t(x; M, \varepsilon)\right| \leqq 1+\frac{\alpha}{M}, \quad x \in [a, b].$$

Тъй като L е крайномерно линейно подпространство на C_Δ, то единичната сфера на L е компактна относно равномерното разстояние. Поради това чрез граничен преход $M \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ в (24), (25) и (26) от подходящи подредици на $\frac{1}{M}\varphi_t(x; M, \varepsilon)$, $\frac{1}{M}\psi_t(x; M, \varepsilon)$ и $\frac{1}{M}\theta_t(x; M, \varepsilon)$ получаваме функции $\varphi_t(x) \in L$, $\psi_t(x) \in L$ и $\theta_t(x) \in L$ със свойствата (21), (22) и (23).

Нека сега $t=a$, респективно $t=b$. Да изберем редица от точки t_i, $t_i \in (a, b)$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = t$. За всяко t_i съществуват функции $\varphi_{t_i}(x) \in L$, $\psi_{t_i}(x) \in L$ и $\theta_{t_i}(x) \in L$, за които са изпълнени съответно (21), (22) и (23). Използувайки отново компактността на единичната сфера на L относно равномерното разстояние, получаваме функции $\varphi_t(x) \in L$, $\psi_t(x) \in L$ и $\theta_t(x) \in L$, които удовлетворяват (21), (22) и (23) и за $t=a$, респективно $t=b$.

Лема 2 е доказана.

Нека $L \subset C_\Delta$ е крайномерно подпространство на C_Δ. Ще покажем, че ако е изпълнено

$$\delta(C_\Delta; L) \leqq \frac{b-a}{2n},$$

то размерността на L не е по-малка от $3n+2$.

Да означим $x_i = a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, $i=0, 1, \ldots, n$, $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Като използуваме лема 2, да разгледаме функциите $\varphi_{\xi_i}(x) \in L$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\psi_{x_i}(x) \in L$, $\theta_{x_i}(x) \in L$, $i=0, 1, \ldots, n$, които са $3n+2$ на брой. Да предположим, че съществува линейна комбинация

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{\xi_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} (\mu_i \psi_{x_i}(x) + \nu_i \cdot \theta_{x_i}(x)) = 0,$$

и да положим в (27) $x=\xi_t$. От (21), (22) и (23) и непрекъснатостта на $\varphi_{\xi_i}(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$, $i=0, 1, \ldots, n$, следва $\lambda_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Нека сега заместим последователно в (27) $x=\eta_{x_i}$, $x=\zeta_{x_i}^+$ и $x=\zeta_{x_i}^-$, където η_{x_i}, $\zeta_{x_i}^+$ и $\zeta_{x_i}^-$ са съответните числа от (22) и (23). Като използуваме непрекъснатостта на $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$, $i=0, 1, \ldots, n$, получаваме

$$\mu_i+\nu_i \cdot \theta_{x_i}(\eta_{x_i})=0,$$

$$\mu_i \cdot \psi_{x_i}(\zeta_{x_i}^+)+\nu_i=0,$$

$$\mu_i \cdot \psi_{x_i}(\zeta_{x_i}^-)-\nu_i=0.$$

Понеже $0 \leqq \psi_{x_i}(\zeta_{x_i}^+)$, $0 \leqq \psi_{x_i}(\zeta_{x_i}^-)$, тази система има единствено решение $\mu_i=\nu_i=0$, $i=0, 1, \ldots, n$.

Следователно функциите $\varphi_{\xi_i}(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$, $i=0, 1, \ldots, n$, са линейно независими и размерността на L не е по-малка от $3n+2$.

