НЯКОИ КИНЕМАТИЧНИ РАЗГЛЕЖДАНИЯ

Иван Чобанов и Румяна Стоянова

Настоящата работа е продължение на предишната статия [1] под същото заглавие. За простота се предполага, че всички скаларни и векторни функции са дефинирани и произволен брой пъти диференцируеми за всяка реална стойност на t.

1. Нека

$$\bar{a}_\nu = \bar{a}_\nu(t) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

са векторни функции, за които

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \,.\, \bar{a}_3 \neq 0 \tag{2}$$

за всяко t. Тогава са дефинирани функциите

$$\bar{a}_\nu^{-1} = \frac{\bar{a}_{\nu+1} \times \bar{a}_{\nu+2}}{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \,.\, \bar{a}_3} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

при

$$\bar{a}_{\nu+3} = \bar{a}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2), \tag{4}$$

като

$$\bar{a}_1^{-1} \times \bar{a}_2^{-1} \,.\, \bar{a}_3^{-1} \neq 0\,, \tag{5}$$

$$\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

за всяко t.

За произволна векторна функция

$$\bar{a} = \bar{a}(t) \tag{7}$$

са в сила тъждествата

$$\bar{a} = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\,, \tag{8}$$

$$\bar{a} = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}\,. \tag{9}$$

Всяко от тях следва от другото чрез векторно умножение на тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{3} a_\nu \times a_\nu^{-1} = 0 \tag{10}$$

с $\bar{a}$; наистина от (10) следва

$$\bar{a} \times \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu \times \bar{a}_\nu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\, a_\nu - \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a}\, a_\nu) a_\nu^{-1} = 0 \tag{11}$$

за всяко t.

При

$$p = p(t), \tag{12}$$

$$\bar{q} = \bar{q}(t) \tag{13}$$

от (8), (9), (6) следва

$$\bar{p}\,\bar{q} = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{p}\,\bar{a}_\nu)(\bar{q}\,\bar{a}_\nu^{-1}) \tag{14}$$

за всяко t.

От (12), (13), (10), (9) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\bar{p} \times \bar{a}_\nu) \times (\bar{q} \times \bar{a}_\nu^{-1}) = \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{p} \times \bar{a}_\nu \,.\, \bar{a}_\nu^{-1})\, \bar{q} \tag{15}$$

$$- \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{p} \times \bar{a}_\nu \,.\, \bar{q})\, \bar{a}_\nu^{-1} = \left(\bar{p} \,.\, \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu \times \bar{a}_\nu^{-1}\right) \bar{q}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{p} \times \bar{q} \,.\, \bar{a}_\nu)\, \bar{a}_\nu^{-1} = \bar{p} \times \bar{q}$$

за всяко t. От (15) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a} \times a_\nu) \times (\bar{a} \times \bar{a}_\nu^{-1}) = \bar{0} \tag{16}$$

за всяка функция (7) и всяко t.

От (10) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu \times \frac{d\, a_\nu^{-1}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu^{-1} \times \frac{d\, a_\nu}{dt} \tag{17}$$

за всяко t. От (17) следва, че двете дефиниции

(18) $$\omega = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu \times \frac{d\, \bar{a}_\nu^{-1}}{dt},$$

(19) $$\omega = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu^{-1} \times \frac{d\, \bar{a}_\nu}{dt}$$

са равносилни.

2. При (1)—(4) нека

(20) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

за всяко t. Тогава

(21) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu^{-1} \bar{a}_\nu^{-1}) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

за всяко t.

Известна е следната теорема:

Th. 1. Необходимо и достатъчно условие, за да притежава решение r системата векторни уравнения

(22) $$\bar{r} \times \bar{a}_\nu = \bar{b}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

където $\bar{a}_\nu$, b_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ са дадени вектори с (2), е

(23) $$\bar{a}_\mu \bar{b}_\nu + \bar{a}_\nu \bar{b}_\mu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

При (23) единственото решение $\bar{r}$ на (22) е

(24) $$r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \bar{a}_\nu^{-1} \times \bar{b}_\nu.$$

От Th 1, (18), (19), (2), (20), (5), (21) следва

(25) $$\frac{d\, \bar{a}_\nu}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{a}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

(26) $$\frac{d\, \bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{a}_\nu^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

за всяко t.

От (25), (26) следва

(27) $$\frac{d^{n+1} a_\nu}{dt^{n+1}} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{d^{n-\mu} \omega}{dt^{n-\mu}} \times \frac{d^\mu a_\nu}{dt^\mu} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d^{n+1}\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^{n+1}}=\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\frac{d^{n-\mu}\bar{\omega}}{dt^{n-\mu}}\times\frac{d^{\mu}\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^{\mu}}\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3)\tag{28}$$

за всяко t и всяко $n=1,\ 2,\ \ldots$

От (25), (26), (16) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\bar{0}\tag{29}$$

за всяко t. От (29), (17) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\frac{d^2\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\frac{d^2\bar{a}_\nu}{dt^2}\tag{30}$$

за всяко t. От (29) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\times\frac{d^2\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\times\frac{d^2\bar{a}_\nu}{dt^2}\tag{31}$$

за всяко t.

От (30) следва, че двете дефиниции

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\frac{d^2\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2},\tag{32}$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\frac{d^2\bar{a}_\nu}{dt^2}\tag{33}$$

са равносилни.

От (18), (29), (32) следва

$$\bar{\varepsilon}=\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}.\tag{34}$$

При извода на равенството (29) бе използвано условието (20) по средством (25), (26), но отнапред не е ясно доколко това условие е съществено, т. е. дали равенството (29) не е валидно и когато (20) е нарушено. Ще покажем, че (20) е съществено за (29).

Нека $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ са единичните, постоянни спрямо t вектори на десен ортогонален репер и нека

$$\bar{a}_1=\bar{i}+t\,\bar{j},\quad \bar{a}_2=\bar{j}+t\bar{k},\quad \bar{a}_3=\bar{k}+t\bar{i}.\tag{35}$$

Тогава

(36) $$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{a}_3 = 1 + t^3 .$$

За функциите (35) условието (20) е очевидно нарушено. От (35), (36) следва

(37) $$\bar{a}_1^{-1} = \frac{\bar{i} + t^2 \bar{j} - t\bar{k}}{1+t^3}, \quad \bar{a}_2^{-1} = \frac{-t\bar{i} + \bar{j} + t^2 \bar{k}}{1+t^3},$$

$$\bar{a}_3^{-1} = \frac{t^2 \bar{i} - t\bar{j} + \bar{k}}{1+t^3}.$$

От (35) следва

(38) $$\frac{d\bar{a}_1}{dt} = \bar{j}, \quad \frac{d\bar{a}_2}{dt} = \bar{k}, \quad \frac{d\bar{a}_3}{dt} = \bar{i},$$

а от (37) следва

(39) $$\frac{d\bar{a}_1^{-1}}{dt} = \frac{1}{(1+t^3)^2} [-3t^2 \bar{i} + (2t - t^4) \bar{j} + (2t^3 - 1) \bar{k}],$$

(40) $$\frac{d\bar{a}_2^{-1}}{dt} = \frac{1}{(1+t^3)^2} [(2t^3 - 1) \bar{i} - 3t^2 \bar{j} + (2t - t^4) \bar{k}],$$

(41) $$\frac{d\bar{a}_3^{-1}}{dt} = \frac{1}{(1+t^3)^2} [(2t - t^4) \bar{i} + (2t^3 - 1) \bar{j} - 3t^2 \bar{k}].$$

От (38)—(41) следва

(42) $$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\bar{a}_\nu}{dt} \times \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \frac{2t^3 + 3t^2 - 1}{(1+t^3)^2} (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \neq \bar{0} .$$

3. Естествено възниква въпросът, дали съществува векторна функция

(43) $$\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

така че аналогично на (25), (26) да са в сила тъждествата

(44) $$\frac{d^{n+1}\bar{a}_\nu}{dt^{n+1}} = \bar{\theta}_n \times a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

респ.

