АПРОКСИМИРАНЕ НА ФУНКЦИИ ОТНОСНО ЕДНА Δ-МЕТРИКА ОТ ХАУСДОРФОВ ТИП

А. Андреев и Васил А. Попов

В тази работа ще разгледаме начин за апроксимиране на функции който се базира на една Δ-метрика от хаусдорфов тип.

Да напомним определението на хаусдорфово разстояние между две непрекъснати функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в интервала $\Delta=[a, b]$, [1], [2]:

$$r(f, g)=\max\{\max_{y\in\Delta}\min_{x\in\Delta}\|f(x), g(y)\|, \max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|f(x), g(y)\|\},$$

където

$$\|f(x), g(y)\|=\max\{|x-y|, |f(x)-g(y)|\}.$$

Относно така дефинираното разстояние се разглеждат най-добрите приближения на дадена непрекъсната функция чрез елементите на някакво n-мерно подпространство L_n на $C_{[a,b]}$ (например подпространството от алгебричните полиноми от n-та степен, рационалните функции от n-ти ред, сплайн-функции и др).

Нека се спрем на полиномиалните приближения, т. е. $L_n=H_n$, където H_n е съвкупността от алгебричните полиноми от степен, не по-висока от n. Най-добро приближение на функцията $f(x)$ чрез елементи на H_n се дефинира чрез

$$E_{n,r}(f)=\inf_{p\in H_n} r(f, p).$$

Известни са следните факти [1], [2]: за всяка непрекъсната функция $f(x)$ и всяко натурално n съществува полином на най-добро хаусдорфово приближение, т. е. такъв, че

$$E_{n,r}(f)=r(f, p). \tag{1}$$

За разлика от равномерните приближения не винаги съществува единствен полином от H_n, за който е изпълнено (1), а са известни само някои класове от функции — например монотонните функции, за които полиномът от H_n е единствен (вж. [1], [3]). Освен това, въпреки че може да се дефинира съответен алтернанс, полиномът на най-добро хаусдорфово приближение не се характеризира с него, което затруднява намирането на числени методи за приближеното му намиране. Досега не съществуват числени методи за намиране на полинома на

най-добро приближение относно хаусдорфово разстояние за произволна непрекъсната функция.

Горните обстоятелства ни накараха да потърсим друг начин за приближаване на функции, който да бъде, от една страна, близко да хаусдорфовото разстояние, а, от друга, да притежава класическите свойства на полиномите на най-добро приближение относно равномерното разстояние — да бъде изпълнено условието за единственост, да има характеризация на полинома на най-добро приближение чрез съответен алтернанс и известните методи за числено приближено намиране на полинома на най-добро равномерно приближение да могат да се модифицират към него. Като такова се предлага хаусдорфовото h-разстояние.

В § 1 се дават определението и основните свойства на хаусдорфовото h-разстояние.

В § 2 се доказва за всяка непрекъсната функция съществуване, единственост и характеризация чрез алтернанс на полинома на най-добро приближение относно хаусдорфовото h-разстояние.

§ 1

Хаусдорфовото h-разстояние между непрекъснатите в интервала $\Delta=[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ се дефинира чрез

$$h(f, g)=\max_{y\in\Delta}\min_{x\in\Delta}\max\{|x-y|, |f(x)-g(y)|\}. \tag{1.1}$$

Малко по-долу ще покажем, че така определеното разстояние в пространството $C_{[a,b]}$ от непрекъснатите в интервала $[a, b]$ функции е Δ-метрика, т. е. удовлетворява следните аксиоми:

1. $h(f, g)\geqq 0$, $h(f, g)=0$ точно когато $f=g$.
2. $h(f, g)\leqq h(f, \varphi)+h(\varphi, g)$.

От традиционните аксиоми за метрика определеното по-горе хаусдорфово h-разстояние не удовлетворява аксиомата за симетричност: лесно се вижда, че съществуват непрекъснати функции, за които $h(f, g)\neq h(g, f)$.