Оттук непосредствено следва, че за всяко линейно подпространство на L с размерност, не по-голяма от $3n+1$, е изпълнено

$$\delta(C_\Delta; L) > \frac{b-a}{2n}, \tag{28}$$

откъдето се получава

Следствие 3. В сила е следното неравенство

$$d_{3n+1}(C_\Delta) \geqq \frac{b-a}{2n}. \tag{29}$$

Нека сега за крайномерното подпространство L, $L \subset C_\Delta$, е изпълнено

$$\delta(C_\Delta; L) \leqq \frac{b-a}{2n+1}.$$

Да означим

$$x_i=a+2i \cdot \frac{b-a}{2n+1}, \; i=0, 1, \ldots, n; \; \xi_i=a+(2i-1) \cdot \frac{b-a}{2n+1}, \; i=1, 2, \ldots, n+1.$$

Използувайки лема 2 при $\alpha=\frac{b-a}{2n+1}$, да разгледаме функциите $\varphi_{\xi_i}(x) \in L$, $i=1, 2, \ldots, n+1$, $\psi_{x_i}(x) \in L$ и $\theta_{x_i}(x) \in L$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, на брой $3n+1$. Да разгледаме освен това редица от числа $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, които удовлетворяват $t_k < x_n$ и $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = x_n$. За всяко $k=1, 2, \ldots$ да разгледаме функциите $\psi_{t_k}(x) \in L$ и $\theta_{t_k}(x) \in L$, удовлетворяващи съответно условията 2) и 3) на лема 2 за $\alpha=\frac{b-a}{2n+1}$. Използувайки компактността на единичната сфера на L относно равномерното разстояние, като

преминем към подредици в $\{\psi_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\theta_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$, получаваме функции $\bar{\psi}_{x_n}(x) \in L$ и $\bar{\theta}_{x_n}(x) \in L$, които удовлетворяват следните условия:

2) $\bar{\psi}_{x_n}(x)=0$, ако $x_n - x \geqq \frac{b-a}{2n+1}$ или $x=b$;

$0 \leqq \bar{\psi}_{x_n}(x) \leqq 1$ за всяко $x \in [a,b]$.

Съществува $\eta_{x_n} \in \left[x_n - \frac{b-a}{2n+1}, x_n + \frac{b-a}{2n+1}\right]$, такова, че

$\bar{\psi}_{x_n}(\eta_{x_n}) = 1$.

3). $\bar{\theta}_{x_n}(x)=0$, ако $x_n - x \geqq \frac{b-a}{2n+1}$ или $x=b$;

$|\bar{\theta}_{x_n}(x)| \leqq 1$ за всяко $x \in [a, b]$.

Съществуват $\zeta^{+}_{x_n} \in \left[x_n - \frac{b-a}{2n+1}, x_n + \frac{b-a}{2n+1}\right]$ и $\zeta^{-}_{x_n} \in \left[x_n - \frac{b-a}{2n+1}, x_n + \frac{b-a}{2n+1}\right]$ такива, че

$$\bar{\theta}_{x_n}(\zeta^{+}_{x_n}) = 1, \ \bar{\theta}_{x_n}(\zeta^{-}_{x_n}) = -1.$$

Като прибавим към функциите

$$\varphi_{\xi_i}(x),\ i=1, 2, \ldots, n+1;\ \psi_{x_i}(x),\ \theta_{x_i}(x),\ i=0, 1, \ldots, n-1,$$

функциите $\bar{\psi}_{x_n}(x)$ и $\bar{\theta}_{x_n}(x)$, получаваме $3n+3$ на брой функции, за които, също както по-горе, се проверява, че са линейно независими, следователно размерността на L не е по-малка от $3n+3$.

Този резултат показва, че ако L е подпространство на C_A с размерност не по-голяма от $3n+2$, то

$$\delta(C_A, L) > \frac{b-a}{2n+1}. \tag{30}$$

Оттук се получава

Следствие 4. В сила е следното неравенство:

$$d_{3n+2}(C_A) \geqq \frac{b-a}{2n+1}. \tag{31}$$

От неравенствата (19), (20), (28), (29), (30), (31) и монотонността на напречниците следват твърденията на теорема 1.

Теорема 1 може да бъде обобщена за случая на функции на повече променливи.

Нека $\Delta_s\{(x^1, x^2, \ldots, x^s) : 0 \leqq x^i \leqq 1, \ i=1, 2, \ldots, s\}$ е единичният куб в s-мерното евклидово пространство, а C_{Δ_s} е пространството от непрекъснатите в Δ_s функции. Метриката в C_{Δ_s} се въвежда, както в едномерния случай, но сега

$$\|f(x), g(y)\| = \max\{|x^1-y^1|, |x^2-y^2|, \ldots, |x^s-y^s|, |f(x)-g(y)|\}.$$

Теорема 2. Напречниците на C_{Δ_s} се изразяват чрез формулите

$$d_k(C_{\Delta_s}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & 3n^s \leqq k \leqq 2(n+1)^s + n(n+1)^{s-1} - 1, \\ \dfrac{1}{2n+1}, & 2(n+1)^s + n(n+1)^{s-1} \leqq k \leqq 3(n+1)^s - 1. \end{cases}$$

Не съществува n-мерно линейно подпространство $L \subset C_{\Delta_s}$, за което $d_n(C_{\Delta_s}) = \delta(C_{\Delta_s}; L)$.