(45) $$\frac{d^{n+1}\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^{n+1}} = \bar{\theta}_n \times \bar{a}_\nu^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

за всяко или поне за някои $n = 1, 2, \ldots$ Отрицателен отговор на този въпрос дава Th 1. Наистина условията (23) за уравненията (44), (45) са съответно

$$(46)\qquad a_\mu \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \frac{d^{n-\lambda}\,\omega}{dt^{n-\lambda}} \times \frac{d^\lambda\, a_\nu}{dt^\lambda}$$

$$+\bar{a}_\nu \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \frac{d^{n-\lambda}\,\omega}{dt^{n-\lambda}} \times \frac{d^\lambda\, a_\mu}{dt^\lambda} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3),$$

$$(47)\qquad a_\mu^{-1} \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \frac{d^{n-\lambda}\,\omega}{dt^{n-\lambda}} \times \frac{d^\lambda\, a_\nu^{-1}}{dt^\lambda}$$

$$+a_\nu^{-1} \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \frac{d^{n-\lambda}\,\omega}{dt^{n-\lambda}} \times \frac{d^\lambda\, a_\mu^{-1}}{dt^\lambda} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3)$$

за всяко t съгласно (27), (28). В общия случай обаче равенствата (46), (47) не са необходимо верни. Това се вижда още в най-простия случай $n=1$, в който например условията (23) за (44) са

$$(48)\qquad a_\mu \frac{d^2\, a_\nu}{dt^2} + \bar{a}_\nu \frac{d^2\, a_\mu}{dt^2} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Наистина от (20) следва

$$(49)\qquad \frac{d^2}{dt^2}(\bar{a}_\mu\, a_\nu) = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Поради (49) равенствата (48) са равносилни с

$$(50)\qquad \frac{d\, a_\mu}{dt}\ \frac{d\, a_\nu}{dt} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Равенствата (50) обаче не са задължителни.

Същия отговор получава и въпросът за съществуването на функции (43) например със свойствата

$$(51)\qquad \frac{d^{n+1}\, a_\nu}{dt^{n+1}} = \bar{\theta}_n \times \frac{d^n\, a_\nu}{dt^n} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

и т. н.

4. При $n=1$ от (27), (28) следва

$$(52)\qquad \frac{d^2\, a_\nu}{dt^2} = \frac{d\,\omega}{dt} \times \bar{a}_\nu + \omega \times \frac{d\, a_\nu}{dt} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

$$(53)\qquad \frac{d^2 a_\nu^{-1}}{dt^2} = \frac{d\,\omega}{dt} \times a_\nu^{-1} + \omega \times \frac{d\, a_\nu^{-1}}{dt} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

за всяко t.

От (7)—(9), (25), (26) следва

$$(54)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\frac{d\,a_\nu^{-1}}{dt}=\omega\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}$$

$$=\omega\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})a_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,a_\nu^{-1})\frac{d\,a_\nu}{dt}$$

за всяко t.

От (12), (13), (17), (54) следва

$$(55)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu)\times\left(\bar{q}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{a}_\nu\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)q$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu\,.\,\bar{q})\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\left(\bar{p}\,.\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\frac{d\,a_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\bar{a}_\nu)\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\left(\bar{p}\,.\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\bar{q}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1}\,.\,\bar{q})\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1})\times\left(\bar{q}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)$$

за всяко t.

От (12), (13), (29), (25), (26), (9) следва

$$(56)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\times\left(\bar{q}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{q}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\cdot\bar{q}\right)\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\left(\bar{p}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{q}\cdot\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu)\,\bar{\omega}\times a_\nu^{-1}$$

$$=\omega\times\sum_{\nu=1}^{3}[(p\times q)\times\omega\,.\,\bar{a}_\nu]\,a_\nu^{-1}=\omega\times[(p\times q)\times\omega]$$

за всяко t. От (56) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\frac{d\,a_\nu}{dt}\right)\times\left(\bar{a}\times\frac{d\,a_\nu^{-1}}{dt}\right)=0 \tag{57}$$

за всяка функция (7) и всяко t.

От (52), (53), (16), (55), (57) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^2a_\nu}{dt^2}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=0 \tag{58}$$

за всяко t. От (30), (31) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^3}=\sum_{\nu=1}^{3}a_\nu^{-1}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu}{dt^3} \tag{59}$$

за всяко t. От (31), (58) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^3}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu}{dt^3} \tag{60}$$

за всяко t. От (58) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^3}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu}{dt^3} \tag{61}$$

за всяко t.

5. При $n=2$ от (27), (28) следва

$$\frac{d^3\,\bar{a}_\nu}{dt^3}=\frac{d^2\,\bar{\omega}}{dt^2}\times\bar{a}_\nu+2\,\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}+\bar{\omega}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}, \tag{62}$$

$$\frac{d^3\,a_\nu^{-1}}{dt^3}=\frac{d^2\,\omega}{dt^2}\times\bar{a}_\nu^{-1}+2\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}+\bar{\omega}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2} \tag{63}$$

($\nu=1,\ 2,\ 3$) за всяко t.

От (7), (52), (53), (8), (9), (54) следва

$$(64)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\frac{d^2\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\frac{d\,\omega}{dt}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}$$

$$+\bar{\omega}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$+\omega\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\frac{d\,a_\nu}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\frac{d^2\,a_\nu}{dt^2}$$

за всяко t.

От (12), (13), (30), (**64**) следва

$$(65)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu)\times\left(\bar{q}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{a}_\nu\,.\,\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)q$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu\,.\,\bar{q})\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\left(\bar{p}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\frac{d^2\,a_\nu^{-1}}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\bar{a}_\nu)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\left(\bar{p}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1}\,.\,\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1}\,.\,\bar{q})\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{p}\times\bar{a}_\nu^{-1})\times\left(\bar{q}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)$$

за всяко t.

От (7), (**25**), (26), (52), (53), (8), (9), (**54**) следва

$$(66)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu)\left(\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{\omega}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)$$

$$=\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{\omega}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu)\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}$$

$$=\frac{d\,\bar{\omega}}{dt}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu+\bar{\omega}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,.\,\omega\times\bar{a}_\nu^{-1})\left(\frac{d\,\omega}{dt}\times\bar{a}_\nu+\omega\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}$$

за всяко t.

От (12), (13), (31), (66) следва

$$(67)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\times\left(\bar{q}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\cdot\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\cdot\bar{q}\right)\frac{d^2\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\left(\bar{p}\,.\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}=\left(\bar{p}\,.\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)\bar{q}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\bar{q}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\cdot\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt}\right)\bar{q}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\cdot\bar{q}\right)\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{p}\times\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\times\left(\bar{q}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)$$

за всяко t.

От (7), (58) следва

$$(68)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\frac{d^2\bar{a}_\nu}{dt^2}\right)\times\left(\bar{a}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\cdot\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)a$$

$$=\left(\bar{a}\,.\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^2\,\bar{a}_\nu}{dt^2}\times\frac{d^2\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^2}\right)\bar{a}=\bar{0}$$

за всяко t.

От (62), (63), (16), (55), (57), (65), (67), (68) следва

$$(69)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^3\,\bar{a}_\nu}{dt^3}\times\frac{d^3\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt^3}=0$$

за всяко t.

6. Получените индуктивно в предните точки равенства (10), (17), (29)—(31), (58)—(61), (69) естествено навеждат на мисълта, че са верни равенствата

$$(70)\qquad \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^m \bar{a}_\nu}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^n} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^m \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu}{dt^n}$$

за всички m, $n = 0, 1, 2, \ldots$, които при $m = n$ стават

$$(71)\qquad \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^n \bar{a}_\nu}{dt^n} \quad \frac{d^n \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^n} = 0.$$

Цитираните равенства доказват верността на предположението (70), респ. (71), в случаите m, $n = 0, 1, 2, 3$.

Директното доказване на равенствата (70) в общия случай на неотрицателни целочислени стойности на m и n, след като убеждението във верността им е породено по посочения индуктивен начин, в същност не представлява никаква техническа трудност. Има все пак една тънкост: това са условни тъждества, верни само в случая (20), както изрично и преднамерено бе показано в т. 2 — da liegt der Hund begraben.

Действително от (9) следва

$$(72)\qquad a_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \bar{a}_\mu^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Поради (20) от (72) следва

$$(73)\qquad \frac{d^m \bar{a}_\nu}{dt^m} = \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \frac{d^m \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^m} \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

От (73) следва

$$(74)\qquad \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^m \bar{a}_\nu}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^n} = \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \frac{d^m \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^n}$$

Поради (20) от (72) следва още

$$(75)\qquad \frac{d^n \bar{a}_\nu}{dt^n} = \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \frac{d^n \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^n} \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

От (75) следва

$$(76)\qquad \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^m \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu}{dt^n} = \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \frac{d^m \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^n}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu) \frac{d^m \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^n}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} (\bar{a}_\nu \bar{a}_\mu) \frac{d^m \bar{a}_\mu^{-1}}{dt^m} \times \frac{d^n \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^n}.$$

От (74), (76) следва (70).