От (1.1) се вижда, че хаусдорфовото h-разстояние представлява отклонението в хаусдорфов смисъл на функцията $g(x)$ от $f(x)$, докато обикновеното хаусдорфово разстояние, както е дефинирано в началото, взема пред вид и отклонението на $f(x)$ от $g(x)$.

Смисълът на хаусдорфовото h-разстояние е следният: ако намерим такава функция $g(x)$, че числото $h(f, g)$ да бъде малко, то точката $(x, g(x))$ ще бъде близко да графиката на $f(x)$.

За ограничени в интервала Δ функции $f(x)$ и $g(x)$ също може да се дефинира хаусдорфово h-разстояние чрез понятието допълнена графика на функция [1], което не се явява Δ-метрика, тъй като тогава $h(f, g)=0$ точно когато $f(x)=g(x)$ почти навсякъде. За тази цел ще напомним определението на допълнена графика.

Горна функция на Бер $S_f(x)$ за функцията $f(x)$ се дефинира чрез

$$S_f(x)=\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{x-x'\leqq\delta} f(x'),$$

а долна функция на Бер $I_f(x)$ за $f(x)$ — чрез

$$I_f(x)=\lim_{\delta\to 0}\ \inf_{x-x'\leqq\delta} f(x').$$

Допълнена графика f на ограничената в интервала Δ функция $f(x)$ се нарича множеството от точки в равнината

$$\bar{f}=\{(x, y): x\in\Delta,\ I_f(x)\leqq y\leqq S_f(x)\}.$$

$\bar{f}$ е затворено множество, изпъкнало по оста y, чиято проекция върху оста x съвпада с интервала Δ. $\bar{f}$ съвпада с графиката на $f(x)$, ако $f(x)$ е непрекъсната функция.

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са ограничени в интервала функции, то хаусдорфовото h-разстояние между тях се дефинира чрез

$$h(f, g)=\max_{(x', y')\in\bar{g}}\ \min_{(x'', y'')\in\bar{f}}\ \max\{\ x'-x'',\ y'-y''\ \}. \tag{1.2}$$

Изобщо $h(f, g)\neq h(g, f)$, но е в сила неравенството на триъгълника

$$h(f, g)\leqq h(f, \varphi)+h(\varphi, g). \tag{1.3}$$

Действително нека $(x_1, y_1)\in\bar{g}$, тогава съществува $(x_2, y_2)\in\bar{\varphi}$ такава, че

$$\max\{\ x_1-x_2\ ,\ \ y_1-y_2\ \}\leqq h(\varphi, g),$$

а, от друга страна, съществува точка $(x_3, y_3)\in\bar{f}$ такава, че

$$\max\{\ x_2-x_3\ ,\ \ y_2-y_3\ \}\leqq h(f, \varphi).$$

Тогава

$$\max\{\ x_1-x_3\ ,\ \ y_1-y_3\ \}\leqq\max\{\ |x_1-x_2|+|x_2-x_3|\ ,\ \ |y_1-y_2|+|y_2-y_3|\ \}$$
$$\leqq\max\{\ |x_1-x_2|\ ,\ \ |y_1-y_2|\ \}+\max\{\ |x_2-x_3|\ ,\ \ |y_2-y_3|\ \}\leqq h(f, \varphi)+h(\varphi, g),$$

т. е.

$$\max\{\ |x_1-x_3|\ ,\ \ |y_1-y_3|\ \}\leqq h(f, \varphi)+h(\varphi, g).$$

От последното неравенство и факта, че точката (x_1, y_1) е избрана произволно, следва (1.3).

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени в интервала Δ функции. Ще дадем връзка между тяхното равномерно разстояние

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in\Delta}|f(x)-g(x)|,$$

тяхното хаусдорфово разстояние

$$r(f, g) = \max\{\max_{(x_1, y_1)\in\overline{f}} \min_{(x_2, y_2)\in\overline{g}} \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\},$$
$$\max_{(x_1, y_1)\in\overline{g}} \min_{(x_2, y_2)\in\overline{f}} \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}\}$$

и хаусдорфовото h-разстояние $h(f, g)$.