От теорема 2 следва асимптотичната формула

$$d_n(C_{\Delta_s}) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{s}}, \ n \to \infty.$$

За да докажем теорема 2, ще използуваме две леми, които представляват обобщение на леми 1 и 2.

Нека Δ е свързан компакт в метричното пространство R с разстояние $\rho(x, y)$. Може да се постави въпросът за намиране на напречниците на метризираното с хаусдорфово разстояние пространство C_Δ от дефинираните в Δ непрекъснати реални функции. Всички дефиниции, приведени за случая $\Delta = [a, b]$, остават без изменение, ако се приеме, че

$$\|f(x), g(y)\| = \max\{\rho(x, y), |f(x)-g(y)|\}.$$

Да предположим, че $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$, където Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, притежават свойствата:

а) Δ_i е затворено множество с контур $\Gamma(\Delta_i)$.

б) Δ_i и Δ_j при $i \neq j$ нямат обща вътрешна точка.

в) Съществува точка ξ_i, вътрешна за Δ_i, за която е изпълнено $\rho(x, \xi_i) \leqq h_i$, $x \in \Delta_i$.

Да означим

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y), \ A \subset R.$$

Нека $h = \max_i h_i$ и $D_1 = \left\{\Delta_j : h_j > \dfrac{h}{2}\right\}$, $D_2 = \left\{\Delta_j : h_j \leqq \dfrac{h}{2}\right\}$, като D_1 има k елемента, а D_2—l елемента, $l = n-k$.

При тези условия може да се намери следната оценка:

Лема 3. Изпълнено е неравенството

$$d_{3k+2l}(C_{.1}) \leqq h.$$

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$. Да въведем означенията

$$\overline{\Delta}_i^+ = \{x : x \in \Delta,\ \rho(x, \Delta_i) \geqq \varepsilon\},$$

$$\Delta_i^- = \{x : x \in \Delta_i,\ \rho(x, \Gamma(\Delta_i)) > \varepsilon\}.$$

Множеството $\overline{\Delta}_i^+$ е затворено и тъй като Δ_i и $\overline{\Delta}_i^+$ нямат общи точки, по теоремата на Урисон (вж. напр. [8]) съществуват непрекъснати върху Δ функции $X_i(x)$, за които

$$X_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_i, \\ 0, & x \in \overline{\Delta}_i^+, \end{cases}$$

$$0 \leqq X_i(x) \leqq 1,\ x \in \Delta.$$

Непрекъснатите функции

$$\begin{aligned} &\eta_1(x) = X_1(x), \\ &\eta_i(x) = X_i(x) \,.\, (1 - X_1(x)) \,.\, (1 - X_2(x)) \ldots (1 - X_{i-1}(x)), \\ &\qquad i = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned} \tag{32}$$

притежават следните свойства:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_i^- \\ 0, & x \in \overline{\Delta}_i^+, \end{cases}$$

$$0 \leqq \eta_i(x) \leqq 1,\ x \in \Delta,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i(x) \quad 1,\ x \in \Delta.$$