7. При (1), (2), (7) нека по дефиниция

$$(77)\qquad \frac{\delta \bar{a}}{\delta t} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d}{dt} (\bar{a} \bar{a}_\nu^{-1}) \bar{a}_\nu.$$

Функцията $\frac{\delta \bar{a}}{\delta t}$ се нарича *локална производна* на функцията (7) спрямо репера (1) за разлика от функцията $\frac{d\bar{a}}{dt}$, която се нарича *абсолютна производна* на функцията (7). Връзката

$$(78)\qquad \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\delta \bar{a}}{\delta t} + \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{a} \bar{a}_\nu^{-1}) \frac{d \bar{a}_\nu}{dt}$$

между абсолютната и локалната производна спрямо репера (1) на функцията (7) може при (20) да се представи във вида

$$(79)\qquad \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\delta \bar{a}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{a}$$

поради (25) и (8).

От (79) следва

$$(80)\qquad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\delta \bar{\omega}}{\delta t}.$$

Обратно, равенството

$$(81)\qquad \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\delta \bar{a}}{\delta t}$$

на абсолютната и локалната производна на една функция (7) е равносилно при (20) с

(82) $$\bar{a}\times\bar{\omega}=\bar{0},$$

т. е. с

(83) $$\bar{\omega}=\bar{0}$$

или с

(84) $$\bar{\omega}\neq\bar{0},\quad \bar{a}=\lambda\bar{\omega},$$

където

(85) $$\lambda=\lambda(t)$$

е подходяща диференцируема скаларна функция. И така, ако даден репер (1) има свойството (20), абсолютната производна на дадена векторна функция съвпада с локалната ѝ производна спрямо (1) или когато движението му е транслационно, или когато функцията е колинеарна с моменталната му ъглова скорост.

От (9), (26) следва

(86) $$\frac{d\bar{a}}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{\omega}\times\bar{a}.$$

От (79), (86) следва

(87) $$\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}.$$

За произволна скаларна функция (85) и произволен репер (1) по дефиниция

(88) $$\frac{\delta\lambda}{\delta t}=\frac{d\lambda}{dt}.$$

8. Ако (7) и

(89) $$\bar{b}=\bar{b}(t)$$

са произволни диференцируеми векторни функции, а (85) е произволна диференцируема скаларна функция, то

(90) $$\frac{\delta(\bar{a}+\bar{b})}{\delta t}=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}+\frac{\delta\bar{b}}{\delta t},$$

(91) $$\frac{\delta(\lambda\bar{a})}{\delta t}=\frac{\delta\lambda}{\delta t}\bar{a}+\lambda\frac{\delta\bar{a}}{\delta t},$$

(92) $$\frac{\delta(\bar{a}\,\bar{b})}{\delta t}=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\bar{b}+\bar{a}\frac{\delta\bar{b}}{\delta t},$$

(93) $$\frac{\delta(\bar{a}\times\bar{b})}{\delta t}=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{\delta\bar{b}}{\delta t}.$$

Наистина от (79), (88) следва

(94) $$\frac{\delta(\bar{a}+\bar{b})}{\delta t}=\frac{d(\bar{a}+\bar{b})}{dt}-\omega\times(\bar{a}+\bar{b})=\left(\frac{d\bar{a}}{dt}-\omega\times\bar{a}\right)$$

$$+\left(\frac{d\bar{b}}{dt}-\bar{\omega}\times\bar{b}\right)=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}+\frac{\delta\bar{b}}{\delta t},$$

(95) $$\frac{\delta(\lambda\bar{a})}{\delta t}=\frac{d(\lambda\bar{a})}{dt}-\omega\times(\lambda a)=\frac{d\lambda}{dt}a+\lambda\frac{d\bar{a}}{dt}$$

$$-\omega\times(\lambda a)=\frac{\delta\lambda}{\delta t}a+\lambda\left(\frac{da}{dt}-\omega\times a\right)=\frac{\delta\lambda}{\delta t}\bar{a}+\lambda\frac{\delta a}{\delta t},$$

(96) $$\frac{\delta(\bar{a}\bar{b})}{\delta t}=\frac{d(\bar{a}\bar{b})}{dt}=\frac{da}{dt}\bar{b}+\bar{a}\frac{d\bar{b}}{dt}=\left(\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}+\bar{\omega}\times\bar{a}\right)\bar{b}$$

$$+\bar{a}\left(\frac{\delta\bar{b}}{\delta t}+\bar{\omega}\times\bar{b}\right)=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\bar{b}+\bar{a}\frac{\delta\bar{b}}{\delta t},$$

(97) $$\frac{\delta(\bar{a}\times\bar{b})}{\delta t}=\frac{d(\bar{a}\times\bar{b})}{dt}-\bar{\omega}\times(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$-(\bar{\omega}\times\bar{a})\times\bar{b}-\bar{a}\times(\bar{\omega}\times\bar{b})=\left(\frac{d\bar{a}}{dt}-\bar{\omega}\times\bar{a}\right)\times\bar{b}$$

$$+\bar{a}\times\left(\frac{d\bar{b}}{dt}-\bar{\omega}\times\bar{b}\right)=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{\delta\bar{b}}{\delta t}$$

поради

(98) $$\bar{\omega}\times(\bar{a}\times\bar{b})=(\bar{\omega}\times\bar{a})\times\bar{b}+\bar{a}\times(\bar{\omega}\times\bar{b}).$$

9. В същност тъждествата (90)—(93) могат да се изведат и директно въз основа на дефиницията (77) на локална производна на векторна функция и на уславянето (88) за локална производна на скаларна функция. Действително от (77) следва

(99) $$\frac{\delta(\bar{a}+\bar{b})}{\delta t}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}[(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\left[\left(\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{d\bar{b}}{dt}\right)\bar{a}_\nu^{-1}\right]\bar{a}_\nu+\sum_{\nu=1}^{3}\left[(\bar{a}+\bar{b})\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right]\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu+\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{b}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}+\frac{\delta\bar{b}}{\delta t};$$

от (77), (88), (8) следва

$$(100)\qquad \frac{\delta(\lambda\bar{a})}{\delta t}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\lambda\,\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\frac{d\lambda}{dt}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$+\lambda\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\frac{\delta\lambda}{\delta t}\bar{a}+\lambda\frac{\delta\bar{a}}{\delta t};$$

от (88), (8), (77) следва

$$(101)\qquad \frac{\delta(\bar{a}\,\bar{b})}{\delta t}=\frac{d(\bar{a}\bar{b})}{dt}=\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{b}+\bar{a}\frac{d\bar{b}}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu\,\bar{b}$$

$$+\bar{a}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\,\bar{b}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}_\nu\bar{b})+\bar{a}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{b}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\bar{b}+\bar{a}\frac{\delta\bar{b}}{\delta t}$$

поради

$$(102)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}_\nu\bar{b})+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu^{-1})(\bar{a}_\nu\bar{b})+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}\,.\,\omega\times a_\nu^{-1})(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})(\bar{a}_\nu\bar{b})+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)$$

$$=\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{b}+\bar{a}\,.\,\bar{b}\times\bar{w}=0$$

съгласно (26), (14); от (77) следва

$$(103)\qquad \frac{\delta(\bar{a}\times\bar{b})}{\delta t}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}\cdot\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{a}\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b}$$

$$+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{b}\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}(\bar{b}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\frac{\delta\bar{a}}{\delta t}\times\bar{b}+\bar{a}\times\frac{\delta\bar{b}}{\delta t}$$

поради

$$(104)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}.\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu=\frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b}\,,$$

$$(105)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}\cdot\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu=\bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}=\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

съгласно (10) и

$$(106)\qquad \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{\omega}=(\bar{a}\times\bar{\omega})\times\bar{b}+\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{\omega})$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}\times\bar{\omega}\,.\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}\,.\,\bar{\omega}\times\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b}+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

съгласно (26), (8), (98).

