ПРОДОЛЖЕНИЕ БЛИЗОСТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В СФЕРЫ

Николай Г. Хаджииванов

Как известно (см. [1]), пространством близости или, коротко, δ-пространством называется всякое такое множество P, для любых двух подмножеств которого определено отношение близости $A\delta B$ (читается „A близко к B"), удовлетворяющее следующим аксиомам:

Б 1 (симметрия): если $A\delta B$, то $B\delta A$;

Б 2 (аддитивность): $A\delta(B\cup C)$ тогда и только тогда, когда $A\delta B$ или $A\delta C$;

Б 3 (тождество): если $x\in P$, то $x\delta x$;

Б 4 (формализм): $P\bar{\delta}\varnothing$, где $\bar{\delta}$ — отрицание отношения δ;

Б 5 (отделимость множеств): если $A\bar{\delta}B$, то существуют такие два множества C и D, что $P=C\cup D$, $A\bar{\delta}D$ и $B\bar{\delta}C$.

Отображение $f:P\to P'$, где P и P' — пространства близости, называется близостным или, коротко, δ-отображением, если оно близкие множества переводит в близкие.

Всякое отношение близости δ порождает следующим образом топологию: множество A считаем замкнутым, если оно содержит все близкие к себе точки. Пространство P, взятое с этой топологией, будет T_1-пространством тогда и только тогда, когда выполнена дополнительно аксиома

Б 3′ (отделимость точек): если $x\delta y$, то $x=y$.

Всякое близостное отображение — непрерывно. Любые два не близкие множества A и B отделимы близостной ограниченной функцией в следующем смысле: если в отрезке $[0, 1]$ назовём близкими те и только те множества, замыкания которых пересекаются, то существует δ-функция $f:P\to[0, 1]$, для которой $f(A)=0$, а $f(B)=1$. Всякое пространство близости, удовлетворяющее аксиоме Б 3′, имеет вполне регулярную топологию.

Каждая топология (конечно вполне регулярная) может, вообще говоря, порождаться многими отношениями близости. Но каждая бикомпактная топология множества P порождается всего лишь одним отношением близости. Это отношение следующее: $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$ (черта означает замыкание в данной бикомпактной топологии).

Для пространств близости Ю. М. Смирнов ввёл понятие размерности (см. [2]):

Близостная размерность или, короче, δ-размерность δ-пространства P есть наименьшее из всех целых чисел n, для каждого из которых всякое δ-отображение любого подмножества A пространства P в n-мерную сферу S^n можно продолжить в δ-отображение всего P в S^n.

Следуя Смирнову (см. [2]), будем говорить, что множество C δ-разделяет множества A и B пространства P, если дополнение $P \setminus C$ можно представить в виде суммы двух далёких множеств A' и B', первое из которых является δ-окрестностью* множества A, а второе — δ-окрестностью множества B; иногда будем говорить, что C есть δ-перегородка между A и B. В [2] Ю. М. Смирнов отмечает, что желание ввести в δ-пространствах индуктивную δ-размерность не приводит ни к чему хорошему. Однако, мы покажем, что только что определённую δ-размерность можно охарактеризировать при помощи δ-перегородок.

Теорема 1. δ-размерность δdP пространства близости P не превышает n тогда и только тогда, когда ко всякой системе из $(n+1)$-ой пары далёких множеств (A_{+i}, A_{-i}), $i=1, 2, \ldots, n+1$, можно подобрать δ-перегородки C_i между A_{+i} и A_{-i} с пустым пересечением: $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

Из теоремы I легко получается и характеристика δ-размерности произвольного подмножества M пространства P через δ-перегородки во всём пространстве P.

Теорема 2. δ-размерность δdM подмножества M пространства близости P не превышает n тогда и только тогда, когда ко всякой системе из $(n+1)$-ой пары далёких множеств пространства P (A_{+i}, A_{-i}), $i=1, 2, \ldots, n+1$, можно подобрать в P δ-перегородки C_i между A_{+i} и A_{-i}, пересечение которых не имеет общих точек с M: $M \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

Теорему I мы получим как следствие из следующего предложения:

Теорема 3. δ-отображение $f_0: A \to S^n$ подмножества A пространства близости P** в n-мерную сферу S^n продолжается на всё пространство P тогда и только тогда, когда существуют δ-перегородки C_i между $A_{+i} = f_0^{-1} S^n_{+i}$*** и $A_{-i} = f_0^{-1} S^n_{-i}$ с пустым пересечением: $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

---

* Говорят, что A' является δ-окрестностью множества A или, что A' сильно содержит множество A, если $A \bar{\delta} P \setminus A'$ и записывают это так: $A \ll A'$.

** Так как задано отношение близости δ на множестве P, тем самым оно задано и на любом подмножестве A этого множества P. В этом смысле A само является пространством близости, так что есть смысл говорить о δ-отображении $f_0: A \to S^n$. На S^n, конечно, берём единственную близость, согласующуюся с топологией.