За тази цел ще използваме следните характеристики на функцията $f(x)$:

а) модул на непрекъснатост на $f(x)$:

$$\omega(f;\ \delta) = \sup_{|x'-x''|\leq\delta} |f(x')-f(x'')|; \tag{1.4}$$

б) модул на немонотонност на $f(x)$ (в малко по-различна форма от дефинирания в [1]):

$$\mu(f;\ \delta) = \sup_{\substack{|x'-x''|\leq\delta \\ x'\leq x\leq x''}} \inf_{0\leq\lambda\leq 1} |\lambda f(x')+(1-\lambda) f(x'')-f(x)|; \tag{1.5}$$

в) модифициран модул на немонотонност на $f(x)$:

$$\tilde{\mu}(f;\ \delta) = \max\{\mu(f;\ \delta), \max_{\substack{|x-a|\leq\delta \\ |y-b|\leq\delta}} |f(x)-f(y)|, \max_{\substack{|x-b|\leq\delta \\ |y-b|\leq\delta}} |f(x)-f(y)|\}; \tag{1.6}$$

г) хаусдорфов модул на $f(x)$:

$$\tau(f;\ \delta) = r(S_f(\delta;\ x),\ I_f(\delta;\ x)), \tag{1.7}$$

където

$$I_f(\delta; x) = \inf_{|x-x'|\leq\delta} f(x'), \quad S_f(\delta;\ x) = \sup_{|x-x'|\leq\delta} f(x');$$

д) модул на П. П. Коровкин:

$$k(f;\ \delta) = r(I_{F(\delta)}(x),\ S_{F(\delta)}(x)), \tag{1.8}$$

където $F(\delta)$ е множеството от точките (x_0, y_0) в равнината, за които е изпълнено

$$\min_{(x, y)\in\overline{f}} \max\{|x-x_0|, |y-y_0|\} \leq \delta,$$

а

$$I_{F(\delta)}(x) = \inf_{(x, y)\in F(\delta)} y, \quad S_{F(\delta)}(x) = \sup_{(x, y)\in F(\delta)} y.$$

От [1] са известни следните неравенства:

$$r(f, g) \leq \rho(f, g), \tag{1.9}$$

$$\rho(f, g) \leq r(f, g) + \omega(f;\ r(f, g)). \tag{1.10}$$

От друга страна, очевидно

$$\mu(f;\ \delta) \leq \tilde{\mu}(f;\ \delta) \leq \omega(f;\ \delta). \tag{1.11}$$

В сила е следната

Лема 1. Ако $f(x)$ е дефинирана и ограничена в интервала $\Delta=[a, b]$, то

$$\tau(f;\ \delta)\leqq\max\{3\delta,\ \mu(f;\ 6\delta)\}.$$

Доказателство. Да допуснем, че за някое $\delta>0$ са изпълнени неравенствата

$$\tau(f;\ \delta)>3\delta,\quad \tau(f;\ \delta)>\mu(f;\ 6\delta), \tag{1.12}$$

и да означим

$$\varphi(\delta)=\max\{3\delta,\ \mu(f;\ 6\delta)\},\quad \varepsilon=\tau(f;\ \delta)-\varphi(\delta). \tag{1.13}$$

От нашето допускане (1.12) следва, че $\varepsilon>0$. От лема 1 от [1] следва, че или съществува точка от $\bar{S}_f(\delta;\ x)$ такава, че в квадратчето с център тази точка и страна $2\varphi(\delta)+2\varepsilon$ няма точка от $\bar{I}_f(\delta;\ x)$, или съществува точка от $\bar{I}_f(\delta;\ x)$ такава, че в квадратчето с център тази точка и страна $2\varphi(\delta)+2\varepsilon$ няма точка от $\bar{S}_f(\delta;\ x)$. Да допуснем за определеност, че е изпълнено първото, т. е. съществува точка $(x_0, y_0)\in\bar{S}_f(\delta;\ x)$ такава, че в квадратчето със страна $2\varphi(\delta)+2\varepsilon$ и център точката $(x_0,\ y_0)$ няма точка от $\bar{I}_f(\delta;\ x)$.

