О ПРОДОЛЖЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ В СФЕРУ

Николай Г. Хаджииванов

В этой заметке будем изучать вопрос о продолжении отображений в сферу в связи с задачами уплотнений на бикомпакты.

Насколько нам известно, впервые с исследованиями подобного типа занимался в своей работе [1] Ю. М. Смирнов. Там рассматривается более конкретная задача о связи между вопросами о ретракции и об уплотнении на бикомпакты. В [1] исследования этой связи носят конкретный характер. Они используются для отрицательного решения следующей проблемы П. С. Александрова: можно ли уплотнить на компакт связное, локально-связное, полное метрическое пространство со счетной базой, являющееся суммой счетного числа компактов? Ю. М. Смирновым был поставлен вопрос: что будет, если во вышеупомянутой проблеме П. С. Александрова заменить требование связности и локальной связности на более сильное — n-связность и локальная n-связность.

Мы доказали, приводя подходящий пример, что и тогда не будет уплотнения на бикомпакт. В настоящей статье мы даем все необходимое для построения этого примера, не касаясь здесь вопросов n-связности.

Теорема I. Пусть $X=\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \cup R$, где X наследственно нормальный бикомпакт, $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ — дизъюнктная система замкнутых подмножеств, и $\dim R \leqq n-1$. Тогда для любого непрерывного отображения f_0 подмножества X_0 в n-мерную сферу S^n существует непрерывное продолжение $f: X \to S^n$. Если бикомпакт X необязательно наследственно нормален, но R замкнуто, то утверждение остается в силе.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть пространство X наследственно нормально и для подмножества R имеем $\dim R \leqq n-1$. Тогда, если (A_i, A_{-i}), $i=1, 2, \ldots, n-n$ пар замкнутых подмножеств, для которых $A_i \cap A_{-i}=\emptyset$, $i=1, 2, \ldots, n$, то существуют замкнутые перегородки C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, между A_i и A_{-i}, удовлетворяющие условию $R \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i=\emptyset$. Если пространство X только нормально, но R замкнуто, утверждение остается в силе.[1]

---

[1] На самом деле лемма верна при более общих предположениях.

n-мерная сфера S^n, с точностью до гомеоморфизма, можно рассматривать как границу куба $I^{n+1}: S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (S_i^n \cup S_{-i}^n)$, где $S_{\varepsilon i}^n = \{x = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in I^{n+1} / x_i = \varepsilon\}$, $\varepsilon = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Лемма 2. Пусть X бинормальное пространство,[1] A — замкнутое подмножество и $f_0: A \to S^n$ непрерывное отображение. Отображение f_0 продолжается на X тогда и только тогда, когда существуют замкнутые перегородки C_i в X между $A_i = f_0^{-1} S_i^n$ и $A_{-i} = f_0^{-1} S_{-i}^n$, для которых $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть пространство X-сумма счетного числа дизъюнктных бикомпактных множеств $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ и своего подмножества R, т. е. $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \cup R$. Пусть, кроме того, некоторое непрерывное отображение $f_0: X_0 \to S^n$ не продолжается на X. Тогда не существует уплотнения $g: X \to Y$ на наследственно нормальный бикомпакт Y, при котором $\dim g(R) \leqq n-1$[2].

В E^{n+2} рассмотрим следующее множество:

$P = S^n \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(D^{n+1} \times \frac{1}{k}\right)$, где через S^n обозначаем единичную сферу в E^{n+1}, а через D^{n+1} — единичный шар в E^{n+1}.

Лемма 3. Множество P не ретрагируется на S^n.

На n-мерной сфере S^n рассмотрим последовательность симплициальных разбиений $K_1, K_2, \ldots, K_k, \ldots$, где полиэдр K_{k+1} является симплициальным подразбиением полиэдра K_k. $(n-1)$-мерный остов полиэдра K_k будем обозначать через L_k. Ясно, что $L_{k+1} \supset L_k$. В E^{n+2} определим следующее множество:

$$A_n = S^n \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(D^{n+1} \times \frac{1}{k}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(L_k \times \left[0, \frac{1}{k}\right]\right).$$

Теорема 3. Множество A_n не уплотняется на никакой бикомпакт.[3]

Доказательство леммы 1. Пусть U_i и U_{-i} открыты в X и удовлетворяют условиям: $U_i \supset A_i$, $U_{-i} \supset A_{-i}$, $\bar{U}_i \cap \bar{U}_{-i} = \varnothing$. Множества $\bar{U}_i \cap R$ и $\bar{U}_{-i} \cap R$ замкнуты в R и не пересекаются. Имеем n пар замкнутых множеств $(\bar{U}_i \cap R, \bar{U}_{-i} \cap R)$ в нормальном пространстве R, для которого $\dim R \leqq n-1$. В этой ситуации можем утверждать (см. [2]), что существуют в R замкнутые перегородки B_i между множествами $\bar{U}_i \cap R$ и $\bar{U}_{-i} \cap R$, пересечение которых пусто, т. е. $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = \varnothing$.