10. Изводите (99)—(101) със (102) и (103) със (104)—(106) са несъмнено по-тромави, отколкото съответните им изводи (94)—(97) с (98), но позволяват да се уясни едно важно обстоятелство. От (99), (100) се вижда, че тъждествата (90), (91) са валидни не само за „абсолютно твърд" или „нееластичен" репер (1) — чиито вектори удовлетворяват условията (20), а и за „еластичен" репер (1) — за който изобщо

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,\bar{a}_\nu)\neq 0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3). \tag{107}$$

Наистина при изводите (99), (100) се прилага само дефиницията (77) на локална производна на векторна функция спрямо даден репер (1), която остава смислена и при (107) вместо (20), както и уславянето (88) за локална производна на скаларна функция, което също е независимо от (20). При изводите (94), (95) на същите формули (90), (91) се използва моменталната ъглова скорост $\bar{\omega}$ на репера (1), която съществува само в случая (20) в смисъл, че само при (20) са изобщо валидни равенствата (25), (26). Що се отнася до (101), (103), там моменталната ъглова скорост $\bar{\omega}$ не е избягната; нещо повече, може да се покаже, че използването ѝ е съществено за тези изводи. С други думи, равенствата (92), (93) изобщо не са верни при еластичен репер (1), (107), докато равенствата (90), (91) са верни и за такъв репер.

Наистина от (101) следва, че равенството (92) би било вярно, ако е вярно равенството

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\cdot\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}_\nu\,\bar{b})+\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}\,\bar{a}_\nu)=0, \tag{108}$$

а от (103) — че равенството (93) би било вярно, ако е вярно равенството

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\bar{b}\,\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b} \tag{109}$$

$$+\bar{a}\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu.$$

При еластичен репер (1), (107) обаче равенствата (108), (109) изобщо не са верни: съществуват функции (7), (89), за които (108), (109) не са в сила.

За да покажем това, нека

$$(110)\qquad \begin{cases} \bar{a}_1 = t\,\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \\ \bar{a}_2 = \bar{i} + t\,\bar{j} + \bar{k}, \\ \bar{a}_3 = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{k}, \end{cases}$$

при същите предположения за векторите $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, както в т. 2. Репер-ът (110) е очевидно еластичен. Нека освен това

$$(111)\qquad \bar{a} = \bar{i},\ \bar{b} = \bar{j}.$$

За величините (110), (111) ще покажем, че те не удовлетворяват (108), (109).

От (110) следва

$$(112)\qquad \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 = (t-1)(t^2+t-2).$$

Нека

$$(113)\qquad \Delta = t^2 + t - 2.$$

От (110) следва

$$(114)\qquad \begin{cases} \bar{a}_1^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\left[(t+1)\,\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}\right], \\ \bar{a}_2^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\left[-\bar{i} + (t+1)\,\bar{j} - \bar{k}\right], \\ \bar{a}_3^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\left[-\bar{i} - \bar{j} + (t+1)\,\bar{k}\right]. \end{cases}$$

От (113), (114) следва

$$(115)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar{a}_1^{-1}}{dt} = \dfrac{1}{\Delta^2}\left[-(t^2+2t+3)\,\bar{i} + (2t+1)(\bar{j}+\bar{k})\right], \\ \dfrac{d\bar{a}_2^{-1}}{dt} = \dfrac{1}{\Delta^2}\left[(2t+1)(\bar{i}+\bar{k}) - (t^2+2t+3)\,\bar{j}\right], \\ \dfrac{d\bar{a}_3^{-1}}{dt} = \dfrac{1}{\Delta^2}\left[(2t+1)(\bar{i}+\bar{j}) - (t^2+2t+3)\,\bar{k}\right]. \end{cases}$$

От (110), (111) следва

$$(116)\qquad \bar{a}\,\bar{a}_1 = t, \qquad \bar{a}\,\bar{a}_2 = 1, \qquad \bar{a}\,\bar{a}_3 = 1;$$

(117) $$\bar{b}\,\bar{a}_1 = 1, \quad \bar{b}\,\bar{a}_2 = t, \quad \bar{b}\,\bar{a}_3 = 1.$$

От (111), (115) следва

(118) $$\bar{a}\frac{d\bar{a}_1^{-1}}{dt} = -\frac{t^2+2t+3}{\Delta^2}, \quad \bar{a}\frac{d\bar{a}_2^{-1}}{dt} = \bar{a}\frac{d\bar{a}_3^{-1}}{dt} = \frac{2t+1}{\Delta^2};$$

(119) $$\bar{b}\frac{d\bar{a}_1^{-1}}{dt} = \bar{b}\frac{d\bar{a}_3^{-1}}{dt} = \frac{2t+1}{\Delta^2}, \quad \bar{b}\frac{d\bar{a}_2^{-1}}{dt} = -\frac{t^2+2t+3}{\Delta^2}.$$

От (116)—(119) следва

(120) $$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}_\nu\,\bar{b}) = \frac{1}{\Delta},$$

(121) $$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)(\bar{a}\,\bar{a}_\nu) = \frac{1}{\Delta}.$$

От (120), (121) следва, че равенството (108) не е в сила.

От (111) следва

(122) $$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{k}.$$

От (122), (115) следва

(123) $$\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_1^{-1}}{dt} = \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_2^{-1}}{dt} = \frac{2t+1}{\Delta^2}, \quad \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\frac{d\,\bar{a}_3^{-1}}{dt}$$
$$= -\frac{t^2+2t+3}{\Delta^2}.$$

От (110), (111) следва

(124) $$\bar{a}_1\times\bar{b} = -\bar{i}+t\bar{k}, \quad \bar{a}_2\times\bar{b} = -\bar{i}+\bar{k},$$
$$\bar{a}_3\times\bar{b} = t\bar{i}+\bar{k};$$

(125) $$\bar{a}\times\bar{a}_1 = -\bar{j}+\bar{k}, \quad \bar{a}\times\bar{a}_2 = -\bar{j}+t\bar{k},$$
$$\bar{a}\times\bar{a}_3 = -t\bar{j}+\bar{k}.$$

От (110), (123)—(125), (118), (119) следва

(126) $$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\times\bar{b}\,\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu = \frac{1}{\Delta}\left[\bar{i}+\bar{j}-(t+1)\bar{k}\right],$$

(127) $$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{b} = \frac{1}{\Delta}\left[-\bar{i}-(t+1)\bar{k}\right].$$

(128) $$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{b}\frac{d\,\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}\times\bar{a}_\nu=\frac{1}{\Delta}[-\bar{j}-(t+1)\bar{k}].$$

От (126)—(128) следва, че равенството (109) не е в сила.

11. Ако функцията (7) е произволен брой пъти диференцируема, по дефиниция

(129) $$\frac{\delta^n\bar{a}}{\delta t^n}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d^n}{dt^n}(\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu \qquad (n=1,2,\ \ldots).$$

От (129) следва

(130) $$\frac{\delta^{n+1}\bar{a}}{\delta t^{n+1}}=\frac{\delta}{\delta t}\frac{\delta^n\bar{a}}{\delta t^n} \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Ако функциите (7), (85), (89) са произволен брой пъти диференцируеми и ако по дефиниция

(131) $$\frac{\delta^n\lambda}{\delta t^n}=\frac{d^n\lambda}{dt^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

(132) $$\frac{\delta^0\bar{a}}{\delta t^0}=\bar{a},$$

от (130) и (94)—(97) следват индуктивно тъждествата

(133) $$\frac{\delta^n(\bar{a}+\bar{b})}{\delta t^n}=\frac{\delta^n\bar{a}}{\delta t^n}+\frac{\delta^n\bar{b}}{\delta t^n},$$

(134) $$\frac{\delta^n(\lambda\bar{a})}{\delta t^n}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\delta^{n-\nu}\lambda}{\delta t^{n-\nu}}\frac{\delta^\nu\bar{a}}{\delta t^\nu},$$

(135) $$\frac{\delta^n(\bar{a}\,\bar{b})}{\delta t^n}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\delta^{n-\nu}\bar{a}}{\delta t^{n-\nu}}\frac{\delta^\nu\bar{b}}{\delta t^\nu},$$

(136) $$\frac{\delta^n(\bar{a}\times\bar{b})}{\delta t^n}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\delta^{n-\nu}\bar{a}}{\delta t^{n-\nu}}\times\frac{\delta^\nu\bar{b}}{\delta t^\nu}$$

за всяко $n=1,\ 2,\ldots$ Тъждествата (134)—(136) са „формули на Leibniz“ за трите вида умножение, дефинирани в тримерното векторно пространство.

