ИЗВЕЖДАНЕ УРАВНЕНИЯТА НА КЕЛДИШ ПРИ „ШИМИ" НА САМОЛЕТНОТО И АВТОМОБИЛНОТО ШАСИ ЧРЕЗ РЕДУЦИРАНАТА ФОРМА НА НИЛСЕН ЗА НЕХОЛОНОМНИ СИСТЕМИ

Благовест Долапчиев

1. В гл. VI на монографията [1] под надслов „Динамика на нехолономни системи и технически задачи за пътевата устойчивост на системи с търкаляне", в § 1, отнасящ се до теорията на търкалянето на еластичния пневматик и до уравненията на движение на возила с балонни колела, авторите на [1] се спират на задачата за пътевата устойчивост на велосипеда, мотоциклета, автомобила и на самолетното шаси, излагайки теориите на Рокар [2], Грейданус [3] и Келдиш [4] за намиране на нехолономните неинтегрируеми диференциални връзки при движението на споменатите возила, отбелязвайки, че тези теории са независими, несвързани помежду си, и отразяват наличието на различни подходи при изследване влиянието на деформируемостта на пневматика през време на неговото търкаляне без хлъзгане; те са на мнение, че теорията, разработена от Келдиш, е най-пълна, тъй като един прост анализ на уравненията, получени, като се изхожда от нея, позволява не само да се установи връзка между тези теории, но и да се достигне по един-естествен начин към обобщение на хипотезата за „увода" на Рокар, както и да се покажат условията за нейната приложимост.

Наистина, въпреки че при изграждането на тези теории се прибягва към известни опростяващи приемания, които позволяват явлението деформация да се опише с краен брой параметри, Келдиш е получил с пренебрегване на масата на деформируемата част от пневматика и на диссипацията на енергията, свързана с тази деформация, не само геометричните и кинематичните връзки, но и силите на реакцията, възникваща при търкалянето на пневматика в равнината. От друга страна, той е посочил два различни начина за извеждане на общите уравнения на возилата с балонни колела, при един от които системата кинематични уравнения се третира не като уравнения на връзките при търкалянето на еластичния пневматик, а като уравнения, определящи параметрите на деформацията му, а чрез тях действуващите върху него сили и моменти. При втория начин се прилага апара-

тът на аналитичната механика на нехолономните материални системи с идеални връзки.

Отсъствието на хлъзгане на пневматика Келдиш изразява със следните две условия: първо, допирателната към линията на търкаляне на пневматика съвпада с оста на площта на контакта; второ, кривината на линията на търкаляне на пневматика се определя еднозначно с параметрите ξ, φ, χ на деформация, гдето ξ е отсечката KO, мерена в диаметралната равнина на периферията на колелото до средния център на площта на контакта му в опорната равнина; φ е ъгълът между средната линия на площта на контакта и диаметралната равнина през K, а χ е ъгълът на наклона на последната и периферията на колелото. Като означим с x_1 и θ съответно абсцисата на центъра O' на площта на контакта на пневматика и ъгъла между направлението на несмутеното движение и средната траса на колелото върху повърхността на пътя, вземайки под внимание, че $x_1 = x + \xi$, написваме следните условия на Грейданус — Келдиш за връзките

$$\dot{x} + \dot{\xi} + V\varphi + V\theta = 0, \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\theta} - \alpha V\xi + \beta V\varphi + \gamma V\chi = 0. \tag{2}$$

Тук V означава постоянната скорост на движение на колелото, а α, β и γ представят положителни константи.

Лесно се показва, че линейните диференциални връзки (1) и (2) са неинтегрируеми, тъй като съответните билинейни коварианти на пфафовите форми не са равни на нула.