---

[1] Это означает, что $X \times I$ нормально. На самом деле лемма верна даже для нормальных пространств.

[2] Теорема верна при более общих предположениях.

[3] Отсюда следует теорема A из [1].

Так как B_i — перегородка в R между $\bar{U}_i \cap R$ и $\bar{U}_{-i} \cap R$, то $R \setminus B_i = W_i \cup W_{-i}$, где W_i и W_{-i} открыты в R и $W_i \cap W_{-i} = \emptyset$. Положим $D_i = W_i \cup A_i$ и $D_{-i} = W_{-i} \cup A_{-i}$. Нетрудно проверяется, что $(\bar{D}_i \cap D_{-i}) \cup (D_i \cap \bar{D}_{-i}) = \emptyset$. Так как X — наследственно нормально, то существует замкнутая перегородка C_i между D_i и D_{-i}. C_i — замкнутая перегородка между A_i и A_{-i}, и $R \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$.

В случае, когда X только нормально, однако R замкнуто, возьмем в R окрестности G_i множеств B_i, которые суть перегородки между $\bar{U}_i \cap R$ и $\bar{U}_{-i} \cap R$, и $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset$. Определим множества $F_i = A_i \cup (W_i \setminus G_i)$ и $F_{-i} = A_{-i} \cup (W_{-i} \setminus G_i)$. Легко проверяется, что они замкнуты и не пересекаются. Пусть C_i — замкнутая перегородка между F_i и F_{-i}. Тогда C_i — замкнутая перегородка между A_i и A_{-i} и $R \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset$.

Доказательство леммы 2. Следование $\Rightarrow$ доказывается легко.

Докажем, что если существуют замкнутые перегородки между $A_i = f_0^{-1} S_i^n$ и $A_{-i} = f_0^{-1} S_{-i}^n$, для которых $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$, то f_0 продолжается на X. Без ограничения общности можем считать перегородки G_δ — множествами. Определим непрерывную функцию φ_i следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \in A_i, \\ -1, \text{ если } & x \in A_{-i}, \\ 0, \text{ если } & x \in C_i, \end{cases}$$

и кроме того $\varphi_i(x) \in [-1, 1]$, $\varphi_i^{-1}(0) = C_i$.

Определим непрерывное отображение $\varphi: X \to I^{n+1}$ следующим образом: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x))$. Ясно, что $\varphi(X) \not\ni \mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$. Пусть $\pi: I^{n+1} \setminus \mathbf{0} \to S^n$ — ретракция. Отображения f_0 и $\pi\varphi/A$ гомотопны на A. Действительно, если $x \in A_{\varepsilon i}$, то $f_0(x) \in S_{\varepsilon i}^n$, кроме того $\varphi_i(x) = \varepsilon$, так что $\varphi(x) \in S_{\varepsilon i}^n$, и следовательно $\pi\varphi(x) \in S_{\varepsilon i}^n$. Поэтому точки $f_0(x)$ и $\pi\varphi(x)$ не диаметрально противоположны на S^n, так что f_0 и $\pi\varphi/A$ гомотопны на A. По теореме Борсука о продолжении гомотопии (см. [3]) отображение f_0 продолжается на X.

Доказательство теоремы I. Положим $A_i = f_0^{-1} S_i^n$, $A_{-i} = f_0^{-1} S_{-i}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. По лемме I существуют замкнутые перегородки C_i между A_i и A_{-i}, $i = 2, 3, \ldots, n+1$, для которых $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i \cap R = \emptyset$. Тогда имеем

$$\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i \subset X \setminus (R \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} (A_i \cup A_{-i})) \subset A_1 \cup A_{-1} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

По одной теореме Серпинского (см. [4]) любая компонента связности множества $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i$, пересекающаяся с одним из множеств A_1 и A_{-1}, обязательно не пересекается с другим. Так как в бикомпактном пространстве компоненты связности суть квазикомпоненты, то для каждой компоненты связности множества $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i$ существует открыто-замкнутая в $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i$ окрестность, которая пересекается не больше чем с одним из множеств A_1, A_{-1}. Снова пользуясь бикомпактностью множества $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i$ и только что сделанного замечания, получаем, что $\bigcap_{i=2}^{n+1} C_i = C^1 \cup C^{-1}$, где C^1 и C^{-1} замкнуты. $C^1 \cap C^{-1} = \varnothing$, и $C^1 \cap A_{-1} = \varnothing$, $C^{-1} \cap A_1 = \varnothing$. Так как замкнутые множества $A_1 \cup C^1$ и $A_{-1} \cup C^{-1}$ не пересекаются, их можно разделить замкнутой перегородкой C_1. Ясно, что C_1 — перегородка между A_1 и A_{-1}, и $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$. Применяя лемму 2, мы можем утверждать, что f_0 продолжается на X.

