О ГОМОТОПИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Николай Г. Хаджииванов, Генчо С. Скордев

В своей работе [1] Ю. М. Смирнов дает отрицательное решение следующей проблемы П. С. Александрова: можно ли уплотнить[1] на бикомпакт линейно связное, локально линейно связное, полное метрическое пространство X со счетной базой, являющееся суммой счетного числа компактов. В связи с этим Ю. М. Смирнов ставит вопрос: можно ли в условии проблемы П. С. Александрова дополнительно потребовать, чтобы пространство X было n-связным и локально n-связным[2]. И на этот вопрос — ответ отрицателен, как показал Н. Г. Хаджииванов в одной своей работе (неопубликовано)*. В ней приходится изучать гомотопические свойства некоторых конкретных пространств.

Цель настоящей заметки — исследование гомотопических свойств пространств подобного типа. Полученные результаты будут применены в другом месте к задачам об уплотнениях.

Рассмотрим метрическое пространство K с метрикой ρ и его подмножества R и $\tilde{K}_i$,[3] $i=1, 2, \ldots$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) K_i локально-конечные конечномерные комплексы, мелкость которых μ_i стремится к нулю;

2) $\tilde{K}_i \cap \tilde{K}_j \subset R$;

3) $\tilde{K}_i \cap R = \tilde{K}_i^{(*)}$[4].

Обозначим через $[Y, Z]$ множество гомотопических классов отображений Y в Z. Если $Z_1 \subset Z_2$, имеем естественное отображение γ: $[Y, Z_1] \to [Y, Z_2]$.

Предложение 1. Пусть X бинормальное[5] пространство и $\dim X \leq n$. Тогда естественное отображение $\gamma: [X, R] \to [X, K]$ — сюръективно.

---

[1] Уплотнениями называют взаимно-однозначные непрерывные отображения „на".

[2] Относительно определения n-связности и локальной n-связности, см [2; 30].

[3] Если N симплициальный комплекс, то через $\tilde{N}$ будем обозначать его тело в топологии Уайтхеда.

[4] Через $N^{(p)}$ будем обозначать p-мерный остов комплекса N.

[5] Это значит, что $X \times [0, 1]$ — нормально.

* Замечание при корректуре. Вопросная работа уже вышла из печати в Математическом сборнике, т. 84 (126), 1 (1971), 119—140, под заглавием „О продолжении отображений в сферы и о счётных разложениях тихоновских кубов."

Предложение 2. Пусть X паракомпакт и $\dim X \leqq n-1$. Тогда естественное отображение $\gamma:[X, R]\to[X, K]$ — взаимно-однозначно.

Лемма.[1] Пусть пространство X нормально и $\dim X \leqq n$, $\tilde{N}$ — локально-конечный полиэдр, а $f: X\to\tilde{N}$ — непрерывное отображение. Тогда существует такая гомотопия $F(x, t)$, что $F(x, 0)=f(x)$, $F(x, 1) \in \tilde{N}^{(n)}$ для любого x, и $F(x, t)$ для каждого t содержится в замыкании носителя точки $F(x, 0)$[2].

Доказательство леммы. Пусть $\gamma=\{f^{-1}(Oe_i)\}$ — локально-конечное открытое покрытие пространства X, состоящее из прообразов главных звезд полиэдра $\tilde{N}$. В γ впишем локально-конечное открытое покрытие $\omega=\{U_j\}$, кратность которого не больше $n+1$[3]. Через π обозначим каноническое барицентрическое отображение пространства X в нерв $\tilde{N}_\omega$ покрытия ω. Пусть a_j — вершина полиэдра $\tilde{N}_\omega$. Существует некоторое i_j, для которого имеем $U_j\subset f^{-1}Oe_{i_j}$. Определим симплициальное отображение σ полиэдра $\tilde{N}_\omega$ в $\tilde{N}$, задавая его на вершинах: $\sigma(a_j)=e_{i_j}$. Легко построить гомотопию, которая деформирует отображения f в композицию $\sigma\pi$ и удовлетворяет требованиям леммы.[4]

Доказательство предложения 1. Предположим, что полиэдр $\tilde{K}_1$ $n+1$-мерен. Если T_μ^{n+1} — $n+1$-мерный симплекс полиэдра $\tilde{K}_1$, через t_μ^{n+1} будем обозначать его образ при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ относительно барицентра симплекса T_μ^{n+1}.[5]