Нека d и ε, $d \leqq \varepsilon$, са избрани така, че за всяко i сферата $\rho(x, \xi_i) \leqq d$ да се съдържа в Δ_i^-. Дефинираме непрекъснатите функции

$$\tau_i^-(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{d}\left(\dfrac{d}{3} - \rho(x, \xi_i)\right), & \rho(x, \xi_i) \leqq \dfrac{d}{3}, \\ 0, & \rho(x, \xi_i) \geqq \dfrac{d}{3}, \end{cases} \tag{33}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(34)\qquad \tau_j^+(x)=\begin{cases} 0, & \rho(x,\xi_j)\leqq \frac{d}{3},\\ \frac{3}{d}\left(\rho(x,\xi_j)-\frac{d}{3}\right), & \frac{d}{3}\leqq\rho(x,\xi_j)\leqq\frac{2d}{3},\\ \frac{3}{d}(d-\rho(x,\xi_j)), & \frac{2d}{3}\leqq\rho(x,\xi_j)\leqq d,\\ 0, & \rho(x,\xi_j)\geqq d,\end{cases}$$

$$\Delta_j\in D_2.$$

Линейната обвивка L_ε на функциите (32), (33) и (34) има размерност, не по-голяма от $3k+2l$.

Нека $f\in C_\Delta$. Да означим $m_i=\min\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i=\max\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, и да съпоставим на f следната функция $f^*\in L_\varepsilon$:

$$f^*(x)=\sum_{\Delta_j\in D_1}\{f(\xi_j)\,.\,\eta_j(x)+[m_j-f(\xi_j)]\,.\,\tau_j^-(x)+[M_j-f(\xi_j)]\,.\,\tau_j^+(x)\}$$

$$+\sum_{\Delta_j\in D_2}\{M_j\,.\,\eta_j(x)+[m_j-M_j]\,.\,\tau_j^-(x)\}.$$

В сила е неравенството

$$r(f,f^*)\leqq h+3\varepsilon,$$

което се доказва напълно аналогично на неравенство (11).

Оттук следва лема 3.

Възможност да оценим отдолу напречника ни дава

Лема 4. Нека $L\subset C_\Delta$ е крайномерно подпространство на C_Δ и $\delta(C_\Delta;L)\leqq\alpha$. Тогава за всяко $t\in\Delta$ има функции $\varphi_t(x)\in L$, $\psi_t(x)\in L$ и $\theta_t(x)\in L$ със свойствата

1. $\varphi_t(x)=0$, $\rho(x,t)>2\alpha$;

$$(35)\qquad \begin{aligned}&\varphi_t(t)=1;\\ &0\leqq\varphi_t(x)\leqq 1,\ x\in\Delta.\end{aligned}$$

2. $\psi_t(x)=0$, $\rho(x,t)>\alpha$.

Съществува $\eta_t\in\Delta$, $\rho(\eta_t,t)\leqq\alpha$, за което

$$(36)\qquad \begin{aligned}&\psi_t(\eta_t)=1;\\ &0\leqq\psi_t(x)\leqq 1,\ x\in\Delta.\end{aligned}$$

3. $\theta_t(x)=0$, $\rho(x,t)>\alpha$.

Съществуват $\zeta_t^+\in\Delta$, $\rho(\zeta_t^+,t)\leqq\alpha$ и $\zeta_t^-\in\Delta$,

$$\rho(\zeta_t^-, t) \leqq \alpha, \quad \text{за които}$$

$$(37) \qquad \theta_t(\zeta_t^+) = 1, \quad \theta_t(\zeta_t^-) = -1;$$

$$|\theta_t(x)| \leqq 1, \; x \in \Delta.$$

Доказателството на лема 4 е аналогично на доказателството на лема 2. Нека $\varepsilon > 0$, $M > 0$. Съществуват непрекъснати в Δ функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ със свойствата

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \quad \rho(x, t) \geqq \alpha + \varepsilon; \\ f_1(x) = M, \; \rho(x, t) \leqq \alpha; \\ 0 \leqq f_1(x) \leqq M, \; x \in \Delta; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} f_2(x) = 0, \quad \rho(x, t) \geqq \varepsilon; \\ f_2(t) = M; \\ 0 \leqq f_2(x) \leqq M, \; x \in \Delta; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} f_3(x) = 0, \; \rho(x, t) \geqq \varepsilon; \\ \text{съществуват } t' \in \Delta, \; \rho(t', t) \leqq \varepsilon \text{ и } t'' \in \Delta, \\ \rho(t'', t) \leqq \varepsilon, \text{ за които} \\ f_3(t') = M, \; f_3(t'') = -M; \\ |f_3(x)| \leqq M, \; x \in \Delta. \end{array}\right.$$