2. В § 3 на цитираната монография [1], озаглавена „Шими на предното колело на триколесното шаси на самолета", са изведени уравненията на движение на предната стойка на шасито на самолета по първия от споменатите в т. 1 начини. Тук ще покажем, че като вземем под внимание условията за приложимост на уравненията, които нарекохме „редуцирана форма на Нилсен" [5], използувана от нас в ред други задачи [6], [7], [8], лесно ще достигнем до същите уравнения, намерени в [1].

Преди това поради важното практическо значение на тази задача, станала известна с приложението, което Келдиш прави на своята теория [4], нека споменем с няколко думи в какво се състои това движение, носещо любопитното наименование „шими"*. Касае се до автоколебанията на предното (носово) колело на триколесното шаси на самолета (или на предните колела на автомобила) при кормуването, при возенето за отлитане и возенето при кацането му. Тези колебания се състоят в едновременните завъртания на носовото колело около една вертикална ос, придружени и с напречни смущения. Това явление е свързано с еластичността на пневматика и предната стойка на

*) „Шими" (англ. shymmi) — танц, разновидност на фокстрота, разпространен около двадесетте години на настоящия век.

шасито, а така също и с възможността за завъртане на колелото около вертикалната му ос. В самолета с триколесно шаси предното колело е самоориентиращо се и затова винаги съществува възможност за такова завъртане около вертикалната му ос. То се проявява в едно „рыскание“ на колелото и може да доведе до счупване на стойката на шасито, а оттам и до авария на самолета.

При липса на хлъзгане задачата за шими на твърдо колело се свежда до задача от аналитичната механика на нехолономни материални системи и се решава докрай без допълнителни предположения. Обаче задачата за шими на колела с еластични пневматици изисква допълнителни изучавания на характера на функционирането им при търкаляне, за което бегло споменахме по-горе.

Тук ние най-напред ще изведем уравненията на движение на предната стойка на шасито на самолета, а след това ще се спрем на същата задача на шими на предното окачване при автомобила.

I. При малки отклонения от стационарното състояние кинетичната енергия на системата е

$$T=\frac{1}{2}\left(A\dot{\psi}^2+B\dot{\theta}^2+2D\dot{\psi}\dot{\theta}+2\omega C\dot{\theta}\dot{\psi}\right), \tag{3}$$

където A и B са съответно инерчните моменти на стойката с колелото относно осите Oy и Oz, C е инерчният момент относно оста на собственото въртене с постоянна скорост ω, а D е инерчното произведение относно тези оси Oy и Oz.

За функцията на сили се намира

$$U=\frac{1}{2}\left[(k+\rho N)\psi^2+a\xi^2+b\varphi^2-2\sigma N\xi\psi\right], \tag{4}$$

където k е коефициентът на твърдостта на еластичното скачване на стойката, а ρ, b, N, σ са познати константи. Освен това тук участвуват и обобщените сили

$$Q_\psi=N(l\psi+c\theta), \tag{5}$$

$$Q_\theta=cN\psi-h\dot{\theta} \tag{6}$$

$$(h=\text{const}).$$

Като вземем под внимание, че при малки ъгли $\chi=-\psi$, за нехолономните линейни връзки (1) и (2) в случая имаме

$$\dot{\xi}=-(l\dot{\psi}+c\dot{\theta}+V\theta+V\varphi), \tag{7}$$

$$\dot{\varphi}=-(\dot{\theta}+\beta V\varphi-\alpha V\xi-\gamma V\psi), \tag{8}$$

където l е разстоянието от точката на окачване на стойката на колелото до проекцията върху оста на стойката на центъра на контакта, а c е разстоянието от центъра на контакта до оста на стойката.