Преди всичко $y_0\leqq S_f(\delta;\ x_0)$, тъй като $S_f(\delta;\ x)$ е непрекъсната отгоре. От това следва, че съществува точка $(x_1,\ f(x_1))$, за която

$$|x_1-x_0|\leqq\delta,\quad y_0\leqq f(x_1). \tag{1.14}$$

От друга страна,

$$I_f(\delta;\ x_0-2\delta)\leqq y_0-\varphi(\delta)-\varepsilon\leqq f(x_1)-\varphi(\delta)-\varepsilon,$$

$$I_f(\delta;\ x_0+2\delta)\leqq y_0-\varphi(\delta)-\varepsilon\leqq f(x_1)-\varphi(\delta)-\varepsilon.$$

От горните неравенства следва, че съществуват две точки $(x_2,\ f(x_2))$ и $(x_3,\ f(x_3))$, за които е изпълнено

$$|x_2-x_0+2\delta|\leqq\delta,\quad |x_3-x_0-2\delta|\leqq\delta,$$

$$|I_f(\delta;\ x_0-2\delta)-f(x_2)|\leqq\frac{\varepsilon}{2},\quad |I_f(\delta;\ x_0+2\delta)-f(x_3)|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$f(x_2)\leqq f(x_1)-\varphi(\delta)-\frac{\varepsilon}{2},\quad f(x_3)\leqq f(x_1)-\varphi(\delta)-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.15}$$

От (1.15) намираме за всяко $0\leqq\lambda\leqq1$ неравенството

$$\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_3)\leqq f(x_1)-\varphi(\delta)-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.16}$$

От (1.14) и (1.16) следва

$$\mu(f;\ 6\delta) \geqq \inf_{0\leqq\lambda\leqq 1} |\lambda f(x_2)+(1-\lambda) f(x_3)-f(x_1)| \geqq f(x_1)-(f(x_1)-\varphi(\delta))+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\varphi(\delta)+\frac{\varepsilon}{2} > \mu(f;\ 6\delta),$$

т. е. противоречие, което се дължи на допускането, че $\varepsilon > 0$.

С това лема 1 е доказана.

Да разгледаме сега модулите $\tau(f;\ \delta)$ и $k(f;\ \delta)$. За всяко $\varepsilon > 0$ имаме

$$(x, S_f(\delta;\ x)+\delta+\varepsilon) \bar{\in} F(f;\ \delta),$$

$$(x, S_f(\delta;\ x)+\delta) \in F(f;\ \delta).$$

Аналогично за всяко $\varepsilon > 0$

$$(x,\ I_f(\delta;\ x)-\delta-\varepsilon) \bar{\in} F(f;\ \delta),$$

$$(x,\ I_f(\delta;\ x)-\delta) \in F(f;\delta).$$

Като вземем пред вид определението на хаусдорфовото разстояние, получаваме

$$k(f;\ \delta) \leqq \tau(f;\ \delta)+2\delta, \tag{1.17}$$

$$\tau(f;\ \delta) \leqq k(f;\ \delta). \tag{1.18}$$

Да се спрем сега на връзката между хаусдорфовото разстояние и хаусдорфовото h-разстояние.