От (129), (6), (21) следва

(137) $$\frac{\delta^n\bar{a}_\nu}{\delta t^n}=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3;\ n=1,\ 2,\ldots),$$

(138) $$\frac{\delta^n \bar{a}_\nu^{-1}}{\delta t^n} = \bar{0} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3;\ n = 1,\ 2, \ldots).$$

12. От (8) следва

(139) $$\frac{d^n \bar{a}}{dt^n} = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^{n-\mu}}{dt^{n-\mu}} (\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1}) \frac{d^\mu \bar{a}_\nu}{dt^\mu}$$

($n = 1,\ 2, \ldots$). От (139), (129), (25), (52), (62) следва

(140) $$\frac{d^n \bar{a}}{dt^n} = \frac{\delta^n \bar{a}}{\delta t^n} + n\bar{\omega} \times \frac{\delta^{n-1} \bar{a}}{\delta t^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \left[\bar{\varepsilon} \times \frac{\delta^{n-2} \bar{a}}{\delta t^{n-2}} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \frac{\delta^{n-2} \bar{a}}{\delta t^{n-2}} \right) \right]$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left\{ \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \times \frac{\delta^{n-3} \bar{a}}{\delta t^{n-3}} + 2\varepsilon \times \left(\bar{\omega} \times \frac{\delta^{n-3} \bar{a}}{\delta t^{n-3}} \right) \right.$$

$$\left. + \bar{\omega} \times \left[\bar{\varepsilon} \times \frac{\delta^{n-3} \bar{a}}{\delta t^{n-3}} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \frac{\delta^{n-3} \bar{a}}{\delta t^{n-3}} \right) \right] \right\}$$

$$+ \sum_{\mu=4}^{n} \binom{n}{\mu} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d^{n-\mu}}{dt^{n-\mu}} (\bar{a}\,\bar{a}_\nu^{-1}) \frac{d^\mu \bar{a}_\nu}{dt^\mu}$$

($n = 3,\ 4, \ldots$). По-специално в случаите $n = 2,\ 3$ тъждеството (140) приема вида

(141) $$\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} = \frac{\delta^2 \bar{a}}{\delta t^2} + 2\bar{\omega} \times \frac{\delta \bar{a}}{\delta t} + \bar{\varepsilon} \times \bar{a} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{a}),$$

(142) $$\frac{d^3 \bar{a}}{dt^3} = \frac{\delta^3 \bar{a}}{\delta t^3} + 3\bar{\omega} \times \frac{\delta^2 \bar{a}}{\delta t^2} + 3\bar{\varepsilon} \times \frac{\delta \bar{a}}{\delta t}$$

$$+ 3\bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \frac{\delta \bar{a}}{\delta t} \right) + \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \times \bar{a} + 2\bar{\varepsilon} \times (\bar{\omega} \times \bar{a})$$

$$+ \bar{\omega} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{a}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{a})].$$

От (141), (80), (34) при $\bar{a} = \bar{\omega}$ следва

(143) $$\frac{d^2 \bar{\omega}}{dt^2} = \frac{\delta^2 \bar{\omega}}{\delta t^2} + \bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}.$$

От (143) следва, че

(144) $$\frac{d^2\overline{\omega}}{dt^2}=\frac{\delta^2\overline{\omega}}{\delta t^2}$$

точно при

(145) $$\overline{\omega}\times\overline{\varepsilon}=\overline{0}.$$

Нека по дефиниция

(146) $$\overline{\omega}_1=\overline{\omega}\times\overline{a},$$

(147) $$\overline{\omega}_{n+1}=\overline{\omega}\times\overline{\omega}_n \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

От (146), (147) следва

(148) $$\overline{\omega}\,\overline{\omega}_n=0 \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

От (147), (148) следва

(149) $$\overline{\omega}_{n+2}=\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{\omega}_n)=-\omega^2\overline{\omega}_n \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

От (149), (146), (147) следва

(150) $$\overline{\omega}_{2n+1}=(-1)^n\,\omega^{2n}\,\overline{\omega}\times\overline{a} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

(151) $$\overline{\omega}_{2n+2}=(-1)^n\,\omega^{2n}\,\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{a}) \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

13. Нека S означава съвкупността на всички наредени двойки

(152) $$\alpha=\{\overline{a},\ [\overline{a}_\nu]_{\nu=1}^3\}$$

от векторни функции (7) и твърди репери $[\overline{a}_\nu]_{\nu=1}^3$ — тройки векторни функции (1) с (2), (20). Ако

(153) $$r=\overline{r}(t)$$

е произволна векторна функция, а

(154) $$\alpha\in S,$$

ще пишем

(155) $$\overline{r}\in\alpha$$

точно когато

(156) $$\frac{\delta}{\delta t}(\overline{r}-\overline{a})=\overline{0},$$

където

(157) $$\frac{\delta}{\delta t}(r-a)=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}[(\overline{r}-\overline{a})\,\overline{a}_\nu^{-1}]\,a_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{d}{dt}[(\overline{r}-\overline{a})\,\overline{a}_\nu]\,\overline{a}_\nu^{-1}$$

съгласно (77), (87) е локалната производна на $\bar{r}-\bar{a}$ спрямо репера

$$[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{3}.$$

От (157), (2), (5) следва, че равенството (156) е равносилно с

(158) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3)$$

и с

(159) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

От дефиницията на (155) и от (6), (21) следва непосредствено, че

(160) $$\bar{a}\in\alpha,$$

(161) $$\bar{a}_\nu+\bar{a}\in\alpha \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3),$$

(162) $$\bar{a}_\nu^{-1}+\bar{a}\in\alpha \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

При

(163) $$\beta=\{\bar{b},\ [\bar{b}_\nu]_{\nu=1}^{3}\}$$

нека

(164) $$\beta\in S.$$

Ще казваме, че двойката (152) е еквивалентна на двойката (163) и ще пишем

(165) $$\alpha\sim\beta$$

точно когато

(166) $$\bar{a}\in\beta,$$

(167) $$\bar{a}_\nu+\bar{a}\in\beta \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

Съгласно дефиницията (156) на релацията (155) и равносилните на (156) равенства (158), (159) дефиционните за (165) условия (166), (167) са равносилни с

(168) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3),$$

(169) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}_\mu+\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3),$$

респ. с

(170) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3),$$

(171) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}_\mu+\bar{a}-b)\,b_\nu^{-1}]=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

Поради (168), (170) условията (169), (171) са равносилни съответно на

(172) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu)=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

(173) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1})=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

И така релацията (165) е в сила точно при (168), (172), респ. (169), (173).

При дефиницията (166), (167) на релацията (165) ще покажем, че тя е релация на еквивалентност в S.

Верността на релацията

(174) $$\alpha\sim\alpha$$

е непосредствено следствие от (166), (167) и (160), (161).

Нека е в сила (165). От (173), (168) и

(175) $$\bar{a}_\mu=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1})\,\bar{b}_\nu \qquad (\mu=1,\ 2,\ 3)$$

следва

(176) $$\frac{d}{dt}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{a}_\mu]=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1})[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu]=0$$

($\mu=1,\ 2,\ 3$). На (176) даваме вида

(177) $$\frac{d}{dt}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

Равенствата (177), (172) обаче са равносилни с

(178) $$\beta\sim\alpha.$$

При

(179) $$\gamma=\{\bar{c},\ [\bar{c}_\nu]_{\nu=1}^{3}\}$$

нека

(180) $$\gamma\in S$$

и нека е в сила (166) и

(181) $$\beta\sim\gamma.$$

Тогава са в сила равенствата (168), (170), (172), (173) и

(182) $$\frac{d}{dt}(\bar{b}_\mu\,\bar{c}_\nu)=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3),$$

Съгласно доказаното по-горе от (181) следва

(183) $$\gamma \sim \beta.$$

От (183) следва

(184) $$\frac{d}{dt}[(\bar{c}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

От

(185) $$\bar{a}-\bar{c}=\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{a}-\bar{c})\,\bar{b}_\nu^{-1}]\,\bar{b}_\nu$$

следва

(186) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}-\bar{c})\,\bar{c}_\mu]=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}](\bar{b}_\nu\,\bar{c}_\mu)$$

$$+\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{b}-\bar{c})\,\bar{b}_\nu^{-1}](\bar{b}_\nu\,\bar{c}_\mu) \qquad (\mu=1,\ 2,\ 3).$$