За да приложим редуцираните уравнения на Нилсен

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{q}_\lambda}=0 \qquad (q_\lambda=\psi,\ \theta) \tag{9}$$

при

$$K_1=R_1-\sum_{\varkappa=1}^{4} Q_\varkappa \dot{q}_\varkappa,\ R_1=\dot{T}-2\,\dot{T}_0 \tag{10}$$

е необходимо, първо, връзките да са линейни, какъвто е нашият случай, което се вижда от (1), (2) или (7), (8), и е достатъчно, второ, силите да не зависят от обобщените скорости, т. е. да е изпълнено условието

$$\frac{\partial Q_\varkappa}{\partial \dot{q}_\mu}=0 \qquad (\varkappa,\ \mu=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{11}$$

От (4) намираме

$$\frac{\partial U}{\partial \psi}=-(k+\rho N)\,\psi+\sigma N\xi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-b\,\varphi, \tag{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=-a\xi+6\,N\psi, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=0. \tag{15}$$

Въз основа на (5) имаме

$$Q'_\psi=\frac{\partial U}{\partial \psi}+Q_\psi=[-k+N(l-\rho)]\,\psi+\sigma N\xi+c\,N\theta, \tag{16}$$

така че действително условието (11) за координатата ψ, а именно

$$\frac{\partial Q'_\psi}{\partial \dot{\psi}}=0, \tag{17}$$

е изпълнено. Следователно за този параметър редуцираните уравнения на Нилсен са приложими. Те, изглежда, обаче не са приложими за координатата θ, тъй като от (6) поради

$$Q'_\theta=Q_\theta+\frac{\partial U}{\partial \theta}=Q_\theta \tag{18}$$

имаме за (11) при $\dot{q}_\mu=\dot{\theta}$,

$$\frac{\partial Q'_\theta}{\partial \dot\theta} = -h \neq 0. \tag{19}$$

Съгласно нашата теория (критерии) [9] следва да приложим за този параметър уравненията на Ценов [10].

Нека най-напред потърсим уравненията за параметъра ψ, като приложим редуцираните уравнения на Нилсен:

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot\psi} = 0. \tag{20}$$

За целта пресмятаме

$$\dot T = A\dot\psi\ddot\psi + B\dot\theta\ddot\theta + D(\ddot\psi\dot\theta + \dot\psi\ddot\theta) + C(\dot\theta\dot\psi + \theta\ddot\psi)\,\omega. \tag{21}$$

Поради

$$T_0 = \text{const} + C\omega\theta\dot\psi \quad (\dot\psi \text{ — временно фиксирано}) \tag{22}$$

намираме

$$\dot T_0 = C\omega\dot\theta\dot\psi. \tag{23}$$

За (10) получаваме

$$R_1 = \dot T - 2C\omega\dot\theta\dot\psi, \tag{24}$$

откъдето намираме

$$K_1 = R_1 - Q'_\psi\dot\psi - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\dot\varphi - \frac{\partial U}{\partial \xi}\dot\xi = A\ddot\psi\dot\psi + D\ddot\theta\dot\psi + C\dot\theta\dot\psi\,\omega \tag{25}$$

$$-\{[-k + N(l-\rho)]\psi + \sigma N\xi + cN\theta\}\dot\psi - (-a\xi + \sigma N\psi)\dot\xi + b\varphi\dot\varphi - \ldots$$

И тъй уравнението (20) гласи

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot\psi} = A\ddot\psi + D\ddot\theta + C\omega\dot\theta - [-k + N(l-\rho)]\psi - \sigma N\xi - cN\theta \tag{26}$$

$$-(-a\xi + \sigma N\psi)\frac{\partial \dot\xi}{\partial \dot\psi} + b\varphi\frac{\partial \dot\varphi}{\partial \dot\psi} = 0.$$

От друга страна, имаме

$$\frac{\partial \dot\xi}{\partial \dot\psi} = -l, \quad \frac{\partial \dot\varphi}{\partial \dot\psi} = 0. \tag{27}$$

Въз основа на (27) за първото уравнение на движение окончателно намираме

$$A\ddot\psi + D\ddot\theta + C\omega\dot\theta + [k + \rho N + lN(\sigma - 1)]\psi - cN\theta - (al + \sigma N)\xi = 0, \tag{28}$$

съвпадащо с второто уравнение на (3,9), стр. 381 от [1].