Пусть $f: X\to K$ непрерывное отображение. Рассмотрим множество $\Phi=f^{-1}(\bigcup_\mu \bar{t}_\mu^{n+1})$ и применим к отображению f_Φ лемму. Получаем гомотопию $F(x, t)$: $F(x, 0)=f_\Phi$, $F(x, 1) \in \bigcup_\mu \dot{t}_\mu^{n+1}$ для любого $x \in f^{-1}(\dot{t}_\mu^{n+1})$, $F(x, t) \in \dot{t}_\mu^{n+1}$ и, кроме того выполнены неравенства

$$\rho(F(x, t'), F(x, t''))<\frac{\mu_1}{2}, \quad x \in \Phi, \ 0\leqq t', \ t''\leqq 1$$

Рассмотрим замкнутые множества

$$F=f^{-1}(K_1/\bigcup t_\mu^{n+1}) \text{ и } M=f^{-1}(\bigcup \dot{t}_\mu^{n+1})\cup f^{-1}(K_1^{(n)}).$$

На множестве M определим гомотопию $F'(x, t)$ следующим образом:

---

[1] Из предложения 1 и леммы следует теорема П. С. Александрова о существенных отображениях, см. [5].

[2] Это означает минимальный симплекс полиэдра $\tilde{N}$, содержащий точку $F(x, o)$.

[3] Существование ω следует из одной теоремы Даукера, см. [3].

[4] Для этого достаточно заметить, что $\sigma(\pi(x))$ содержится в замыкании носителя точки $f(x)$.

[5] Открытый симплекс будем обозначать через T, его замыкание — через $\bar{T}$, а его границу — через $\dot{T}$.

$$F'(x,\ t)=\begin{cases}F(x,\ t), & \text{если } x\in f^{-1}(\bigcup \dot{t}_\mu^{n+1}),\\ f(x), & \text{если } x\in f^{-1}(K_1^{(n)}).\end{cases}$$

Отметим, что $F'(x,\ t)\in K_1\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$ для любого $x\in M$. По лемме Борсука на F существует гомотопия $F''(x,\ t)$, которая является продолжением гомотопии $F'(x,\ t)$, и для любого x удовлетворяет неравенству

(1) $$\operatorname{diam}\{F''(x,\ t)\}_{t\in[0,\ 1]}\leqq\operatorname{diam}\{F'(x,\ t)\}_{t\in[0,\ 1]}.$$

Следовательно будут выполнены неравенства[1]:

$$\rho(F''(x,\ t'),\ F''(x,\ t''))<\frac{\mu_1}{2},\qquad x\in F,\qquad 0\leqq t',\qquad t''\leqq 1.$$

Отметим, что $F''(x,\ 0)=f_F$ и $F''(x,\ 1)\in K_1\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$ для любого x.

Определим гомотопию $F^{\mathrm{III}}(x,t):X\times[0,\ 1]\to K\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$ следующим образом:

$$F^{\mathrm{III}}(x,\ t)=\begin{cases}F(x,\ t) & \text{для любого } x\in\Phi,\\ F^{\mathrm{II}}(x,\ t) & \text{для любого } x\in F,\\ f(x) & \text{для любого } x\in K\setminus K_1.\end{cases}$$

Очевидно $F^{\mathrm{III}}(x,\ 0)=f(x)$, а $F^{\mathrm{III}}(x,1)\in K\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$ для каждого x.

С другой стороны существует такая гомотопия $r_\mu(y,\ t):(T_\mu^{n+1}\setminus t_\mu^{n+1})\times[0,1]\to T_\mu^{n+1}\setminus t_\mu^{n+1}$, что $r_\mu(y,0)=y$ для каждого y, $r_\mu(y,\ 1)$ — ретракция полиэдра $T_\mu^{n+1}\setminus t_\mu^{n+1}$ на свое подмножество $\dot{T}_\mu^{n+1}$. Кроме того $r_\mu(y,\ t)=r_\mu(y,\ 0)$ для каждого $y\in\dot{T}_\mu^{n+1}$ и $\rho(r_\mu(y,\ t'),\ r_\mu(y,t''))\leqq\frac{\mu_1}{2}$, $y\in T_\mu^{n+1}\setminus t_\mu^{n+1}$, $0\leqq t',\ t''\leqq 1$. С помощью r_μ легко сконструировать гомотопию

$$R(y,\ t):(L\setminus\bigcup_\mu t_\mu^{n+1})\times[0,1]\to K\setminus\bigcup_\mu t_\mu^{n+1},$$