От (186), (170), (184), (182) следва

(187) $$\frac{d}{dt}[(\bar{a}-\bar{c})\,\bar{c}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

От (175) следва

(188) $$\bar{a}_\mu\,\bar{c}_\nu=\sum_{\lambda=1}^{3}(\bar{a}_\mu\bar{b}_\lambda^{-1})(\bar{b}_\lambda\,\bar{c}_\nu) \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

От (188), (173), (182) следва

(189) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,\bar{c}_\nu)=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

Равенствата (187), (189) обаче са равносилни с

(190) $$\alpha \sim \gamma.$$

Сега ще покажем, че от (155), (165) следва

(191) $$\bar{r} \in \beta.$$

Действително (155) е равносилно със (158), а от (165) следва (178), което е равносилно със (177) и

(192) $$\frac{d}{dt}(\bar{b}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1})=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

От

(193) $$b_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} (b_\mu a_\nu^{-1}) a_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

следва

(194) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r} - \bar{b}) \bar{b}_\mu] = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{b}_\mu \bar{a}_\nu^{-1}) [(\bar{r} - \bar{a}) \bar{a}_\nu]$$

$$- \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{3} (\bar{b}_\mu a_\nu^{-1}) [(a - \bar{b}) a_\nu] \qquad (\mu = 1, 2, 3).$$

От (194), (192), (158), (177) следва

(195) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r} - \bar{b}) \bar{b}_\nu] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Равенството (195) обаче е равносилно със (191).

14. Нека K означава множеството на всички класове на еквивалентност в S, породени от релацията $\sim$ на еквивалентност в S, дефинирана в предната точка. Тогава е естествено всеки елемент на K да се нарече *кинематично твърдо тяло.* Така бяхме постъпили в предишната си работа [2]. Тук обаче ще предпочетем един друг подход, който е изложен общо в работата ни [3].

Нека R и Σ са две първични съвкупности, които удовлетворяват следните аксиоми:

Ах 1. $R \subset S \times \Sigma$.

Ах 2. От $\sigma \in \Sigma$ следва: съществува $s \in S$ с $(s, \sigma) \in R$.

Ах 3. От $(s_\nu, \sigma) \in R$ $(\nu = 1, 2)$ следва: $s_1 \sim s_2$.

Ах 4. От $s \in S$ следва: съществува $\sigma \in \Sigma$ с $(s, \sigma) \in R$.

Ах 5. От $(s_\nu, \sigma_\nu) \in R$ $(\nu = 1, 2)$, $s_1 \sim s_2$ следва: $\sigma_1 = \sigma_2$.

В Ах 1 с $S \times \Sigma$ е означено Descartes'овото произведение на S и Σ.

В работата [3] е доказано, че системата аксиоми Ах 1 — Ах 5 е съвместима и категорична.

Всеки елемент на множеството Σ се нарича *кинематично твърдо тяло.*

Ако $\sigma \in \Sigma$, а $(s, \sigma) \in R$ съгласно Ах 2, s се нарича *координатна система* на σ (неизменно свързана със σ).

Ако $\sigma \in \Sigma$, $(s, \sigma) \in R$ съгласно Ах 2, а $\bar{r} \in s$ при (153), $\bar{r}$ се нарича *точка* на σ. От дефиницията (156) на релацията (155) следва, че множеството на всички точки на кинематично твърдото тяло σ, за което $(\alpha, \sigma) \in R$ при (152), е съвкупността на всички функции (153), за които е в сила

(196) $$\bar{r} = \bar{a} + \sum_{\nu=1}^{3} [(\bar{r} - \bar{a}) \bar{a}_\nu^{-1}] \bar{a}_\nu$$

със (159), респ. (158).

От (196), (159) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{a}}{dt}+\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{r}-\bar{a})\bar{a}_\nu^{-1}]\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}, \tag{197}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d^2\bar{a}}{dt^2}+\sum_{\nu=1}^{3}[(\bar{r}-\bar{a})\bar{a}_\nu^{-1}]\frac{d^2\bar{a}_\nu}{dt^2}. \tag{198}$$

Левите страни на равенствата (197), (198) се наричат съответно *скорост* и *ускорение* на точката (196) на кинематично твърдото тяло σ.

15. При (152), (154), (163), (164) нека е в сила (165). Тогава от Ах 4, Ах 5 следва: съществува единствен $\sigma \in \Sigma$ с $(\alpha, \sigma) \in R$, $(\beta, \sigma) \in R$. Ще покажем, че

$$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}\bar{b}_\nu^{-1}\times\frac{d\bar{b}_\nu}{dt}. \tag{199}$$

Наистина от (165) следва (173) и (178), т. е. (192). От

$$b_\nu=\sum_{\mu=1}^{3}(\bar{b}_\nu a_\mu^{-1})a_\mu \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3), \tag{200}$$

$$\bar{b}_\nu^{-1}=\sum_{\lambda=1}^{3}(\bar{b}_\nu^{-1}\bar{a}_\lambda)\bar{a}_\lambda^{-1} \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3) \tag{201}$$

следва

$$\frac{d\bar{b}_\nu}{dt}=\sum_{\mu=1}^{3}(\bar{b}_\nu\bar{a}_\mu^{-1})\frac{d\bar{a}_\mu}{dt} \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3) \tag{202}$$

съгласно (192) и

$$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{b}_\nu^{-1}\times\frac{d\bar{b}_\nu}{dt}=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\lambda\bar{b}_\nu^{-1})(\bar{a}_\mu^{-1}\bar{b}_\nu)\bar{a}_\lambda^{-1}\times\frac{d\bar{a}_\mu}{dt}. \tag{203}$$

От (203), (14), (6) следва

$$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{b}_\nu^{-1}\times\frac{d\bar{b}_\nu}{dt}=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}(\bar{a}_\lambda\bar{a}_\mu^{-1})\bar{a}_\lambda^{-1}+\frac{d\bar{a}_\mu}{dt} \tag{204}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\bar{a}_\lambda^{-1}\times\frac{d\bar{a}_\lambda}{dt},$$

т. е. (199).

Поради (199) е целесъобразно при (19) векторът $\overline{w}$ да се нарича *моментална ъглова скорост* на кинематично твърдото тяло σ, а векторът $\overline{\varepsilon}$ с (34), дефиниран с (32) или (33) — *моментално ъглово ускорение* на σ.

От (197), (25) следва

$$\frac{d\overline{r}}{dt}=\frac{d\overline{a}}{dt}+\overline{\omega}\times(\overline{r}-\overline{a}), \tag{205}$$

а от (198), (52) следва

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\frac{d^2\overline{a}}{dt^2}+\overline{\varepsilon}\times(\overline{r}-\overline{a})+\overline{\omega}\times[\overline{\omega}\times(\overline{r}-\overline{a})]. \tag{206}$$

16. Ако

$$\overline{v}=\overline{v}(t), \tag{207}$$

$$\overline{w}=\overline{w}(t) \tag{208}$$

са дадени функции на времето t, естествено се налага въпросът за намирането на онези точки (153) на кинематично твърдото тяло, които имат скорост и ускорение съответно (207) и (208). При

$$\overline{\rho}=\overline{r}-\overline{a}, \tag{209}$$

$$\overline{v}_a=\frac{d\overline{a}}{dt}, \tag{210}$$

$$\overline{w}_a=\frac{d^2\overline{a}}{dt^2} \tag{211}$$

от (205), (206) следва, че този въпрос се свежда до решаването съответно на векторните уравнения

$$\overline{\omega}\times\overline{\rho}=\overline{v}-\overline{v}_a, \tag{212}$$

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{\rho}+\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{\rho})=\overline{w}-\overline{w}_a \tag{213}$$

спрямо $\overline{\rho}$.