Да приложим сега за параметъра θ уравненията на Ценов

$$\frac{\partial K_2^*}{\partial \ddot{\theta}} = 0. \tag{29}$$

Имаме от (21) и (23)

$$\ddot{T} = A\ddot{\psi}^2 + B\ddot{\theta}^2 + 2D\ddot{\theta}\ddot{\psi} + C\omega(\ddot{\theta}\dot{\psi} + 2\dot{\theta}\ddot{\psi}) + \ldots \tag{30}$$

и

$$\ddot{T}_0 = C\omega\ddot{\theta}\dot{\psi}. \tag{31}$$

Следователно

$$R_2 = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) = \frac{1}{2}(A\ddot{\psi}^2 + B\ddot{\theta}^2 + 2D\ddot{\psi}\ddot{\theta} + 2\omega C\ddot{\psi} - 2\omega C\ddot{\theta}\dot{\psi}) + \ldots, \tag{32}$$

и така също

$$K_2 = R_2 - \sum_{\varkappa=1}^{4} Q_\varkappa \ddot{q}_\varkappa = R_2 - Q'_\theta\ddot{\theta} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\ddot{\xi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\ddot{\varphi}. \tag{33}$$

Пресмятаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_2^*}{\partial \ddot{\theta}} &= B\ddot{\theta} + D\ddot{\psi} - \omega C\dot{\psi} - (CN\psi - h\dot{\theta}) + b\varphi\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \ddot{\theta}} \\ &- (-a\xi + \sigma N\psi)\frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{\theta}} = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

От (7) и (8) намираме чрез еднократно диференциране

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -(l\ddot{\psi} + c\ddot{\theta} + V\dot{\theta} + V\dot{\varphi}), \\ \ddot{\varphi} &= -(\ddot{\theta} + \beta N\dot{\varphi} - \alpha V\dot{\xi} - \gamma V\dot{\psi}), \end{aligned} \tag{35}$$

така че

$$\frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{\theta}} = -c, \quad \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \ddot{\theta}} = -1. \tag{36}$$

Прочее (34) става

$$B\ddot{\theta} + D\ddot{\psi} - \omega C\dot{\psi} - b\varphi - ac\xi + h\dot{\theta} - cN(\sigma - 1)\psi = 0, \tag{37}$$

съвпадащо с първото уравнение на (3,9), стр. 381 от [1].

Сега ще покажем обаче, че и тук, и за параметъра θ можехме да си послужим с редуцираната форма на Нилсен поради това, че R_1 не зависи от обобщените скорости, а освен това понеже приносът на

обобщената сила Q_θ, зависеща от обобщената скорост $\dot\theta$, не е нищо друго освен самият коефициент Q_θ пред $\dot\theta$, докато членовете в (33), съдържащи $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, си остават същите. Тогава, като фиксираме временно $\dot\theta$ в израза (6) за Q_θ, което ще извършим пак с подчертаване на обобщената скорост $\dot\theta$, то за K_1 при току-що казаното ще имаме

$$K_1 = \ldots + B\dot\theta\ddot\theta + D\ddot\psi\dot\theta + C\omega\dot\theta\dot\psi - 2C\omega\dot\theta\dot\psi - cN\psi\dot\theta + h\dot\theta\dot\theta + b\varphi\dot\varphi(\dot\theta) - (-a\xi + \sigma N\psi)\dot\xi(\dot\theta). \tag{38}$$

Уравнението за параметъра 0 ще бъде

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot\theta} = B\ddot\theta + D\ddot\psi - C\omega\dot\psi - CN\psi + h\dot\theta + b\varphi\frac{\partial\dot\varphi}{\partial\dot\theta} - (-a\xi + \sigma N\psi)\frac{\partial\dot\xi}{\partial\dot\theta} = 0. \tag{39}$$

Но и сега имаме

$$\frac{\partial\dot\varphi}{\partial\dot\theta} = -1, \quad \frac{\partial\dot\xi}{\partial\dot\theta} = -c, \tag{40}$$

откъдето от (39) и (40) отново получаваме търсеното уравнение (37).