удовлетворяющяя следующим условиям: $R(y,\ 0)=y$, $R(y,\ 1)$ ретрагирует множество $K\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$ на подмножество $(K\setminus K_1)\cup K_1^{(n)}$, $R(y,\ t)=R(y,\ 0)$ для любого $y\in(K\setminus K_1)\cup K_1^{(n)}$ и $\rho(R(y,t'),\ R(y,\ t''))\leqq\frac{\mu_1}{2}$, $y\in K\setminus\bigcup\limits_\mu t_\mu^{n+1}$, $0\leqq t',\ t''\leqq 1$.

Определим гомотопию $F^{\mathrm{IV}}(x,\ t):X\times[0,\ 1]\to K$ следующим образом:

$$F^{\mathrm{IV}}(x,\ t)=\begin{cases}F^{\mathrm{III}}(x,2t), & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2},\\ R(F^{\mathrm{III}}(x,\ 1),\ 2t-1), & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1.\end{cases}$$

---

[1] В [2; 94] лемма Борсука доказана в метрическом случае, но, конечно, в доказательстве используется только бинормальность. Хотя неравенство (1) там не содержится, оно получается из приведенного доказательства.

Легко проверяется, что $F^{IV}(x, 0)=f(x)$, $F^{IV}(x, 1)$ принадлежит $(K\setminus K_1)\cup K_1^{(\nu)}$, и если $x\in(K\setminus K_1)\cup K_1^{(\nu)}$, то $F^{IV}(x, t)=f(x)$. Кроме того

$$\rho(F^{IV}(x, t^{I}), F^{IV}(x, t^{II}))\leqq\mu_1, \quad x\in X, \quad 0\leqq t', \quad t''\leqq 1.$$

Все рассуждения проведены при условии, что полиэдр $\tilde{K}_1$—n-мерен. Однако по индукции все можно сделать и если $\tilde{K}_1$ имеет конечную размерность.

Положим $K^m=R\cup\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}\tilde{K}_i$. Мы доказали, что если $f:X\to K$ непрерывное отображение, то существует такая гомотопия $F_1(x, 1):X\times\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]\to K$, что $F_1(x, 1)=f(x)$, $F_1\left(x, \frac{1}{2}\right)\in K^2$; для любого $x\in f^{-1}(K^2)$ имеем $F_1(x, t)=f(x)$, и выполнены неравенства:

$$\rho(F_1(x, t'), F_1(x, t''))\leqq\mu_1 \quad \text{для } x\in X \text{ и } \frac{1}{2}\leqq t', \quad t''\leqq 1.$$

Продолжая индуктивно, мы построим гомотопии

$$F_m(x, t):X\times\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]\to K^m, \text{ такие что}$$

$$F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)=F_{m-1}\left(x, \frac{1}{m}\right), \quad F_m\left(x, \frac{1}{m+1}\right)\in K^{m+1}.$$

Кроме того, для любого x:$F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)\in K^{m+1}$ имеем $F_m(x, t)=F_{m-1}\left(x, \frac{1}{m}\right)$ и

$$\rho(F_m(x, t'), F_m(x, t''))\leqq\mu_m \quad \text{для } x\in X \text{ и } \frac{1}{m+1}\leqq t', \quad t''\leqq\frac{1}{m}.$$

Последовательность $\left\{F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ равномерно сходится. Действительно, пусть $x\in X$ и $f(x)\in\tilde{K}_i$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)=\begin{cases} f(x) & \text{, если } m\leqq i, \\ F_{i+1}\left(x, \frac{1}{i+1}\right), & \text{если } m\geqq i+1. \end{cases}$$

Если $\varepsilon>0$ произвольно и $\mu_m<\varepsilon$ для любого $m\geqq\nu$, то

$$\rho\left(F_m\left(x, \frac{1}{m}\right), F_{m+p}\left(x, \frac{1}{m+p}\right)\right)<\varepsilon. \tag{2}$$

Мы доказали, что последовательность $\left\{F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ равномерно сходится и следовательно $\lim\limits_{m\to\infty} F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)$ — непрерывное отображение.