Уравнението (212) е тривиално: при

$$\overline{\omega}=\overline{0} \tag{214}$$

равенството (212) има смисъл само при

$$\overline{v}=\overline{v}_a; \tag{215}$$

при (214), (215) уравнението (212) е удоволетворено от всеки вектор $\overline{\rho}$, т. е. съгласно (209) скоростта на всяка точка от тялото е равна на (210). При

(216) $$\bar{\omega} \neq \bar{0}$$

равенството (212) има смисъл само при

(217) $$\omega . (v - \bar{v}_a) = 0;$$

при (216), (217) уравнението (212) представя права през точката

(218) $$\bar{\rho}_0 = \frac{\bar{\omega} \times (\bar{v} - \bar{v}_a)}{\omega^2},$$

а геометричното място на $\bar{r}$ съгласно (209), (218) е права през точката

(219) $$\bar{r}_0 = \bar{a} + \frac{\bar{\omega} \times (\bar{v} - \bar{v}_a)}{\omega^2}.$$

Що се отнася до уравнението (213), като се изключи тривиалният случай

(220) $$\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = \bar{0},$$

то е частен случай на по-общото уравнение

(221) $$\bar{\rho} \times \bar{a} + (\bar{\rho} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{d},$$

където $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ са дадени, а $\bar{\rho}$ е неизвестен вектор, като

(222) $$(a^2 + b^2) c \neq 0.$$

В случая (220) равенството (213) има смисъл само при

(223) $$\bar{w} = \bar{w}_a;$$

при (220), (223) уравнението (213) е удовлетворено от всеки вектор $\bar{\rho}$, т. е. съгласно (209) ускорението на всяка точка от тялото е равно на (211).

За уравнението (211) са възможни случаите

(224) $$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0},$$

(225) $$\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{0}.$$

В случая (224) съгласно (222) са възможни подслучаите

(226) $$\bar{a} = \bar{0}, \ \bar{b} \neq \bar{0};$$

(227) $$\bar{a} \neq \bar{0}, \ \bar{b} = \bar{0};$$

(228) $$ab \neq 0.$$

При

(229) $$\bar{c}\,\bar{d} \neq 0$$

случаят (226) е невъзможен. При

(230) $$\bar{c}\,\bar{d}=0$$

в случая (226) следва да се реши уравнението

(231) $$(\bar{\rho}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{d}$$

при

(232) $$\bar{b}\neq\bar{0},$$

(233) $$\bar{c}\neq\bar{0}.$$

При

(234) $$\bar{\sigma}=\bar{\rho}\times\bar{b}$$

уравнението (231) приема вида

(235) $$\bar{\sigma}\times\bar{c}=d.$$

Поради (233), (230) уравнението (235) има смисъл и решенията му са

(236) $$\bar{\sigma}=\lambda\bar{c}+\frac{c\times\bar{d}}{c^2}$$

с произволно реално λ. От (234), (236) следва

(237) $$\bar{\rho}\times\bar{b}=\lambda\bar{c}+\frac{\bar{c}\times\bar{d}}{c^2}.$$

Поради (232) уравнението (237) има смисъл точно при

(238) $$\lambda\bar{b}\bar{c}+\frac{\bar{b}\times\bar{c}\,.\,\bar{d}}{c^2}=0.$$

При

(239) $$\bar{b}\bar{c}=0$$

условието (238) става

(240) $$\bar{b}\times\bar{c}\,.\,\bar{d}=0.$$

Поради (239) от (231) следва

(241) $$\bar{b}\times\bar{d}=0,$$

което замества условието (240). От (241), (232) следва

(242) $$\bar{d}=\frac{\bar{b}\bar{d}}{b^2}\bar{b}.$$

От (239), (242), (232) следва, че в случая (239), (241) уравнението (231) е равносилно с

(243) $$\bar{\rho}\,\bar{c}=\frac{\bar{b}\,\bar{d}}{b^2}$$

при (233). При

(244) $$\bar{b}\,\bar{c}\neq 0$$

от (238) следва

(245) $$\lambda=\frac{\bar{b}\times\bar{d}\,.\,\bar{c}}{c^2(\bar{b}\,\bar{c})}.$$

Тогава решенията на уравнението (237) са

(246) $$\bar{\rho}=\mu\,\bar{b}+\frac{\bar{b}}{b^2c^2}\times\left(\frac{\bar{b}\times\bar{d}\,.\,\bar{c}}{\bar{b}\,\bar{c}}\,\bar{c}+\bar{c}\times\bar{d}\right)$$

при произволно реално μ.

Случаят (227) е тривиален.

В случая (228) от (224) следва

(247) $$\bar{a}=\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{b^2}\,\bar{b}=\alpha\,\bar{b}\qquad(\alpha\neq 0)$$

и при (234) уравнението (231) става

(248) $$\alpha\,\bar{\sigma}+\bar{\sigma}\times\bar{c}=\bar{d}.$$

Поради (228), (247) от уравнението (248) се получава последователно

(249) $$\bar{c}\times\bar{\sigma}=\alpha\,\bar{\sigma}-\bar{d},$$

(250) $$\alpha\,\bar{c}\,\bar{\sigma}=\bar{c}\,\bar{d},$$

(251) $$\alpha\,\bar{c}\times\bar{\sigma}+c^2\bar{\sigma}-(\bar{c}\,\bar{\sigma})\,\bar{c}=\bar{c}\times\bar{d},$$

(252) $$\alpha(\alpha\bar{\sigma}-\bar{d})+c^2\bar{\sigma}=\bar{c}\times\bar{d}+\frac{\bar{c}\,\bar{d}}{\alpha}\,\bar{c},$$

(253) $$\bar{\sigma}=\frac{1}{\alpha^2+c^2}\left(\bar{c}\times\bar{d}+\alpha\,\bar{d}+\frac{\bar{c}\,\bar{d}}{\alpha}\,\bar{c}\right).$$

И така, ако уравнението (248) има решение при $\alpha\neq 0$, то е единствено, а именно (253). Непосредствено се проверява, че (253) наистина е решение на (248). От (253), (234) следва

(254) $$\bar{\rho}\times\bar{b}=\frac{1}{\alpha^2+c^2}\left(\bar{c}\times\bar{d}+\alpha\,\bar{d}+\frac{\bar{c}\,\bar{d}}{\alpha}\,\bar{c}\right).$$

Уравнението (254) спрямо $\bar{\rho}$ има решение точно при

(255) $$\bar{b}\times\bar{c}\,.\,\bar{d}+\alpha\,\bar{b}\,\bar{d}+\frac{1}{\alpha}(\bar{b}\,\bar{c})(\bar{c}\,\bar{d})=0\,.$$

Поради (247) условието (255) става

(256) $$\bar{b}\times\bar{c}\,.\,\bar{d}+\frac{(\bar{a}\,\bar{b})\,(\bar{b}\,\bar{d})}{b^2}+\frac{b^2}{\bar{a}\,\bar{b}}(\bar{b}\,\bar{c})(\bar{c}\,\bar{d})=0\,.$$

При (256) решенията на уравнението (254) са

(257) $$\bar{\rho}=\nu\,\bar{b}+\frac{1}{(\alpha^2+c^2)\,b^2}\left[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})+\alpha\,\bar{b}\times\bar{d}+\frac{\bar{c}\,\bar{d}}{\alpha}\,\bar{b}\times\bar{c}\right]$$

при произволно реално ν.

В случая (225) всеки вектор се разлага еднозначно по векторите $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$. Нека $\bar{\rho}$ е решение на уравнението (221) и нека

(258) $$\bar{\rho}=\alpha\,\bar{a}+\beta\,\bar{b}+\gamma\,\bar{a}\times\bar{b}\,.$$

Ако

(259) $$\bar{d}=\lambda\,\bar{a}+\mu\,\bar{b}+\nu\,\bar{a}\times\bar{b}\,,$$

то

(260) $$\lambda=\frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d}\times\bar{b}}{(\bar{a}\times\bar{b})^2},\quad \mu=\frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{d}}{(\bar{a}\times\bar{b})^2},\quad \nu=\frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d}}{(\bar{a}\times\bar{b})^2}\,.$$

От (221), (258) следва

(261) $$\beta\,\bar{b}\times\bar{a}+\gamma\,(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{a}+[\alpha\,\bar{a}\times\bar{b}+\gamma(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{b}]\times\bar{c}=\bar{d}\,.$$

От (259), (261) следва

(262) $$(\alpha\,\bar{b}\,\bar{c}+\gamma\,\bar{a}\,\bar{b}+\lambda)\,\bar{a}-(\alpha\,\bar{a}\,\bar{c}+\gamma\,a^2+\gamma\,\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c}-\mu)\,\bar{b}$$
$$+(\beta+\gamma\,\bar{b}\times\bar{c}+\nu)\,\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\,.$$