II. И при автомобила пневматическите шини са способствували за значително увеличение на скоростта му. На пневматика се дължи и мекото окачване на стойките. Но при преминаване към балонни колела при определена скорост отново се натъкваме на явлението „шими", което предизвиква голямо динамическо натоварване върху детайлите на окачването и кормилното управление. Задачата за шими на автомобила е една сложна нелинейна задача, но Келдиш я е линеаризирал така, че е успял да изследва същественото от практическо гледище условие за създаване на автоколебания, причиняващи явлението „шими". За тази цел се изучават малките движения около изходните, с което така опростената задача позволява изследване докрай.

Тук се приема, че корпусът на автомобила е тъй масивен, че той не участвува в никакви колебания, а се движи по една хоризонтална равнина с постоянна скорост V. Търси се оная скорост V на движението на автомобила, при която предното окачване става вече неустойчиво. Тук се предполага още, че натоварването N на предното окачване е постоянно през целия режим на движение и се търсят колебанията на стойката при нейното движение около центъра на тежестта ѝ.

Нехолономните връзки, представящи условията за търкаляне на балонните колела без хлъзгане, гласят

(41) $$\dot{\xi}_1 r - \dot{\psi} + V\theta + V\varphi_1 = 0.$$

(42) $$\dot{\xi}_2 - r\dot{\psi} + V\theta + V\varphi_2 = 0,$$

(43) $$\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1 - \alpha V\xi_1 + \beta V\varphi_1 + \gamma V\dot{\psi} = 0,$$

(44) $$\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2 - \alpha V\xi_2 + \beta V\varphi_2 + \gamma V\dot{\psi} = 0,$$

където r, V, α, β, γ представят положителни кинематични константи. Като изберем за зависими обобщените скорости $\dot{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2$, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, а за независими — обобщените скорости $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, поради линейността на нехолономните връзки (41) — (44) получаваме

(41а) $$\dot{\xi}_1 = r\dot{\psi} - V(\theta + \varphi_1),$$

(42б) $$\dot{\xi}_2 = r\dot{\psi} - V(\theta + \varphi_2),$$

(43в) $$\dot{\varphi}_1 = -\dot{\theta} + V(\alpha\xi_1 - \beta\varphi_1 - \gamma\dot{\psi}),$$

(44г) $$\dot{\varphi}_2 = -\dot{\theta} + V(\alpha\xi_2 - \beta\varphi_2 - \gamma\dot{\psi}).$$

За кинетичната енергия очевидно имаме

(45) $$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\psi}^2 + J_2\dot{\theta}^2) - \frac{JV}{r}\theta\dot{\psi},$$

където J_1, J_2 и J са инерчни моменти. За функцията на сили се дава изразът

(46) $$U = \frac{1}{2}[a(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\sigma N\psi(\xi_1 + \xi_2) + 2\rho N\psi^2 + b(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)]$$

при a, b, σ, ρ, N. Най-после на системата са приложени още обобщените сили

(47) $$Q_\theta = -k_1\theta - h_1\dot{\theta},$$

(48) $$Q_\psi = -k_2\psi - h_2\dot{\psi}.$$

Както преди, пресмятаме

(49) $$Q'_\psi = \frac{\partial U}{\partial\psi} + Q_\psi = -\sigma N(\xi_1 + \xi_2) - 2\rho N\psi - (k_2\psi + h_2\dot{\psi}),$$

(50) $$Q'_\theta = \frac{\partial U}{\partial\theta} + Q_\theta = 0 - (k_1\theta + h_1\dot{\theta}),$$