Очевидно е изпълнено

$$h(f,\ g) \leqq r(f,\ g). \tag{1.19}$$

Оценка за $r(f,\ g)$ чрез $h(f,\ g)$ ни дава следната

Лема 2. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции, дефинирани в $\Delta=[a,\ b]$, то

$$r(f,\ g) \leqq h(f,\ g)+\tau_+(f;\ h(f,\ g)), \tag{1.20}$$

където

$$\tau_+(f;\ \delta)=\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(f;\ \delta+\varepsilon).$$

Доказателство. За да докажем лемата, достатъчно е да покажем, че за всяка точка $(x_1,\ y_1) \in \bar{f}$ съществува точка $(x_2,\ y_2) \in \bar{g}$ такава, че

$$\max\{|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\} \leqq h(f,g)+\tau_+(f;\ h(f,g)).$$

Да допуснем противното, т. е. съществуват точки $(x_0,\ y_0) \in f$ и $\varepsilon_0>0$ такива, че в квадратчето със страна 2δ, $\delta=h(f,g)+\tau_+(f;\ h(f,g))+\varepsilon_0$, и център точката $(x_0,\ y_0)$ няма точка от $\bar{g}$. Това означава, че за всяко

$x \in \Delta$ и $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ е изпълнено или $g(x) < y_0-\delta$, или $g(x) > y_0+\delta$. Нека за определеност имаме

$$g(x) < y_0-\delta. \tag{1.21}$$

Ще покажем, че за всяко $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ е в сила

$$I_f(h(f, g)+\varepsilon;\ x) < y_0-\delta+h(f, g) \quad \text{за } \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.22}$$

Наистина, ако $(x, y) \in \bar{g}$, където x е произволна точка от $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, то съществува точка $(x', y') \in \bar{f}$, за която

$$|x-x'| \leqq h(f, g), \quad |y-y'| \leqq h(f, g).$$

От последното неравенство и от (1.21) следва

$$y' < y_0-\delta+h(f, g),$$

от което получаваме

$$\inf_{|x-t| \leqq h(f, g)+\varepsilon} f(t) \leqq y' \leqq y_0-\delta+h(f, g) \quad \text{за } \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.23}$$

Освен това очевидно

$$S_f(h(f, g)+\varepsilon;\ x_0) \geqq y_0. \tag{1.24}$$

От (1.23) и (1.24) следва

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r(S_f(h(f, g)+\varepsilon;\ x),\ I_f(h(f, g)+\varepsilon;\ x)) \leqq \tau_+(f;\ h(f, g))+\varepsilon_0,$$

което води до противоречието

$$\tau_+(f;\ h(f, g)) > \tau_+(f;\ h(f, g)).$$

С това лемата е доказана.

Като следствие от лема 1 и лема 2 получаваме, когато

$$\tau_+(f;\ \delta) = \tau(f;\ \delta),$$

$$r(f, g) \leqq h(f, g)+\max(3\delta,\ \mu(f;\ 6\delta)),\quad \delta = h(f, g). \tag{1.25}$$

Да отбележим, че за непрекъснати функции очевидно

$$\tau_+(f, g) = \tau(f, g).$$

Неравенството (1.25) е твърде неточно и за нашите цели понататък ще ни бъде необходимо следното негово прецизиране:

Лема 3. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са ограничени функции в интервала $\Delta = [a, b]$. Тогава

$$r(f, g) \leqq h(f, g)+\tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g)), \tag{1.26}$$

където

$$\tilde{\mu}_+(f;\ \delta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\mu} f;(\delta+\varepsilon).$$

Доказателство. Както и при лема 2, за да докажем (1.26), достатъчно е да покажем, че за всяка точка $(x, y) \in \bar{f}$ съществува точка $(x', y') \in \bar{g}$ такава, че

$$\max\{|x-x'|, |y-y'|\} \leqq h(f, g)+\tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g)).$$

Да допуснем, че съществува такава точка $(x_0, y_0) \in \bar{f}$, че в квадратчето с център (x_0, y_0) и със страна $2\delta+2\varepsilon_0$, $\delta=h(f, g)+\tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g))$, $\varepsilon_0>0$, няма точка от $\bar{g}$. Нека ε е произволно число, за което $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$. Тогава за всяко $x \in \Delta$, $x \in [x_0-\delta-\varepsilon_0, x_0+\delta+\varepsilon_0]$, ще имаме или $g(x)<y_0-\delta-\varepsilon_0$, или $g(x)>y_0+\delta+\varepsilon_0$. Нека за определеност имаме за $|x-x_0| \leqq \delta+\varepsilon_0$

$$g(x)<y_0-\delta-\varepsilon_0.$$

Нека отначало $|x_0-a|>\delta+\varepsilon$, $|x_0-b|>\delta+\varepsilon$. Тогава

$$g(x_0-h(f, g)-\varepsilon)<y_0-\delta-\varepsilon_0,\quad g(x_0+h(f, g)+\varepsilon)<y_0-\delta-\varepsilon_0.$$

Оттук и от определението на $\bar{f}$ и $h(f, g)$ следва, че съществуват точки x', x'' такива, че

$$|x_0-h(f, g)-\varepsilon-x'| \leqq h(f, g)+\frac{\varepsilon}{4},\quad |x_0+h(f, g)+\varepsilon-x''| \leqq h(f, g)+\frac{\varepsilon}{4},$$

$$f(x') \leqq y_0-\delta-\varepsilon_0+h(f, g),\quad f(x'') \leqq y_0-\delta-\varepsilon_0+h(f, g).$$

Нека x''' е точка, за която е изпълнено $|x'''-x_0|<\frac{\varepsilon}{4}$, $f(x''')>y_0-\frac{\varepsilon}{4}$ (съществуването на такава точка следва от определението на $\bar{f}$). Тогава

$$x' \leqq x''' \leqq x'',\quad |x'-x''| \leqq 4h(f, g)+3\varepsilon,$$

$$f(x''')-f(x') \geqq y_0-\frac{\varepsilon}{4}-y_0+\delta+\varepsilon_0-h(f, g) \geqq \tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g))+\frac{3}{4}\varepsilon_0,$$

$$f(x''')-f(x'') \geqq y_0-\frac{\varepsilon}{4}-y_0+\delta+\varepsilon_0-h(f, g) \geqq \tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g))+\frac{3}{4}\varepsilon_0,$$

откъдето следва

$$\tilde{\mu}(f;\ 4h(f, g)+3\varepsilon) \geqq \tilde{\mu}_+(f;\ 4h(f, g))+\frac{3}{4}\varepsilon_0,$$

което противоречи с определението на $\tilde{\mu}_+(f;\ \delta)$.

Нека сега $|x_0-a| \leqq h(f, g)+\varepsilon$ за определеност. Тъй като тогава $g(a)<y_0-\delta-\varepsilon_0$, то ще има точка $(x', y') \in \bar{f}$ такава, че

$$|x'-a| \leqq h(f, g),\ y' < y_0-\delta-\varepsilon_0+h(f, g),$$

и следователно ще съществува точка x'', за която $|x''-a| \leqq h(f, g) + \frac{\varepsilon}{4}, f(x'') < y' + \frac{\varepsilon}{4}$. Тъй като съществува точка x''', $|x'''-x_0| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$, $f(x''') > y_0 - \frac{\varepsilon}{4}$, то ще имаме

$$|x''-a| \leqq h(f, g)+\frac{\varepsilon}{4},\quad |x'''-a| \leqq h(f, g)+\frac{5}{4}\varepsilon,$$

$$|f(x''')-f(x'')| \geqq y_0-\frac{\varepsilon}{4}-y_0+\delta+\varepsilon_0-h(f, g) \geqq \tilde{\mu}_+(f; 4h(f, g))+\frac{3}{4}\varepsilon_0,$$

което отново води до противоречие с определението на $\tilde{\mu}_+(f; \delta)$.

С това лема 3 е доказана.

Ще напомним, че условието $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f; \delta)=0$ е необходимо и достатъчно, за да бъде функцията $f(x)$ непрекъсната, а условието

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(f; \delta)=0 \tag{1.27}$$

е необходимо и достатъчно, за да бъде $f(x)$ локално-монотонна, т. е. $f(x-0)$ и $f(x+0)$ да съществуват за всяка точка $x \in \Delta$ и значението $f(x)$ да бъде между тях.