От (262), (225) следва

(263) $$\alpha\,\bar{b}\,\bar{c}+\gamma\,\bar{a}\,\bar{b}=-\lambda\,,$$

(264) $$\alpha\,\bar{a}\,\bar{c}+\gamma\,(a^2+\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c})=\mu\,,$$

(265) $$\beta+\gamma\,\bar{b}\,\bar{c}=-\nu\,.$$

Детерминантата Δ на системата уравнения (263), (264) с неизвестни α, γ е

(266) $$\Delta=(a^2+\bar{a}|\times\bar{b}\,.\,\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{c})-(\bar{a}\,\bar{c})(\bar{a}\,\bar{b})$$
$$=(\bar{a}+\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{c}\,.$$

В случая

(267) $$\Delta \neq 0$$

от (263), (264), (260) следва

(268) $$\alpha = \frac{1}{\Delta(\bar{a}\times\bar{b})^2}\begin{vmatrix} \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{b}\times\bar{d} & \bar{a}\,\bar{b} \\ \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{d} & a^2+\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c} \end{vmatrix},$$

(269) $$\gamma = \frac{1}{\Delta(\bar{a}\times\bar{b})^2}\begin{vmatrix} \bar{b}\,\bar{c} & \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{b}\times\bar{d} \\ \bar{a}\,\bar{c} & \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{d} \end{vmatrix}.$$

От (265), (260), (269) следва

(270) $$\beta = \frac{-1}{(\bar{a}\times\bar{b})^2}\left(\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d} + \frac{\bar{b}\,\bar{c}}{\Delta}\begin{vmatrix} \bar{b}\,\bar{c} & \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{b}\times\bar{d} \\ \bar{a}\,\bar{c} & \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{d} \end{vmatrix}\right).$$

Непосредствено се проверява, че векторът $\bar{\rho}$, дефиниран с (258) при (268)—(270) и (266), в случая (267) е решение на уравнението (221).

В случая

(271) $$\Delta = 0$$

условието

(272) $$\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{b}\times\bar{d} = 0, \qquad \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{a}\times\bar{d} = 0$$

е необходимо, за да има решение α, γ-системата уравнения (263), (264) съгласно (260). При (272) уравненията (263), (264) стават

(273) $$\alpha\,\bar{b}\,\bar{c} + \gamma\,\bar{a}\,\bar{b} = 0,$$

(274) $$\alpha\,\bar{a}\,\bar{c} + \gamma(a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c}) = 0.$$

В случая

(275) $$\bar{b}\,\bar{c} \neq 0$$

от (273) следва

(276) $$\alpha = -\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{\bar{b}\,\bar{c}}\gamma.$$

От (274), (276) следва

(277) $$\left(-\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{\bar{b}\,\bar{c}}\bar{a}\,\bar{c} + a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c}\right)\gamma = \frac{\Delta}{\bar{b}\,\bar{c}}\gamma = 0,$$

т. е. стойността (276) на α удовлетворява уравнението (274) за произволна стойност на γ. От (265), (260) следва

(278) $$\beta = -\frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d}}{(\bar{a}\times\bar{b})^2} - (\bar{b}\,\bar{c})\gamma.$$

От (258), (276), (278) следва

$$\bar{\rho} = -\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{b}\bar{c}}\gamma a - \left[\frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d}}{(\bar{a}\times\bar{b})^2} + (\bar{b}\bar{c})\gamma\right] + \gamma a\times b\,. \tag{279}$$

Непосредствено се проверява, че векторът ρ, дефиниран с (279), е решение на уравнението (221) при произволна стойност на γ в случаите (225), (271), (272), (275).

В случая

$$\bar{b}\bar{c} = 0 \tag{280}$$

разглеждаме подслучаите

$$\bar{a}\bar{c} \neq 0\,, \tag{281}$$

$$\bar{a}\bar{c} = 0\,. \tag{282}$$

При (280), (281) от (266), (271) следва

$$\bar{a}\bar{b} = 0\,. \tag{283}$$

От (280), (283) следва, че уравнението (273) е удовлетворено за произволни стойности на α и γ. От (274) следва

$$\alpha = -\frac{a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c}}{\bar{a}\bar{c}}\gamma\,. \tag{284}$$

От (258), (284), (278), (280) следва

$$\bar{\rho} = \frac{a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,c}{\bar{a}\bar{c}}\gamma a - \frac{\bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{d}}{(\bar{a}\times b)^2}\bar{b} + \gamma\bar{a}\times b\,. \tag{285}$$

Непосредствено се проверява, че векторът ρ, дефиниран с (285), е решение на уравнението (221) при произволна стойност на γ в случаите (225), (271), (272), (280), (281).

При (280), (282) уравненията (273), (274) стават съответно

$$(\bar{a}\bar{b})\gamma = 0\,, \tag{286}$$

$$(a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c})\gamma = 0\,. \tag{287}$$

При

$$(\bar{a}\bar{b})^2 + (a^2 + \bar{a}\times\bar{b}\,.\,\bar{c})^2 \neq 0\,, \tag{288}$$

уравненията (286), (287) са удовлетворени точно при

$$\gamma = 0\,. \tag{289}$$

От (258), (278), (280), (289) следва

$$\bar{\rho} = \alpha \bar{a} - \frac{\bar{a} \times \bar{b} \,.\, \bar{d}}{(\bar{a} \times \bar{b})^2} \bar{b}. \tag{290}$$

Непосредствено се проверява, че векторът $\bar{\rho}$, дефиниран с (290), е решение на уравнението (221) при произволна стойност на α в случаите (225), (271), (272), (280), (282), (288).

При

$$\bar{a}\,\bar{b} = 0\,, \quad a^2 + \bar{a} \times \bar{b} \,.\, \bar{c} = 0 \tag{291}$$

уравненията (286), (287) са удовлетворени за произволна стойност на γ. От (258), (278), (280) следва

$$\rho = \alpha \bar{a} - \frac{\bar{a} \times \bar{b} \,.\, d}{(\bar{a} \times \bar{b})^2} \bar{b} + \gamma \bar{a} \times \bar{b}\,. \tag{292}$$

Непосредствено се проверява, че векторът $\bar{\rho}$, дефиниран с (292), е решение на уравнението (221) при произволни стойности на α и γ в случаите (225), (271), (272), (280), (282), (291).

Може да се постави и въпросът за онези точки (153) на кинематично твърдото тяло, за които са зададени отнапред стойностите на

$$\frac{d^n \bar{r}}{dt^n} \qquad (n = 3,\ 4, \ldots), \tag{293}$$

но на този въпрос тук не ще се спираме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанов, Ив., Стоянова, Р.: Някои кинематични разглеждания. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/68), 39—70.
2. Паскалев, Г., Чобанов, Ив.: Върху понятието „кинематично твърдо тяло". I. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 54 (1959/60), кн. 1 (мат.), 173—230.
3. Чобанов, Ив.: Моделно-аксиоматизационна схема. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/68), 157—159.

Постъпила на 25. IX. 1970 г.

KINEMATISCHE BETRACHTUNGEN

I. Tschobanow und R. Stojanowa

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit, die eine Fortsetzung von [1] ist, wird eine axiomatische Definition des Begriffes „kinematischfester Körper" im dreidimensionalen Euklidischen Raum mit Hilfe des Axiomensystems

Ax 1 — Ax 5 aus § 14 gegeben. Zu diesem Zweck wird die Menge S aller geordeneten Paare (152) von Vektorfunktionen (7) und festen Reperen (1) mit (2), (20) betrachtet, in welcher eine Äquivalenzrelation (165) mit Hilfe von (166), (167) definiert wird. Es wird das modell-axiomatisierende Schema [3] angewendet. Die weitere Entwicklung der dreidimensionalen Kinematik wird an Hand des Beispiels der momentanen Winkelgeschwindigkeit (18) illustriert, deren Invarianz in bezug auf die Elemente von S durch (199) bewiesen wird. Die Grundidentitäten (70) werden für alle ganzen nichtnegativen m und n bewiesen. Es werden die fundamentalen Relationen für die Lokalableitung (77), definiert in bezug auf S, gefunden. Zuletzt, um die verschiedenen Fälle zu untersuchen, in welchen die momentane Winkelbeschleunigung (32) vorgeschriebene Werte nach (213) annimmt, wird eine vollständige Untersuchung der allgemeineren Vektorgleichung (221) unternommen, wo $\bar{\rho}$ ein unbekannter und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ beliebige Vektoren sind.