(51) $$Q_{\xi_1} = \frac{\partial U}{\partial\xi_1} = -(a\xi_1 + \sigma N\psi),$$

(52) $$Q_{\xi_2}=\frac{\partial U}{\partial \xi_2}=-(a\,\xi_2+\sigma N\psi),$$

(53) $$Q_{\varphi_1}=\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}=-b\,\varphi_1,$$

(54) $$Q_{\varphi_2}=\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}=-b\,\varphi_2.$$

И тъй виждаме, че и сега обобщените сили, съответствуващи на параметрите θ и ψ, зависят съответно от обобщените скорости $\dot\theta$ и $\dot\psi$. Ще постъпим, както в края на пример I, като и сега приложим направо редуцираните уравнения на Нилсен, а не тия на Ценов, фиксирайки обобщените скорости $\dot\theta$ и $\dot\psi$ в K_1, като временно ги подчертаем. Имаме най-напред

(55) $$\dot T=J_1\dot\psi\ddot\psi+J_2\dot\theta\ddot\theta-W(\dot\theta\dot\psi+\theta\ddot\psi),\ \left(W=\frac{J\,V}{r}\right)$$

(56) $$T_0=\mathrm{const}-W\theta\dot\psi,\ \dot T_0=-W\dot\theta\dot\psi.$$

Така намираме

(57) $$R_1=\dot T-2\,\dot T_0=\dot T+2\,W\dot\theta\dot\psi$$

и

(58) $$K_1=R_1-\sum_{\varkappa=1}^{6}Q_\varkappa\dot q_\varkappa=R_1-\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\dot\xi_1-\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}\dot\varphi_1-\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}\dot\varphi_2-Q'_\psi\dot\psi-Q'_\theta\dot\theta,$$

или

(59) $$\begin{aligned}K_1=&J_1\dot\psi\ddot\psi+J_2\dot\theta\ddot\theta-W(\dot\theta\dot\psi+\theta\ddot\psi)+2\,W\dot\theta\dot\psi-(a\,\xi_1+\sigma N\psi)\dot\xi_1\\&+(a\,\xi_2+\sigma N\psi)\dot\xi_2+b\,\varphi_1\dot\varphi_1+b\,\varphi_2\dot\varphi_2+(k\theta+h_1\dot\theta)\,\dot\theta\\&+[\sigma N(\xi_1+\xi_2)+2\,\rho N\psi+(k_2\psi+h_2\dot\psi)]\dot\psi.\end{aligned}$$

И тъй за търсените уравнения намираме

(60) $$\begin{aligned}\frac{\partial K_1^*}{\partial\dot\psi}\equiv&J_1\ddot\psi-W\dot\theta+(a\,\xi_1+\sigma N\psi)\frac{\partial\dot\xi_1}{\partial\dot\psi}+(a\,\xi_2+\sigma N\psi)\frac{\partial\dot\xi_2}{\partial\dot\psi}\\&+b\,\varphi_1\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial\dot\psi}+b\,\varphi_2\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial\dot\psi}+\sigma N(\xi_1+\xi_2)+2\,\rho N\psi+(k_2+h_2\dot\psi)=0,\end{aligned}$$

(61) $$\begin{aligned}\frac{\partial K_1^*}{\partial\dot\theta}\equiv&J_2\ddot\theta-W\dot\psi+2\,W\dot\psi+b\,\varphi_1\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial\dot\theta}+b\,\varphi_2\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial\dot\theta}\\&+(k_1\theta+h_1\dot\theta)=0.\end{aligned}$$

Вземаме под внимание зависимостите

$$\frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{\theta}}=0, \qquad \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{\theta}}=0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{\psi}}=r, \qquad \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{\theta}}=r, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\theta}}=-1, \qquad \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\theta}}=-1, \tag{64}$$

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\psi}}=-\gamma V, \qquad \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\psi}}=-\gamma V. \tag{65}$$