Доказательство теоремы 2. Допустим, что $g: X \to Y$ уплотнение на бикомпакт Y. Имеем $Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} g(X_i) \cup g(R)$. Применяя теорему I, заключаем, что отображение $f_0(g^{-1}: g(X_0) \to S^n$ продолжается на Y в отображение $\varphi: Y \to S^n$. Но тогда, противно допущению, отображение f_0 имеет продолжение $\varphi g: X \to S^n$.

Доказательство леммы 3. Допустим, что существует ретракция $r: P \to S^n$. Множество $C = S^n \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(S^n \times \frac{1}{k}\right)$ компактно. Следовательно существует такое положительное число δ, что если x', $x'' \in C$ и $\rho(x', x'') < \delta$, то $\rho(r(x'), r(x'')) < 2$. Пусть $k_0 > \frac{1}{\delta}$ и $\pi: D^{n+1} \times \frac{1}{k} \to D^{n+1}$ — проектирование. Положим $\psi = \pi^{-1} r: D^{n+1} \times \frac{1}{k_0} \to S^n \times \frac{1}{k_0}$. Ясно что, если $x \in S^n \times \frac{1}{k_0}$, то $\rho(\psi(x), x) < 2$. Следовательно $\psi(x)$ не диаметрально противоположно точке x на $S^n \times \frac{1}{k_0}$. Это противоречит теореме Брауэра о неподвижной точке.

Доказательство теоремы 3. Пусть M_k счетное подмножество в L_k, такое, что $\dim(L_k \setminus M_k) \leqq n-2$[1]. Пусть $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M_k \times K_k)$, где K_k — множество всех рациональных чисел в интервале $\left(0, \frac{1}{k}\right)$. Множество

[1] Его возможно выбрать, потому что L_k есть конечная сумма $(n-1)$-мерных симплексов.

$F=M\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(D^{n+1}\times\frac{1}{k}\right)$ — счетная дизъюнктная сумма бикомпактных подмножеств пространства A_n, а именно сумма всех $D^{n+1}\times\frac{1}{k}$ и всех точек счетного множества M. Отметим, что $F\cap S^n=\emptyset$. Положим $R=A_n\setminus(F\cup S^n)$. Допустим, что существует уплотнение $g:A_n\to Y$ на бикомпакт Y. Докажем, что $\dim g(R)\leqq n-1$. Очевидно $R=\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k$, где $R_k=(L_k\setminus M_k)\times J_k$, а J_k — множество иррациональных чисел интервала $\left(0,\frac{1}{k}\right)$. Легко устанавливается, что $\dim R_k\leqq n-1$. Так как $L_k\times\left[0,\frac{1}{k}\right]$ бикомпактно, то множество $g\left(L_k\times\left[0,\frac{1}{k}\right]\right)$ замкнуто в $g\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(L_k\times\left[0,\frac{1}{k}\right]\right)\right)$. Следовательно множество $g(R_k)$ замкнуто в $g(R)$. Кроме того, g — гомеоморфизм на $L_k\times\left[0,\frac{1}{k}\right]$ и поэтому $\dim g(R_k)\leqq n-1$. Тогда по теореме суммы $\dim g(R)\leqq n-1$.

По лемме 3 следует, что A_n не ретрагируется на S^n. Следовательно тождественное отображение S^n на S^n не продолжается на $A_n=S^n\cup F\cup R$. Имея ввиду доказанное выше, по теореме 2 можем заключить, что A_n не уплотняется на наследственно нормальный бикомпакт. Так как при уплотнении на бикомпакт вес пространства не возрастает (см. [5]), а A_n имеет счетный вес, то мы можем утверждать, что A_n не уплотняется на никакой бикомпакт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Ю. М.: Уплотнения на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и с ретракцией. Fund. Math., **63** (1968), 199—211.
2. Гуревич, В., Волмен, Г.: Теория размерности. Москва, 1948.
3. Borsuk, K.: Theory of retracts. Warszawa, 1967.
4. Sierpinski, W.: Un théorème sur les continus. Tôh. Math. J., **13** (1918), 300—303.
5. Архангельский, А. В.: О внешних базах множеств, лежащих в бикомпактах. Докл. АН СССР, **132** (1960), 495—496.

Постъпила на 24. II. 1970 г.

SUR LE PROLONGEMENT DES APPLICATIONS DANS LA SPHÈRE

N. G. Hadjiivanov

(RÉSUMÉ)

Le résultat principal de cet article est le suivant:

Soit $X=\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \cup R$, où X est un bicompact normal héréditaire et X_i sont des sous-ensembles fermés, tels que $X_i \cap X_j=\emptyset$ quand $i \neq j$ et $\dim R \leqq n-1$. Il résulte alors que chaque application continue $f_0: X_0 \to S^n$ admet un prolongement continu $f: X \to S^n$. Si l'on suppose que l'ensemble R est fermé, l'assertion est vraie pour un bicompact arbitraire.