Определим отображение $F(x, t): X\times[0, 1]\to K$ следующим образом

$$F(x, t)=\begin{cases} F_m(x, t) & , \text{ если } \frac{1}{m+1}\leqq t\leqq\frac{1}{m}, \\ \lim\limits_{m\to\infty} F_m\left(x, \frac{1}{m}\right), & \text{если } t=0 \end{cases}.$$

Легко убедиться, что $F(x, 0)\in R$, и очевидно имеем $F(x, 1)=f(x)$. Докажем, что отображение $F(x, t)$ непрерывно.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно и $x_0\in X$. Выберем такое ν, что $\mu_m\leqq\frac{\varepsilon}{3}$, если $m\geqq\nu$. Из (2) следует, что

$$\rho\left(F\left(x, \frac{1}{m}\right), \quad F(x, 0)\right)\leqq\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Кроме того, выберем так окрестность U точки x_0, что

$$\rho(F(x, 0), \quad F(x_0, 0))\leqq\frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

для каждого $x\in U$.

Пусть $0<t\leqq\frac{1}{\nu}$. Тогда существует такое m, что $\frac{1}{m}\leqq t\leqq\frac{1}{m+1}$ и следовательно $m\geqq\nu$, так что

$$\rho\left(F(x, t), \quad F\left(x, \frac{1}{m}\right)\right)\leqq\mu_m<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) следует $\rho(F(x, t), F(x_0, 0))<\varepsilon$ для $x\in U$ и $0\leqq t\leqq\frac{1}{\nu}$.

Таким образом непрерывность $F(x, t)$ в $(x_0, 0)$ доказана. Следовательно $F(x, t)$ непрерывно и поэтому есть гомотопия. Заметим, что $F(x, t)=F(x, 0)$ для любой точки x из $f^{-1}(R)$, т. е. F закреплена на $f^{-1}(R)$.

Окончательно мы получили, что каждое непрерывное отображение $f: X\to K$ гомотопно непрерывному отображению $f_0: X\to R$ с гомотопией, закрепленной на $f^{-1}(R)$.

Доказательство предложения 2. Пусть f и g непрерывные отображения X в пространство R и $F(x, t): X\times[0, 1]\to K$ гомотопия, деформирующяя f в g.

Обозначим через Y пространство $X\times[0, 1]$. Имеем $\dim Y\leqq\dim X+1\leqq n$ (см. [4]). Из предложения 1 следует, что существует непре-

рывное отображение $F_0: Y \to R$, гомотопное отображению $F: Y \to K$. При этом гомотопия закреплена на $A = F^{-1}(R)$. Так как $A \supset (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, имеем $F_0(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, и $F_0(x, 1) = F(x, 1) = g(x)$. Следовательно отображение f гомотопно отображению g в R.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Ю. М.: Уплотнения на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и с ретракцией. Fund. Math., 63 (1968), 199—211.
2. Borsuk, K.: Theory of retracts. Warsawa, 1967.
3. Dowker, C. H.: Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. Journ. Math., 69 (1947), 200—242.
4. Morita, K.: On the Dimension of product spaces. Amer. Jour. Math., 75 (1953), 205—223.
5. Александров, П. С.: Комбинаторная топология. Москва, 1947.

Постъпила на 24. II. 1970 г.

ON THE HOMOTOPIC PROPERTIES OF A SPACE

N. G. Hadjiivanov and G. S. Skordev

(SUMMARY)

Let K be a metric space and $K = R \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{K}_i$, where:

I. $\tilde{K}_i$ are localy finite and finite dimensional polytops with meshes tending to 0;

II. $\tilde{K}_i \cap \tilde{K}_j \subset R$, if $i \neq j$;

III. $\tilde{K}_i \cap R = \tilde{K}_i^{(n)}$, where $\tilde{K}_i^{(n)}$ is the n-skeleton of the polytop $\tilde{K}_i$:

Let $[Y, Z]$ be the set of homotopic classes of continuous maps of space Y into space Z.

The main result in this paper is:

Let X be a countably paracompact space and $\dim X \leq n$. Then the canonical mapping

$$\gamma: [X, R] \to [X, K]$$

is surjective.