Въз основа на (62) — (65) за уравненията (60) и (61) получаваме

$$\begin{gathered} J_1\ddot{\psi}-W\dot{\theta}+r(a\xi_1+\sigma N\psi)+r(a\xi_2+\sigma N\psi) \\ -\gamma V b\varphi_1-\gamma V b\varphi_2+\sigma N(\xi_1+\xi_2)+2\rho N\psi+(k_2\psi+h_2\dot{\psi})=0, \end{gathered} \tag{66}$$

$$J_2\ddot{\theta}+W\dot{\psi}-b\varphi_1-b\varphi_2+(k_1\theta+h_1\dot{\theta})=0, \tag{67}$$

т. е.

$$J_1\ddot{\psi}+h_2\dot{\psi}+[k_2+2N(\sigma r+\rho)]\psi-\frac{JV}{r}\dot{\theta}+(ar+\sigma N)(\xi_1+\xi_2)=0 \tag{68}$$

и

$$J\ddot{\theta}+h_1\dot{\theta}+k_1\theta+\frac{JV}{r}\dot{\psi}-b(\varphi_1+\varphi_2)=0, \tag{69}$$

съвпадащи с уравненията (4, 7), стр. 399 от [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А.: Динамика неголономных систем. Москва, 1967.
2. Рокар, И.: Неустойчивость в механике, автомобили, самолеты, висячие мосты, М., Издат. иностр. лит., 1959.
3. Greidanus, J. H.: Besturing en stabiliteit van het neuswielonderstel, Rapport V 1038, Nationaal Luchtvaarlaboratorium Amsterdam.
4. Келдыш, М. В.: Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Труды ЦАГИ, № 564, 1945.
5. Долапчиев, Бл.: Принципът на Журден и уравненията на Нилсен. Год. на Соф. унив., Мат. фак. 59 (1964/1965), 71—84.
6. Dolaptchiev, Bl.: Exemple d'application des équations de Nielsen à des systèmes mécaniques non holonomes. C. R. Acad. Sc. Paric, 267 (1968), 394—396.
7. Dolaptchiev, Bl.: Nouvel exemple d'application des équations de Nielsen à des systèmes mécaniques non holonomes. C. R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), 423—424.

8. Dolaptschiew, Bl.: Verwendung der einfachsten Gleichungen Tzenow'schen Typs (Nielsen'schen Gleichungen) in der nicht-holonomen Dynamik. ZAMM 49 (1969), 3, 179—184.
9. Dolaptchiev, Bl.: Critères pour l'application des équations généralisées de Lagrange aux systèmes mécaniques non holonomes. C. R. Acad. Sc. Paris, 263 (1966), 288—291.
10. Ценов, Ив.: Върху една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тези уравнения. Изв. Мат. инст. БАН, т. I (1954), 91—134.

Постъпила на 14. XI. 1969 г.

ABLEITUNG DER GLEICHUNGEN VON KELDISCH BEI „SHYMMI" DES FLUGZEUG- UND AUTO-CHASSIS DURCH DIE REDUZIERTE FORM VON NIELSEN FÜR NICHT-HOLONOME MECHANISCHE SYSTEME

Bl. Dolaptschiew

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es werden nach der Theorie von Keldisch [4] die nicht-holonomen Bindungen (7) und (8) bei der sogenannten „Shymmi"-Bewegungen des Flugzeug- und Autochassises benutzt, um die Differentialgleichungen (28) und (37), bzw. (68) und (69) ([1], (3, 9), bzw. (4, 7)) abzuleiten. Zu diesem Zweck sind die einfachsten Gleichungen Tzenoff'schen Typs (die „reduzierte" Form von Nielsen) verwendet, da die nichtintegrierbaren differentiellen Bindungen (7), (8) linear sind, trotz der Tatsache, daß die verallgemeinerten Kräfte auch von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängen.