КЛАСОВЕ ДВИЖЕНИЯ С ХЕЛИКОИДАЛНИ ОСИ, ОБРАЗУВАЩИ РАЗСЛОЯЕМА ДВОЙКА КОНГРУЕНЦИИ

Васил Диамандиев

В настоящата работа се дават зависимости между кинематичните характеристики на две движения, чиито витлови оси образуват разслояема двойка конгруенции. Въз основа на тези зависимости е намерен случай на разслояема двойка от хеликоидалните оси на две движения.

Нека X_1, X_2 са конгруенциите от витловите оси на два произволни класа движения. Тези конгруенции са определени от точките

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\bar{A}_1(t,v) &= \bar{r}_1(t,v) + \frac{1}{\omega_1}\left[\bar{\omega}_1(t,v)\times\frac{\partial}{\partial t}r_1(t,v)\right],\\
\bar{A}_2(t,v) &= \bar{r}_2(t,v) + \frac{1}{\omega_2}\left[\bar{\omega}_2(t,v)\times\frac{\partial}{\partial t}\bar{r}_2(t,v)\right]
\end{aligned}
$$

и векторите

$$
(2)\qquad \bar{e}_1(t,v) = \frac{\bar{\omega}_1(t,v)}{\omega_1},\quad e_2(t,v) = \frac{\bar{\omega}_2(t,v)}{\omega_2},
$$

където t означава времето, v — произволен параметър, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ — полюсите на двете движения, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ — ротационните скорости, ω_1, ω_2 — големините на ротационните скорости. Поставяме си общата задача: какви зависимости трябва да съществуват между тези кинематични елементи на двете движения, за да образуват витловите оси X_1, X_2 разслояема двойка конгруенции.

Ще изразим условията за разслояемост от X_1 към X_2. Разслояващите повърхнини S_p на X_1 се дават от уравнението

$$
(3)\qquad \bar{x} = \bar{A}_1(t,v) + p(t,v)e_1(t,v),
$$

където p е най-малко два пъти диференцируема функция на t, v. За да бъде двойката X_1, X_2 разслояема от X_1 към X_2, трябва тангенциалните равнини на S_p да съдържат съответната витлова ос X_2. Това условие ще бъде изпълнено, ако векторите $\bar{e}_2$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}$ и $x - A_2$ са компланарни, където u_i означава t или v. Следователно имаме

$$
\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t},\ \bar{x} - \bar{A}_2\right) = 0
$$

или съгласно (3) получаваме

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}+p_t\bar{e}_1+p\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2+p\bar{e}_1\right)=0,$$

откъдето намираме

$$(4)\qquad \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$=\frac{\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)+p\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p^2\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)}{(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)}.$$

Аналогично от условието за компланарност на $\bar{e}_2$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$ и $\bar{x}-\bar{A}_2$ получаваме

$$(4')\qquad \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$=\frac{\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v},\ \bar{e}_1\right)+p\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p^2\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v},\ \bar{e}_1\right)}{(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)}.$$

Тук трябва да допуснем, че

$$(5)\qquad (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)\neq 0.$$

Кинематичният смисъл на условието (5) е: витловите оси на двете движения не трябва да се пресичат за тази област на изменение на параметрите, за които са изпълнени условията за разслояемост.

От условието за интегрируемост на (4) и (4′)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial v}=\frac{\partial^2 p}{\partial v\partial t}$$

получаваме зависимостта

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+\frac{\partial p}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)+p\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)\right.$$

$$+\frac{\partial p}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+2p\frac{\partial p}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)$$

$$\left.+p^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)\right](\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)-\frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right.$$

$$+p\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)+p\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p^2\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)\Bigg]=\Bigg[\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)$$

$$+\frac{\partial p}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)+p\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)+\frac{\partial p}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right) \tag{6}$$

$$+p\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+2p\frac{\partial p}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)$$

$$+p^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, e_1\right)\Bigg](e_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)-\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\Bigg[\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)$$

$$+p\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)+p\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+p^2\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\Bigg].$$

В (6) заместваме $\frac{\partial p}{\partial t}$ и $\frac{\partial p}{\partial v}$, след което получаваме за p уравнението от втора степен

$$ap^2+bp+c=0. \tag{7}$$

Тъй като условието за разслояемост от X_1 към X_2 трябва да бъде изпълнено за всяко p, то (7) има безбройно много решения, т. е.

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0.$$

Изразяваме коефициентите на (7) от (6) и получаваме условията за разслояемост от X_1 към X_2:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)-\frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)$$

$$+\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)-\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)$$

$$+\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)-\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right) \tag{8$_1$}$$

$$+(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\right]=0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\right]$$

$$+2\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)-2\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)$$

$$(8_2)\qquad +(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)+\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)+\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right]=0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right]$$

$$+\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)-\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{e}_1\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)$$

$$(8_3)\qquad +\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)$$

$$-\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}, A_1-A_2\right)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left((\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial v}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left((\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\right)=0.$$

Условията за разслояемост от X_2 към X_1 ще се получат, като вземем разслояващите повърхнини S_q на X_2:

$$\bar{y}=A_2(t, v)+q(t, v)\,\bar{e}_2(t, v),$$

където q е най-малко два пъти диференцируема функция на t, v. Тангенциалните равнини на S_q съдържат X_1, т. е. имаме

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}, \bar{y}-\bar{A}_1\right)=0,$$

$$\left(e_1, \frac{\partial \bar{y}}{\partial v}, \bar{y}-A_1\right)=0,$$

откъдето намираме съответно

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q\left(e_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q^2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)},$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}=\frac{\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q^2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)}.$$

От условието за интегрируемост $\frac{\partial^2 q}{\partial t\,\partial v}=\frac{\partial^2 q}{\partial v\,\partial t}$ получаваме зависимостта

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(e_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, A_2-A_1\right)+\frac{\partial q}{\partial v}\left(e_1, \frac{\partial A_2}{\partial t}, e_2\right)+q\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)+\frac{\partial q}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right.$$

$$\left.+q\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+2q\frac{\partial q}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, e_2\right)+q^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, e_2\right)\right](\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(e_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)\left[\left(e_1, \frac{\partial A_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right.$$

$$\left.+q^2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)\right]=\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial A_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+\frac{\partial q}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial A_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right. \tag{9}$$

$$+q\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)+\frac{\partial q}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+2q\frac{\partial q}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)$$

$$\left.+q^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right](e_1, e_2, \bar{A}_1-A_2)-\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(e_1, \frac{\partial A_2}{\partial v}, \bar{A}_2-A_1\right)\right.$$

$$\left.+q\left(e_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)+q\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+q^2\left(e_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right].$$

След заместване в (9) на q_t и q_v аналогично, както по-горе, се получава едно уравнение от втора степен относно q, което има безбройно много решения. Следователно са изпълнени условията:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, e_2\right)-\frac{\partial}{\partial v}(e_1, \bar{e}_2, A_1-\bar{A}_2)\left(e_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)$$

$$+\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)-\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)$$

$$+\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, A_2-A_1\right)-\left(e_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right) \tag{10$_1$}$$

$$+(\bar{e}_1, e_2, A_1-A_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, e_2\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right]=0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-A_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\right]$$

$$+2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial A_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)-2\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)$$

$$(10_2)\qquad +(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)+\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)+\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right]=0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\right]$$

$$+\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)-\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)$$

$$(10_3)\qquad +\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)$$

$$-\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{A}_1-\bar{A}_2)\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2-\bar{A}_1\right)=0.$$

В уравненията (8_1), (8_2), (8_3), (10_1), (10_2), (10_3), които изразяват двустранната разслояемост на X_1 и X_2, следва да заместим $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ от (1) и (2). В резултат на това ще се получат твърде сложни зависимости между кинематичните елементи на двете движения, които не ще пишем. Ще отбележим, че понеже двете движения зависят общо от 12 независими величини (степени на свобода), задачата за намиране на движения с такова свойство изобщо допуска решение. В друга работа [1] построихме директно такива движения въз основа на една теорема от теорията на разслояемите конгруенции [2]. Тук ще намерим случай на разслояема двойка конгруенции витлови оси, който директно следва от получените зависимости.

Предварително ще преобразуваме уравненията за разслояемост (8_1), (8_2), (8_3), (10_1), (10_2), (10_3), за които ще покажем, че при известни връзки между $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ тези уравнения се редуцират на две. В цялото следващо разглеждане предполагаме, че векторите $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ са перпендикулярни, откъдето имаме

$$(11)\qquad \begin{aligned} \bar{e}&=\bar{e}_1\times\bar{e}_2,\\ \bar{e}_1&=\bar{e}_2\times\bar{e},\\ \bar{e}_2&=\bar{e}\times\bar{e}_1. \end{aligned}$$

Тук $\bar{e}$ е единичният вектор на общия перпендикуляр на двете конгруенции. Разлагаме $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ по некомпланарните вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}$:

$$\bar{A}_1=\lambda_1\bar{e}_1+\mu_1\bar{e}_2+\nu_1\bar{e},$$

$$\bar{A}_2=\lambda_2\bar{e}_1+\mu_2\bar{e}_2-\nu_2\bar{e}.$$

За случая, който ще разглеждаме, може да се приеме $\mu_1=0$, $\lambda_2=0$, т. е.

$$\bar{A}_1=\lambda_1\bar{e}_1+\nu_1\bar{e},$$

(12)

$$\bar{A}_2=\mu_2\bar{e}_2-\nu_2\bar{e}.$$

Диференцираме първото уравнение на (12) спрямо параметрите и получаваме

$$\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\bar{e}_1+\lambda_1\frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t}+\frac{\partial\nu_1}{\partial t}\bar{e}+\nu_1\frac{\partial\bar{e}}{\partial t},$$

(13)

$$\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial v}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\bar{e}_1+\lambda_1\frac{\partial e_1}{\partial v}+\frac{\partial\nu_1}{\partial v}\bar{e}+\nu_1\frac{\partial\bar{e}}{\partial v}.$$

Въз основа на (11), (12) и (13) получаваме

$$(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{A}_1-\bar{A}_2)=\nu_1+\nu_2,$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v},\ e_1\right)=\left(\bar{e},\ \frac{\partial e_1}{\partial v}\right),$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)=\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t}\right),$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial v},\ \bar{e}_1\right)=\lambda_1\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v}\right)+\frac{\partial\nu_1}{\partial v},$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial t},\ \bar{e}_1\right)=\lambda_1\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t}\right)+\frac{\partial\nu_1}{\partial t},$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v},\ \bar{A}_1-A_2\right)=\lambda_1\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v}\right),$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)=\lambda_1\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial t}\right),$$

$$\left(\bar{e}_2,\ \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial v},\ \bar{A}_1-\bar{A}_2\right)=\lambda_1^2\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v}\right)+\lambda_1\frac{\partial\nu_1}{\partial v}-(\nu_1+\nu_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+\nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(\bar{e},\ \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial v}\right),$$

$$\left(\bar{e}_2, \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}, \bar{A}_1 - \bar{A}_2\right) = \lambda_1^2\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) + \lambda_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial t} - (\nu_1 + \nu_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \nu_1(\nu_1 + \nu_2)\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right).$$

Заместваме последните зависимости в (9_1), (9_2), (9_3) и след известно преобразуване намираме следните уравнения:

$$(14_1) \qquad \frac{\partial \nu_2}{\partial t}\left(e, \frac{\partial e_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_2}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) + (\nu_1 + \nu_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial e_1}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right)\right] = 0,$$

$$(14_2) \qquad \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\frac{\partial \nu_2}{\partial t} - \frac{\partial \nu_1}{\partial t}\frac{\partial \nu_2}{\partial v} = 0,$$

$$(14_3) \qquad \nu_1(\nu_1 + \nu_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial e_1}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right] + \nu_2\left[\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right] = 0.$$

За преобразуване на другите уравнения за разслояемост диференцираме второто уравнение в (12) спрямо параметрите и получаваме

$$(15) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} &= \frac{\partial \mu_2}{\partial t}\bar{e}_2 + \mu_2 \frac{\partial e_2}{\partial t} - \frac{\partial \nu_2}{\partial t}\bar{e} - \nu_2 \frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial v} &= \frac{\partial \mu_2}{\partial v}\bar{e}_2 + \mu_2 \frac{\partial e_2}{\partial v} - \frac{\partial \nu_2}{\partial v}\bar{e} - \nu_2 \frac{\partial \bar{e}}{\partial t}. \end{aligned}$$

От (11), (12) и (15) намираме

$$\left(e_1, \frac{\partial e_2}{\partial v}, \bar{e}_2\right) = -\left(\bar{e}, \frac{\partial e_2}{\partial v}\right),$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right) = -\left(\bar{e}, \frac{\partial e_2}{\partial t}\right),$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial A_2}{\partial v}, e_2\right) = -\mu_2\left(\bar{e}, \frac{\partial e_2}{\partial v}\right) + \frac{\partial \nu_2}{\partial v},$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial A_2}{\partial t}, \bar{e}_2\right) = -\mu_2\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) + \frac{\partial \nu_2}{\partial t},$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) = -\mu_2\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right),$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial e_2}{\partial t}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) = -\mu_2\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right),$$

$$\left(\bar{e}_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial v}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) = -\mu_2^2\left(\bar{e}, \frac{\partial e_2}{\partial v}\right) + \mu_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial v} - (\nu_1 + \nu_2)\frac{\partial \mu_2}{\partial v} - \nu_2(\nu_1 + \nu_2)\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right),$$

$$\left(e_1, \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t}, \bar{A}_2 - \bar{A}_1\right) = -\mu_2^2\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) + \mu_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial t} - (\nu_1 + \nu_2)\frac{\partial \mu_2}{\partial t} - \nu_2(\nu_1 + \nu_2)\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right).$$

Заместваме тези релации в (10_1), (10_2), (10_3), които след известно преобразуване добиват вида

$$(16_1)\qquad \frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) + (\nu_1 + \nu_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right)\right] = 0,$$

$$(16_2)\qquad \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\frac{\partial \nu_2}{\partial t} - \frac{\partial \nu_1}{\partial t}\frac{\partial \nu_2}{\partial v} = 0,$$

$$(16_3)\qquad \nu_2(\nu_1 + \nu_2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right)\right] + \nu_1\left[\frac{\partial \nu_2}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_2}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right)\right] = 0.$$

Поради съвпадането на (14_2) и (16_2) уравненията за разслояемост се свеждат на пет. Нека функциите ν_1 и ν_2 са свързани с функционалната връзка

$$\nu_2 = f(\nu_1),$$

където f е диференцируема функция. Тогава (14_2), (16_2) се удовлетворяват тъждествено, а (14_1) и (14_3) добиват вида

$$(17)\qquad \begin{aligned} &f'(\nu_1)\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) - f'(\nu_1)\frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) + (\nu_1 + f(\nu_1))\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right)\right] = 0, \\ &f(\nu_1)\left[\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right] + \nu_1\left[\nu_1 + f(\nu_1)\right]\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Съответно уравненията (16_1) и (16_3) добиват вида

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) + [\nu_1 + f(\nu_1)]\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right)\right] = 0, \\ &\nu_1 f'(\nu_1)\left[\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right)\right] + f(\nu_1)(\nu_1 + f(\nu_1))\left[\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) \\ &\qquad - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Уравненията (17), съответно (18), се редуцират на едно уравнение при

$$\frac{1}{f'(\nu_1)} = -\frac{\nu_1}{f(\nu_1)}.$$

От последната релация намираме

$$\nu_2 = \frac{h}{\nu_1}, \quad h = \text{const}. \tag{19}$$

Заместваме ν_2 от (19) в (17) и (18) и получаваме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) + \frac{\nu_1}{h}(h+\nu_1^2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right)\right] = 0, \\ &\frac{\partial \nu_1}{\partial t}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) - \frac{\partial \nu_1}{\partial v}\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) + \frac{1}{\nu_1}(h+\nu_1^2)\left[\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Това са уравненията, към които се редуцират при направените допускания шестте уравнения за разслояемост.

Интегрирането на (20) ще ни доведе до случая на разслояема двойка конгруенции. За тази цел взимаме вектора $\bar{e}$, определящ общия перпендикуляр на двете конгруенции, в следния конкретен вид:

$$\bar{e} = A(v)\cos\sigma \bar{i} - A(v)\sin\sigma \bar{j} + \sqrt{1-A^2}\,\bar{k}, \tag{21}$$

където σ е произволна диференцируема функция на t и A — произволна функция на v, която допълнително ще определим. Както ще видим, от (21) лесно може да се премине към обобщение за $\bar{e}$, т. е. когато $\bar{e}$ е произволна функция на параметрите.

Векторът $\bar{e}$ и неговите производни са свързани със следните релации [2]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\sqrt{\gamma_{11}}\,\bar{f}^*, \quad \frac{\partial \bar{e}}{\partial v} = \sqrt{\gamma_{22}}\,\bar{f}, \\ &\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \alpha\sqrt{\gamma_{11}}\,\bar{f}^*, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \sqrt{\gamma_{22}}(-\bar{e} + \alpha^*\bar{f}^*), \\ &\frac{\partial \bar{f}^*}{\partial t} = \sqrt{\gamma_{11}}(\bar{e} - \alpha\bar{f}), \quad \frac{\partial \bar{f}^*}{\partial v} = -\sqrt{\gamma_{22}}\,\alpha^*\bar{f}, \end{aligned} \tag{22}$$

където γ_{11}, γ_{22} са компоненти на метричния тензор на $\bar{e}$, α, α^* — инвариантите ротация на разпределителните роеве, $\bar{f}$, $\bar{f}^*$ — единични вектори, които заедно с $\bar{e}$ образуват дясно ориентиран ортогонален триедър. От (21) получаваме

$$\gamma_{11} = A^2\sigma^2, \quad \gamma_{22} = \frac{A'^2}{1-A^2},$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{1-A^2}}{A}, \quad \alpha^* = 0,$$

(23)

$$\bar{f} = \sqrt{1-A^2}\,(\cos\sigma\bar{i} - \sin\sigma\bar{j}) - A\bar{k},$$

$$f^* = \sin\sigma\bar{i} + \cos\sigma\bar{j}.$$

Векторите $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ са перпендикулярни на $\bar{e}$ и следователно ще лежат в равнината на векторите f, f^*, т. е. имаме

$$\bar{e}_1 = \cos\varphi\, f + \sin\varphi\, f^*,$$

(24)

$$\bar{e}_2 = -\sin\varphi\, f + \cos\varphi\, f^*,$$

гдето φ е произволна функция на параметрите. Сега можем да изчислим коефициентите на (20), които са

$$\left(e, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) = \sin\varphi\sqrt{\gamma_{11}}, \quad \left(e, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v}\right) = -\cos\varphi\sqrt{\gamma_{22}},$$

$$\left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) = \cos\varphi\sqrt{\gamma_{11}}, \quad \left(\bar{e}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) = \sin\varphi\sqrt{\gamma_{22}},$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial t}\right) = -\sqrt{\gamma_{22}}\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \sin\varphi\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}\,\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}, \frac{\partial e_1}{\partial v}\right) = -\sqrt{\gamma_{11}}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t}\right) = -\sqrt{\gamma_{22}}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \cos\varphi\sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}\,\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v}\right) = \sqrt{\gamma_{11}}\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

В съответствие със специалния избор на вектора $\bar{e}$ вземаме такива функции φ и ν_1, които да зависят само от параметъра v. Тогава (20) добиват вида

$$\frac{d\nu_1}{dv} = -\frac{h+\nu_1^2}{\nu_1}\left[\alpha\sqrt{\gamma_{22}} + \frac{d\varphi}{dv}\operatorname{tg}\varphi\right],$$

(25)

$$\frac{d\nu_1}{dv} = \frac{\nu_1}{h}(h+\nu_1^2)\left[\alpha\sqrt{\gamma_{22}} - \frac{d\varphi}{dv}\operatorname{cotg}\varphi\right]$$

или приравнявайки десните страни на уравненията, получаваме

(26)

$$\nu_1 = \sqrt{h}\sqrt{\frac{\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \alpha\sqrt{\gamma_{22}}}{\varphi'\operatorname{cotg}\varphi - \alpha\sqrt{\gamma_{22}}}}.$$

Заместваме ν_1 от (26) в (25) и след известно преобразуване получаваме

$$4\varphi'^3+6\varphi'^2\operatorname{cotg}2\varphi\,\alpha\sqrt{\gamma_{22}}+\varphi'\frac{d}{dv}(\alpha\sqrt{\gamma_{22}})-\varphi''\,\alpha\sqrt{\gamma_{22}}-2\varphi'(\alpha\sqrt{\gamma_{22}})^2=0.$$

След субституцията

$$\alpha\sqrt{\gamma_{22}}=R(\varphi)\varphi' \tag{27}$$

горното уравнение добива вида

$$\frac{dR}{d\varphi}=2R^2-6\operatorname{cotg}2\varphi R-4. \tag{28}$$

От (26) и (27) получаваме

$$\nu_1=\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}} \tag{29}$$

и съответно

$$\nu_2=\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}}, \tag{30}$$

където R е интеграл на (28). Численото интегриране на (28) показва, че за достатъчно широк интервал за φ съществуват решения на (28), за които ν_1 и ν_2 имат реално значение.

От релацията (27) намираме

$$A(\varphi)=A_0\,e^{-\int R d\varphi},\quad A_0=\text{const},$$

където A е функцията, фигурираща във вектора $\bar{e}$.

Нека $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ са точките, в които общият перпендикуляр пресича съответно двете конгруенции. Въз основа на получените връзки имаме

$$\begin{aligned} \bar{P}_1&=\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}}\,\bar{e},\\ \bar{P}_2&=-\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}}\,\bar{e}. \end{aligned} \tag{31}$$

Уравненията (31) показват, че общият перпендикуляр на двете конгруенции витлови оси минава през центъра на неподвижната координатна система, т. е. образува звезда прави.

Нека сега да извършим смяна на параметрите в конгруенциите с оглед да обобщим получения резултат от интегрирането на (20). Спрямо новите параметри векторът $\bar{e}$ има вида

$$\bar{e}=e_1(u_1,u_2)\bar{i}+e_2(u_1,u_2)\bar{j}+e_3(u_1,u_2)\bar{k}, \tag{32}$$

където e_1, e_2, e_3 са произволни функции, удовлетворяващи условието

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=1.$$

В съответствие с (21) между новите и старите параметри имаме връзките

$$(33)\qquad \begin{aligned} e_1(u_1, u_2)&=A(\varphi)\cos\sigma,\\ e_2(u_1, u_2)&=-A(\varphi)\sin\sigma,\end{aligned}$$

като за съответната област на изменение на u_1 и u_2 имаме

$$(34)\qquad \frac{\partial(e_1, e_2)}{\partial(u_1, u_2)}\neq 0.$$

От (33) φ и σ могат да се определят обратно във функция на u_1 и u_2. Не е трудно да се провери, че при спазване на (34), ако вземем $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{P}_1$ $\bar{P}_2$ във функция на новите параметри, условията за разслояемост са изпълнени. Така полученият резултат може да се формулира в следната

Теорема. Конгруенциите витлови оси

$$(35)\qquad \bar{P}_1=\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}}\,\bar{e},\quad \bar{e}_1=\cos\varphi\,\bar{f}+\sin\bar{f}^*,$$

$$(36)\qquad \bar{P}_2=-\sqrt{h}\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}\varphi-R(\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi+R(\varphi)}}\,\bar{e},\quad \bar{e}_2=-\sin\varphi\,\bar{f}+\cos\varphi\,\bar{f}^*,$$

образуват разслояема двойка конгруенции. Тук

$$\bar{e}=e_1(u_1, u_2)\,\bar{i}+e_2(u_1, u_2)\,\bar{j}+e_3(u_1, u_2)\,\bar{k}$$

е произволен единичен вектор,

$$\bar{f}=\frac{\sqrt{1-e_1^2-e_2^2}}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\,(e_1\bar{i}+e_2\bar{j})-\sqrt{e_1^2+e_2^2}\,\bar{k},$$

$$\bar{f}^*=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}}(-e_2\bar{i}+e_1\bar{j}),$$

φ е функция, определена от уравнението

$$\int R\,d\varphi=-\frac{1}{2}\ln(e_1^2+e_2^2),$$

където R е произволен интеграл на уравнението

$$\frac{dR}{d\varphi}=2R^2-6\operatorname{cotg}2\varphi\,R-4.$$

Кинематичните определители на движенията (ойлерови ъгли, полюси), съответствуващи на конгруенциите витлови оси (35) и (36), не ще даваме в явен вид, тъй като този въпрос в обща форма е разгледан в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Диамандиев, В.: Прецесионни движения с хеликоидални оси, образуващи разслояема двойка конгруенции. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/68), 261—271.
2. Гьонов, Ал.: Конгруенции прави, чиито централни нормали на граничните роеве образуват разслояема двойка. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 57 (1962/63), кн. 1 (мат.), 201—209.
3. Фиников, С. П.: Теория пар конгруэнций. Москва, 1956.

Постъпила на 25. XI. 1969 г.

CLASSES OF MOTIONS WITH HELICAL AXES FORMING A STRATIFIABLE PAIR OF CONGRUENCES

V. Diamandiev

(SUMMARY)

In the paper general dependences have been found between the cinematic characteristics of two motions, whose helical axes form a stratifiable pair of congruences. A case of stratifiable pair of congruences of helical axes has been obtained from these dependences. The common perpendiculars of the lines of these congruences represent straight lines with an arbitrary direction, passing through the origin of the coordinates. The points of intersection of the lines of the stratifiable pair of congruences with their common perpendicular are asymetrically disposed with respect to the origin of coordinates at distances, being a function of the integral of a Ricatti's differential equation. The directions of the two congruences are expressed through the derivatives of direction of the common perpendicular by means of functions, comprising the integral of the same Ricatti's equation.