*** Сферу S^n рассматриваем как границу $(n+1)$-мерного куба $[-1, 1]^{n+1}$, лежащего в E^{n+1}, и грани этой сферы обозначаем так: $S^n_{\varepsilon i} = \{x \in [-1, 1]^{n+1} / x_i = \varepsilon\}$, где x_j — координаты точки x, а $\varepsilon = \pm 1$.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобилось доказать и использовать один близостный аналог теореме Борсука о продолжении гомотопии. Чтобы сформулировать его, мы сначала припомним определение произведении пространства близости:

Если (P_1, δ_1) и (P_2, δ_2) δ-пространства, то самая слабая близость* δ из всех близостей на декартовом произведении $P_1 \times P_2 = P$, относительно которых обе проекции δ-непрерывны, называют **близостным произведением** или, короче, δ-произведением δ-пространств P_1 и P_2. Известно, что если $M \subset P$ и $N \subset P$, то $M \bar{\delta} N$ тогда и только тогда, когда существуют такие разложения $M = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$ и $N = \bigcup_{j=1}^{n} N_j$, что для любой пары (M_i, N_j) найдётся индекс $k = k(i, j)$ ($k = 1$ или $k = 2$), для которого $\pi_k M_i \bar{\delta}_k \pi_k N_j$, где через π_k обозначена проекция произведении P на множитель P_k.

Пусть f и g — δ-отображения δ-пространства P в δ-пространство P'. Будем говорить, что f и g **близостно гомотопны** или, короче, δ-гомотопны и будем писать $f \delta g$, если существует δ-отображение $F(x, t): P \times [0, 1] \to P'$ δ-произведения $P \times [0, 1]$ в P', для которого $F(x, 0) = f(x)$ и $F(x, 1) = g(x)$ для любого $x \in P$.

Будем говорить, что δ-пространство P' является **абсолютным окрестностным δ-экстензором**, если для всякого δ-пространства P любое δ-отображение $f_0: A \to P'$ произвольного подмножества A пространства P в пространство P' продолжается в δ-отображение $f: OA \to P'$ некоторой δ-окрестности OA множества A.

Теорема 4. Пусть A подмножество δ-пространства P, а f_0 и g_0 два δ-гомотопные δ-отображения множества A в абсолютный окрестностный δ-экстензор P'. Тогда, если существует δ-отображение $f: P \to P'$, продолжающее отображение f_0, то существует также δ-отображение $g: P \to P'$, продолжающее отображение g_0 и δ-гомотопное отображению f.

Применением теоремы 2 и теоремы 3 получим следующий результат:

Теорема 5. Пусть P — пространство близости, M — подмножество δ-размерности $\delta d M \leq n-1$ и любое замкнутое подмножество F пространства P, такое что $F \cap M = \emptyset$, есть бикомпакт. Тогда, если P_i суть подмножества пространства P, для которых $P = M \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$, $P_i \cap P_j \subset M$ для любых различных i и j и, наконец, множества $P_i \setminus M$ — замкнуты в $P \setminus M$, то всякое δ-отображение каждого из множеств P_i в n-мерную сферу S^n продолжается в δ-отображение всего пространства P в сферу S^n.

Пусть Φ — семейство всех δ-функций f на δ-пространстве P со значениями в отрезке $I_f = [0, 1]$. Через π_f обозначим проекцию $\pi_f: \Pi\{I_f\}$

* Говорят, что близость δ на множестве P **слабее** близости δ' на этом самом множестве и пишут $\delta' > \delta$, если $A \delta' B$ влечёт $A \delta B$.

$f \in \Phi\} \to I_f$. Определим так называемое отображение вычисления φ пространства P в произведение $\Pi\{I_f / f \in \Phi\}$ следующим образом: $\pi_f(\varphi(x)) = f(x)$.

Отображение φ является близостным гомеоморфизмом пространства P на подпространство φP произведения $\Pi\{I_f / f \in \Phi\}$; в дальнейшем будем отождествлять P с φP.

Бикомпакт $\delta P = \overline{\varphi P}$ называют* бикомпактным δ-расширением пространства P.

Лемма I. (см. [4]). Непрерывное отображение $f: P \to K$, где K — бикомпакт, продолжается в непрерывное отображение $\tilde{f}: \delta P \to K$ тогда и только тогда, когда оно есть δ-отображение.

Другое доказательство этой леммы можно получить почти точно так, как в [5] на стр. 207, где доказывается теорема СТОУНА-ЧЕХА.

Из этой леммы следует, что если пространство близости P — всюду плотное δ-подпространство бикомпакта B, то $\delta P = B$. Кроме того следует, что $\delta d P = \dim \delta P$.

Лемма 2. δ-пространство P' является абсолютным окрестностным δ-экстензором тогда и только тогда, когда P' есть бикомпакт, являющийся абсолютным окрестностным ретрактом в классе бикомпактов.

Мы опускаем доказательство этой леммы, так как она несложно следует из предшествующей. Отметим только, что в доказательстве будет иметь значение очевидный факт, что любое непрерывное отображение бикомпакта B в пространство близости P является δ-отображением.

Лемма 3. Если (P_1, δ_1) и (P_2, δ_2) — пространства близости, а (P, δ) — их близостное произведение, то $\delta P = \delta_1 P_1 \times \delta_2 P_2$.

В связи с доказательством отметим следующее: в бикомпакте $\delta_1 P_1 \times \delta_2 P_2$ существует только одна близость Δ, согласующаяся с топологией; нам нужно доказать, что $\delta = \Delta$ на P, а это сразу следует из характеристики близости произведения при помощи конечных разложений, о которой мы упомянули после определения произведения пространств близости.

Уже легко можно доказать следующее предложение:

Лемма 4. Если f и g δ-отображения пространства близости P в бикомпакт K, то они δ-гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны их непрерывные продолжения $\tilde{f}, \tilde{g}: \delta P \to K$.

Теперь уже теорема 4 следует совсем легко из теоремы БОРСУКА о продолжении гомотопии (см. [6]).

Докажем теорему 3. Пусть C_i — δ-перегородки между A_{+i} и A_{-i} и $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$. Очевидно существуют множества C'_i, удовлетворяющие условиям:

* См. [3], где то же самое расширение δP построено методом δ-центрированных систем.

$$C_i \ll C'_i,\ C'_i \cap (A_{+i} \cup A_{-i}) = \varnothing,\ \bigcap_{i=1}^{n+1} C'_i = \varnothing.$$

Так как C_i — δ-перегородка между A_{+i} и A_{-i}, то $P \setminus C_i = A'_{+i} \cup A'_{-i}$, где $A'_{+i}\ \bar{\delta}\ A'_{-i}$, $A_{+i} \ll A'_{+i}$ и $A_{-i} \ll A'_{-i}$.

Возьмём δ-функцию $\varkappa_i : P \to [0, 1]$, для которой $\varkappa_i(C_i) = 0$ и $\varkappa_i(P \setminus C_i') = 1$ и положим

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \varkappa_i(x), \text{ если } x \in C_i \cup A'_{+i}, \\ -\varkappa_i(x), \text{ если } x \in C_i \cup A'_{-i}. \end{cases}$$

$\psi_i : P \to [-1, 1]$ есть δ-функция. Отметим, что если $|\psi_i(x)| < 1$, то $x \in C_i'$. Последнее утверждение очевидно, а первое следует из следующей тривиальной леммы:

Лемма 5. Если $P = P_1 \cup P_2$ и $P \setminus P_2\ \bar{\delta}\ P \setminus P_1$, то отображение $\varphi : P \to P'$ является δ-отображением пространства близости P в пространство близости P' тогда и только тогда, когда $\varphi|_{P_1} : P_1 \to P'$ и $\varphi|_{P_2} : P_2 \to P'$ суть δ-отображения.

Продолжаем доказательство теоремы 3. Отображение вычисления $\psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{n+1} : P \to [-1, 1]^{n+1}$ очевидно является δ-отображением. Имеем $\psi(P) \cap (-1, 1)^{n+1} = \varnothing$. Действительно, если $\psi(P) \cap (-1, 1)^{n+1} \neq \varnothing$, то существует точка $x \in P$, для которой $|\psi_i(x)| < 1$ для любого i и следовательно $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i'$, что является противоречием. И так ψ отображает пространство P в S^n. Кроме того, легко проверяется, что отображение $\varphi/_A$ δ-гомотопно отображению f_0. Действительно, если $x \in A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (A_{+i} \cup A_{-i})$, то например $x \in A_{+i}$ и следовательно $\psi_i(x) = 1$, т. е. $\psi(x) \in S^n_{+i}$. В то же время и $f_0(x) \in S^n_{+i}$. И так мы получаем, что для любого $x \in A$ точки $\varphi(x_0)$ и $f_0(x_0)$ содержатся в одной и той же грани сферы S^n, а это влечёт δ-гомотопность отображений f_0 и $\varphi/_A$. Остаётся, под конец, применить теорему 4 и мы сможем утверждать, что f_0 продолжается в δ-отображение всего пространства P в S^n. Этим теорема по существу доказана, так как вторая её часть тривиальна.

Доказательство теоремы I пропустим, так как она следует легко из только что доказанной теоремы.

Докажем теорему 2. Пусть $M \subset P$ и $\delta d M \leqq n$. Дана система из $(n+1)$-ой пары далёких множеств A_{+i} и A_{-i} пространства P. Возьмём множества N_{+i} и N_{-i}, подчинённые условиям: $N_{+i} \gg A_{+i}$, $N_{-i} \gg A_{-i}$ и $N_{+i}\ \bar{\delta}\ N_{-i}$. Множества $M_{+i} = M \cap N_{+i}$ и $M_{-i} = M \cap N_{-i}$ далеки и так как $\delta d M \leqq n$, то существуют в M δ-перегородки C_i' между M_{+i} и M_{-i} с пустым пересечением: $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i' = \varnothing$. Имеем $M \setminus C_i' = P_{+i} \cup P_{-i}$, где $P_{+i}\ \bar{\delta}\ P_{-i}$, $P_{+i} \gg M_{+i}$ и $P_{-i} \gg M_{-i}$. Положим $D_{+i} = A_{+i} \cup P_{+i}$ и $D_{-i} = A_{-i} \cup P_{-i}$. Очевидно $D_{+i}\ \bar{\delta}\ D_{-i}$ и следовательно существуют

множества U_{+i} и U_{-i}, такие что $U_{+i} \gg D_{+i}$, $U_{-i} \gg D_{-i}$ и $U_{+i} \bar{\delta} U_{-i}$. Множества $C_i = P \setminus (U_{+i} \cup U_{-i})$ являются искомыми δ-перегородками между A_{+i} и A_{-i}, пересечение которых не имеет общих точек с M.

Замечание. В формулировках всех предшествующих результатов, там где идёт речь о δ-перегородках, можно считать, что все δ-перегородки — замкнуты. Например, в только что законченном доказательстве, перегородки C_i можно считать замкнутыми, так как множества U_{+i} и U_{-i} могут быть выбраны открытыми; дело в том, что из $D \ll U$ следует $D \ll \operatorname{Int} U$.

Доказательство теоремы 5. Пусть $f_0 : P_0 \to S^n$ — δ-отображение. По теореме 2 существуют такие замкнутые δ-перегородки C_i между $A_{+i} = f_0^{-1} S^n_{+i}$ и $A_{-i} = f_0^{-1} S^n_{-i}$, $i = 2, 3, \ldots, n+1$, что $M \cap C = \emptyset$, где $C = \bigcap_{i=2}^{n+1} C_i$. Докажем, что $C = C_+ \cup C_-$, где C_+ и C_- — замкнутые и непересекающиеся множества. Из теоремы СЕРПИНСКОГО (см. [7]) о неразложимости континуумов в счётное объединение непересекающихся замкнутых подмножеств, отличных от всего континуума, несложно следует, что никакая компонента связности бикомпакта C не пересекает одновременно $A_{+1} = f_0^{-1} S^n_{+1}$ и $A_{-1} = f_0^{-1} S^n_{-1}$. Отсюда уже искомое разбиение бикомпакта C получить нетрудно. Так как C_+ и C_- — бикомпакты, то очевидно $C_+ \bar{\delta} C_-$ и следовательно $(A_{+1} \cup C_+) \bar{\delta} (A_{-1} \cup C_-)$. Тогда $A_{+1} \cup C_+$ и $A_{-1} \cup C_-$ можно разделить δ-перегородкой C_1.

И так имеем δ-перегородки C_i между A_{+i} и A_{-i}, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ с пустым пересечением: $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$. По теореме 3 следует, что f_0 можно продолжить в δ-отображение всего пространства P в S^n. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремович, В. А.: Геометрия близости. I. Мат. сб., 31 (73) (1952), 189—200.
2. Смирнов, Ю. М.: О размерности пространств близости. Мат. сб., 38 (80) (1956), 283—302.
3. Смирнов, Ю. М.: О пространствах близости. Мат. сб., 31 (73) (1952), 543—574.
4. Хаджииванов, Н.: О компактификации пространств близости. Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, 1966, 163—170.
5. Келли, Дж. Л.: Общая топология. Москва, 1968.
6. Borsuk, K.: Theory of retracts. Warszawa, 1967.
7. Sierpinski, W.: Un théorème sur les continus. Tôh. Math. J., 13 (1918), 300—303.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

EXTENSION OF PROXIMITY CONTINUOUS MAPPINGS INTO SPHERES

N. G. Hadjiivanov

(SUMMARY)

The main result of the present paper is:

Let P be a proximity space, let M be a subset of P with proximity dimension, satisfying the inequality $\delta d M \leqq n-1$, and let every closed subset F of P, such that $F \cap M = \emptyset$, is bicompact. Furthermore let P_i be subsets of the space P, such that $P = M \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$, $P_i \cap P_j \subset M$ for $i \neq j$ and $P_i \setminus M$ are closed subsets of $P \setminus M$. Then every proximity continuoos mapping from P_i into the n-dimensional sphere S^n can be extended to a proximity continuous mapping from P into S^n.