О СИЛЬНО-ЗАМКНУТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Николай Г. Хаджииванов

В своей работе [1] Ю. М. Смирнов вводит понятие сильно-замкнутого отображения. Он называет отображение $f\colon X \to Y$ сильно-замкнутым, если для каждой точки $y \in f(X)$ и каждой окрестности U ее полного прообраза $f^{-1}y$ существует такая окрестность Oy точки y, что $f^{-1}Oy \subset U$, где множество $f^{-1}Oy$ открыто.

Теорема 1. Отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ сильно-замкнуто тогда и только тогда, когда оно есть суперпозиция двух отображений, первое из которых замкнуто и непрерывно, а второе — замкнуто и однозначно.

Доказательство. В X вводим отношение эквивалентности: $xRx' \Longleftrightarrow fx = fx'$. Пусть $Z = X/R$ фактор-пространство, а $\varphi\colon X \to Z$ каноническое отображение пространства X на Z. Отображение φ непрерывно. Пусть F замкнутое множество в X. Докажем, что φF замкнуто, т. е. что $\varphi^{-1}\varphi F$ замкнуто в X. Однако $\varphi^{-1}\varphi F = f^{-1}fF$ и остается принять ввиду, что из сильной-замкнутости отображения f следует, что множество $f^{-1}fF$ замкнуто (см. [1]).

Пусть $z \in Z$. Положим $\psi z = f(\varphi^{-1}z)$. Так как φ непрерывно, а f замкнуто, то ψ замкнуто. Кроме того, если $z_1 \neq z_2$, то $f(\varphi^{-1}z_1) \neq f(\varphi^{-1}z_2)$, так как в противоположном случае $\varphi^{-1}z_1 = \varphi^{-1}z_2$. И так ψ — взаимно-однозначное и замкнутое отображение.

Очевидно $f = \psi\varphi$.

Следование $\Longleftarrow$) доказывается еще легче. Действительно $f = \psi\varphi$ будет замкнуто, так как φ и ψ замкнуты. Кроме того $f^{-1}fF = \varphi^{-1}\psi^{-1}\psi\varphi F = \varphi^{-1}\varphi F$ и следовательно множество $f^{-1}fF$ замкнуто, если F замкнуто. Окончательно получаем, что отображение f сильно-замкнуто (см. [1]).

Следствие 1. Если бикомпакт X сильно-замкнуто отображается на пространство Y, то Y уплотняется на бикомпакт.

Доказательство. Утверждение легко следует из теоремы 1, принимая ввиду, что непрерывный и замкнутый образ бикомпакта есть бикомпакт.

Теорема 1 из [1] является совсем частным случаем следствия 1. Конечно идет речь о достаточности в этой теореме. Однако необходимость там очевидна.

Теорема 2. Если для некоторого бикомпактного расширения cX пространства X существует непрерывное отображение $f\colon \overline{N}_C \to X$, тож-

дественное на множестве всех точек не локальной бикомпактности $X_N=\bar{N}_C\cap X$, то X уплотняется на бикомпакт.

Доказательство. Положим $\varphi y=\begin{cases} y, & y\in X,\\ fy, & y\in \bar{N}_C.\end{cases}$

$\varphi F=(F\cap X)\cup f(\bar{N}_C\cap F)$ и следовательно φF замкнуто, если множество F замкнуто.

$$\varphi^{-1}\varphi F=\varphi^{-1}(F\cap X)\cup\varphi^{-1}f(\bar{N}_C\cap F)=(F\cap X)\cup f^{-1}F\cup f^{-1}f(\bar{N}_C\cap F)\cup f(\bar{N}_C\cap F).$$

Так как $F\cap\bar{N}_C\subset f^{-1}f(\bar{N}_C\cap F)$, то

$$\varphi^{-1}\varphi F=(F\cap X)\cup(F\cap\bar{N}_C)\cup f^{-1}F\cup f^{-1}f(\bar{N}_C\cap F)\cup f(\bar{N}_C\cap F)$$
$$=F\cap f^{-1}F\cup f^{-1}f(\bar{N}_C\cap F)\cup f(\bar{N}_C\cap F).$$

Уже совсем ясно, что если F замкнуто, то $\varphi^{-1}\varphi F$ — замкнуто.

И так доказано, что отображение $\varphi: cX\to X$ — сильно-замкнуто. По следствию 1 заключаем, что X уплотняется на бикомпакт.

Следствие 2. Пусть X — вполне регулярное пространство и подмножество B, содержащее X_N, является абсолютным ретрактом. Тогда X уплотняется на бикомпакт.

Доказательство очевидно.

Последние два результата обобщают следствие 1 и следствие 2 из § 3 работы [1], а также теорему 5 из работы [2]. Отметим, кроме того, что в только что упомянутой теореме требование о компактности X_N — излишно. Нам кажется, что теорема 2 и следствие 2 значительно удобнее для приложений, чем результаты из [1] и [2], которые они обобщают.

Пример. В E^{n+2} рассмотрим следующее множество:

$R=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(D^{n+1}\times\frac{1}{k}\right)\cup(S^n\times[0,1])$, где D^{n+1} — единичный шар в E^{n+1}, а S^n—его граница.

Множество R уплотняется на компакт.

Доказательство. Рассмотрим бикомпактное расширение $cR=R\cup(D^{n+1}\times 0)$. Тогда $\bar{N}_C=D^{n+1}\times 0$ и очевидным образом можно отобразить $\bar{N}_C$ на $(S^n\times[0,1])\cup(D^{n+1}\times 1)$, оставляя все точки множества $X_N=S^n\times 0$ на месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Ю. М.: Уплотнения на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и с ретракцией. Fund. Math., 63 (1968), 199—211.
2. Раухваргер, И. Л.: Об уплотнении в компакты. ДАН СССР, 66 (1949), 1, 13—15.

Постъпила на 24. II. 1970 г.

SUR LES APPLICATIONS „FORTEMENT-FÉRMÉES"

N. Hadjiivanov

(RÉSUMÉ)

Le résultat principal de cet article est le suivant:

Une application continue est fortement fermée dans le sens de U. M. Smirnov (voir [1]) si et seulement si elle est une superposition de deux applications, dont la première est continue et fermée et la deuxième est injective et fermée.

Comme corollaires on obtient certains résultats concernant les applications bijectives et contunues sur des bicompacts.