От $\delta(C_\Delta; L) \leqq \alpha$ следва съществуването на функции $\varphi_t(x; M, \varepsilon) \in L$, $\psi_t(x; M, \varepsilon) \in L$ и $\theta_t(x; M, \varepsilon) \in L$, за които

$$r(\varphi_t(x; M, \varepsilon), f_1(x)) \leqq \alpha,$$

$$r(\psi_t(x; M, \varepsilon), f_2(x)) \leqq \alpha,$$

$$r(\theta_t(x; M, \varepsilon), f_3(x)) \leqq \alpha.$$

Като използуваме произтичащите от тези неравенства свойства на $\varphi_t(x; M, \varepsilon)$, $\psi_t(x; M, \varepsilon)$ и $\theta_t(x; M, \varepsilon)$ и това, че единичната сфера на крайномерното подпространство L е компактна относно равномерното разстояние, получаваме чрез граничен преход $M \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ функции $\varphi_t(x)$, $\psi_t(x)$ и $\theta_t(x)$, които удовлетворяват (35), (36) и (37).

Ще приложим леми 3 и 4 за случая на единичния куб Δ_s в s-мерното пространство, в което е въведено разстоянието

$$\rho(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|, \ldots, |x^s - y^s|\}.$$

Да разгледаме покритието на Δ_s със следните множества, на брой n^s:

$$\left\{x: \frac{j_i}{n} \leqq x^i \leqq \frac{j_i+1}{n}\ ;\ j_i=0, 1, \ldots, n-1;\ i=1, 2, \ldots, s\right\}.$$

Лесно се проверява, че за тях условията на лема 3 са изпълнени, като $k=n^s$, $l=0$, $h=\frac{1}{2n}$. Следователно

$$d_{3n^s}(C_{\Delta_s}) \leqq \frac{1}{2n}. \tag{38}$$

По-сложно се доказва аналогът на (20). За целта ще използуваме следната

Лема 5. Съществува покритие на Δ_s с $(n+1)^s$ на брой кубчета, от които $(n+1)^{s-1}$ са със страна $\frac{1}{2n+1}$, а останалите — със страна $\frac{2}{2n+1}$.

Вярно е следното твърдение, което е по-силно от това на лема 5:

Съществуват $n+1$ покрития $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$ на Δ_s с $(n+1)^s$ на брой кубчета, като

1. Всяко покритие Σ_i се състои от $(n+1)^{s-1}$ на брой кубчета със страна $\frac{1}{2n+1}$, а останалите $[(n+1)^s-(n+1)^{s-1}]$ са със страна $\frac{2}{2n+1}$.

2. Ако $\delta_i \in \Sigma_i$ и $\delta_j \in \Sigma_j$, $\delta_i \neq \delta_j$, са със страна $\frac{1}{2n+1}$, то $\rho(x, \delta_j) \geqq \frac{1}{2n+1}$ за всяко $x \in \delta_i$.

3. Всяко $\delta \in \Sigma_i$ се състои от едно или повече кубчета, получени чрез разделянето на Δ_s на $(2n+1)^s$ кубчета със страна $\frac{1}{2n+1}$.

4. Центърът на всяко $\delta \in \Sigma_i$ не е вътрешна точка за никое друго $\delta' \in \Sigma_i$.

Доказателството може да се проведе по индукция.

Твърдението е вярно за $s=1$. Действително нека Σ_i се състои от множествата

$$\delta_{ij}=\begin{cases} \left\{x: \frac{2j-2}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2j}{2n+1}\right\}, & j<i, \\ \left\{x: \frac{2j-2}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2j-1}{2n+1}\right\}, & j=i, \\ \left\{x: \frac{2j-3}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2j-1}{2n+1}\right\}, & j>1, \end{cases}$$

$$j=1, 2, \ldots, n+1.$$

Очевидно Σ_i, $i=1,2,\ldots,n+1$, притежават свойствата, формулирани в твърдението.

Нека твърдението е вярно за $s-1$ и Σ_i, $i=1,2,\ldots,n+1$, са покрития на Δ_{s-1}, притежаващи свойствата 1—4. За всяко i, $i=1,2,\ldots,n+1$, ще конструираме покритие $\Sigma^{(i)}$ на Δ_s по следния начин:

Да означим

$$\Sigma_1'=\Sigma_i,\ \Sigma_2'=\Sigma_{i+1},\ldots,\Sigma'_{n-i+2}=\Sigma_{n+1},\Sigma'_{n-i+1}=\Sigma_1,\ldots,\Sigma'_{n+1}=\Sigma_{i-1}.$$

Нека $\delta'\in\Sigma_j'$. Тогава към $\Sigma^{(i)}$ ще принадлежи кубче със страна, равна на страната на δ', и с център, чиито първи $s-1$ координати са равни на координатите на центъра на δ', а s-тата координата е:

а) $\dfrac{4j-3}{2(2n+1)}$, ако δ' има страна $\dfrac{1}{2n+1}$;

б) $\dfrac{2(j-1)}{2n+1}$, ако δ' е със страна $\dfrac{2}{2n+1}$ и

съществува δ^* със страна $\dfrac{1}{2n+1}$, $\delta^*\in\Sigma_k'$, $k<j$, така че $\delta^*\subset\delta'$;

в) $\dfrac{2j-1}{2n+1}$ в останалите случаи.

$\Sigma^{(i)}$ определят $n+1$ на брой покрития на Δ_s със свойствата 1—4. С това лема 5 е доказана.

Да вземем сега някое от покритията Σ_j на Δ_s и да номерираме кубчетата му: $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k$, $k=(n+1)^s$. Да разгледаме множествата

$$\delta_i^*=\delta_i\setminus\overline{\bigcup_{j=1}^{i-1}\delta_j}.$$

Покритието $\Sigma=\{\delta_i^*\}_{i=1}^{(n+)^s}$ удовлетворява изискванията на лема 3, като $k=(n+1)^s-(n+1)^{s-1}$, $l=(n+1)^{s-1}$, $h=\dfrac{1}{2n+1}+\varepsilon$ за всяко фиксирано $\varepsilon>0$. Следователно

$$d_p(C_{\Delta_s})\leqq\frac{1}{2n+1},\ p=2(n+1)^s+n(n+1)^{s-1}. \tag{39}$$

Сега ще получим оценки отдолу за напречниците на C_{Δ_s}. Да означим с x_i, $i=1,2,\ldots,(n+1)^s$, различните точки от вида $\left(\dfrac{i_1}{n},\dfrac{i_2}{n},\ldots,\dfrac{i_s}{n}\right)$, $i_k=0,1,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,s$, и с ξ_i, $i=1,2,\ldots,n(n+1)^{s-1}$ — точките от вида $\left(\dfrac{2j_1+1}{2n},\dfrac{j_2}{n},\ldots,\dfrac{j_s}{n}\right)$, където $j_1=0,1,\ldots,n-1$, $j_k=0,1,\ldots,n$, $k=2,3,\ldots,s$.

Нека за крайномерното подпространство $L \subset C_{\Delta_s}$ е изпълнено $\delta(C_{\Delta_s}; L) \leqq \frac{1}{2n}$. Като използуваме лема 4, можем да твърдим, че в L съществуват линейно независими функции $\varphi_{\xi_i}(x)$, $i=1, 2, \ldots, n(n+1)^{s-1}$, $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$, $i=1, 2, \ldots, (n+1)^s$, и следователно размерността на L не е по-малка от $2(n+1)^s+n(n+1)^{s-1}$.

Оттук получаваме, че ако L има размерност, не по-голяма от $2(n+1)^s+n(n+1)^{s-1}-1$, то

$$\delta(C_{\Delta_s}; L) > \frac{1}{2n} \tag{40}$$

и тогава

$$d_p(C_{\Delta_s}) \geqq \frac{1}{2n}, \quad p \leqq 2(n+1)^s+n(n+1)^{s-1}-1. \tag{41}$$

Да разгледаме накрая точките x_i и ξ_i, $i=1, 2, \ldots, (n+1)^s$, съответно от вида $\left(\frac{2i_1}{2n+1}, \ldots, \frac{2i_s}{2n+1}\right)$ и $\left(\frac{2i_1+1}{2n+1}, \ldots, \frac{2i_s+1}{2n+1}\right)$, $i_k = 0, 1, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, s$. Ако предположим, че за крайномерното подпространство $L \subset C_{\Delta_s}$ е изпълнено $\delta(C_{\Delta_s}; L) \leqq \frac{1}{2n+1}$, то от лема 4 получаваме $3(n+1)^s$ на брой линейно независими функции от L — $\varphi_{\xi_i}(x)$, $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$. (За да получим, че функциите $\psi_{x_i}(x)$ и $\theta_{x_i}(x)$ при $x_i = \left(\frac{2n}{2n+1}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}\right)$ са равни на нула в точката $(1, 1, \ldots, 1)$, отново, както в едномерния случай, правим граничен преход.)

Следователно за линейно подпространство $L \subset C_{\Delta_s}$ с размерност, не по-голяма от $3(n+1)^s-1$, е изпълнено

$$\delta(C_{\Delta_s}; L) > \frac{1}{2n+1}. \tag{42}$$

Оттук се получава оценката

$$d_{3(n+1)^s-1}(C_{\Delta_s}) \geqq \frac{1}{2n+1}. \tag{43}$$

Неравенствата (38), (39), (40), (41), (42), (43) доказват теорема 2.

Приятен дълг ни е да благодарим на проф. д-р Бл. Сендов, който насочи вниманието ни върху въпросите, свързани с напречниците на пространството C_Δ, любезно ни предостави в ръкопис [6] и направи редица полезни забележки по настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff, A. N.: Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionsklasse. Ann. of Math., **37** (1936), № 1, 107—111.
2. Тихомиров, В. М.: Об n-мерных поперечниках некоторых функциональных классов. ДАН СССР, **130** (1960), № 4, 734—738.
3. Тихомиров, В. М.: Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. Усп. мат. наук, **15** (1960), № 3, 81—120.
4. Сендов, Бл., Пенков, Б.: ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Изв. МИ БАН, **6** (1962), 27—50.
5. Sendov, Bl., Penkov, B: On widths of the space of continuous functions. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **17** (1964), № 8, 689—691.
6. Сендов, Бл., Пенков, Б.: Върху напречниците на пространството на непрекъснатите функции. Изв. МИ БАН, **10** (1969), 5—15.
7. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в Хасдорфовой метрике. Усп. мат. наук, **24** (1969), № 5, 141—178.
8. Йосида, К.: Функциональный анализ. „Мир", Москва, 1967.

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

ON THE WIDTHS OF THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS IN THE METRIC OF HAUSDORFF

T. P. Boyanov and V. A. Popov

(SUMMARY)

Let C_Δ be the space of continuous functions in the interval $\Delta=[a,b]$, metrized with the metric of Hausdorff:

$$r(f,g)=\max\{\max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|f(x),g(y)\|,\ \max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|g(x),f(y)\|\}$$

where

$$\|f(x),g(y)\|=\max\{|x-y|,\ |f(x)-g(y)|\},\ f\in C_\Delta,\ g\in C_\Delta.$$

For the widths [1] $d_n(C_\Delta)$ of the space C_Δ with respect to the distance $r(f,g)$ Bl. Sendov and B. Penkov in [5], [6] give estimates above and below and asymptotics.

In this paper are found the exact values of $d_n(C_\Delta)$ and the following theorems are proved:

Theorem 1. The widths of the space C_Δ are given by

$$d_n(C_\Delta)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n}, & n=3k,\\[2ex] \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n-1}, & n=3k+1,\\[2ex] \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n-\frac{1}{2}}, & n=3k+2.\end{cases}$$

There does not exist n-dimensional subspace $L \subset C_\Delta$ for which $d_n(C_\Delta) = \delta(C_\Delta; L)$.

Theorem 1 is generalized for the unit cube Δ_s in the s-dimensional euclidean space:

Theorem 2. The widths of the space C_{Δ_s} of all continuous functions on Δ_s are given by

$$d_k(C_{\Delta_s}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & 3n^s \leqq k \leqq 2(n+1)^s + n(n+1)^{s-1} - 1, \\ \dfrac{1}{2n+1}, & 2(n+1)^s + n(n+1)^{s-1} \leqq k \leqq 3(n+1)^s - 1. \end{cases}$$

There does not exist n-dimensional subspace $L \subset C_{\Delta_s}$ for which $d_n(C_{\Delta_s}) = \delta(C_{\Delta_s}; L)$.