От друга страна, условието

$$\lim_{\delta\to 0}\tau(f; \delta)=0 \tag{1.28}$$

е необходимо и достатъчно, за да имаме $\overline{I}_f=\overline{S}_f$. Разбира се (1.28), пред вид (1.17) и (1.18) е равносилно на $\lim\limits_{\delta\to 0}k(f; \delta)=0$.

Класа от функции, за които е изпълнено (1.27), ще бележим с $M[a, b]$, а класа функции, за които имаме (1.28) — с $k[a, b]$. От лема 1 и (1.11) следва

$$k[a, b] \supset M[a, b] \supset C_{[a, b]}. \tag{1.29}$$

Лема 2 и неравенството (1.19) показват верността на

Теорема 1. Нека $f(x) \in k[a, b]$. Необходимо и достатъчно условие редицата $\{p_n(x)\}_1^\infty$ да клони хаусдорфово към $f(x)$, т. е. за $\lim\limits_{n\to\infty} r(f, p_n)=0$, е $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n)=0$.

От теорема 1 и от неравенствата (1.9) и (1.10) получаваме следната

Теорема 2. Нека $f(x) \in C_{[a, b]}$. Необходимо и достатъчно условие редицата $\{p_n(x)\}_1^\infty$ да клони равномерно към $f(x)$, т. е. за $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f, p_n)=0$, е $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n)=0$.

Действително да допуснем, че е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n)=0$. От $f(x)\in C_{[a,b]}$ следва $\mu_+(f:\delta)=\mu(f:\delta)$ и по теорема 1

$$\lim_{n\to\infty} r(f, p_n)=0. \tag{1.30}$$

От (1.10) и (1.30) намираме $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f, p_n)=0$.

Обратно, ако допуснем, че $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f, p_n)=0$, то тогава от (1.9) и (1.19) получаваме веднага, че и $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n)=0$.

Да означим с F_Δ множеството от затворените ограничени точкови съвкупности в равнината, за които:

1. Ако $F\in F_\Delta$, то проекцията на F върху оста x съвпада с $\Delta=[a, b]$.

2. Ако $F\in F_\Delta$, то F е изпъкнало множество по отношение на оста y.

Теорема 3. Нека $\{f_n(x)\}_1^\infty$ е редица от равномерно ограничени на интервала $\Delta=[a, b]$ функции. Тогава съществува елемент $F\in F_\Delta$ и подредица $\{f_{n_k}(x)\}_1^\infty$ на $\{f_n(x)\}_1^\infty$ такава, че

$$\lim_{n_k\to\infty} h(F, f_{n_k})=0.$$

Теорема 3 следва веднага от (1.19) и относителната компактност на ограничените функции относно хаусдорфово разстояние [1]. Теорема 3 показва относителната компактност на равномерно ограничените функции относно хаусдорфово h-разстояние.

На края на този параграф ще дадем връзката между интегралната сходимост и сходимостта относно хаусдорфовото h-разстояние. За тази цел ще е нужна следната лема (напълно аналогична на съответната лема от [4]):

Лема 4. Нека ограничената функция $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Тогава, ако $\{p_n(x)\}_1^\infty$ е редица от функции, за която $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n)=0$, то е изпълнено $\lim p_n(x_0)=f(x_0)$.

Допускайки противното, от ограничеността на числовата редица $\{p_n(x_0)\}_1^\infty$ ще следва съществуването на подредица $\{p_{n_k}(x_0)\}_1^\infty$ такава, че $\lim\limits_{n_k\to\infty} p_{n_k}(x_0)=a\neq f(x_0)$.

Нека $\varepsilon=|a-f(x_0)|$ и да изберем $\delta>0$ такова, че при $|x-x_0|<\delta$ да е в сила пред вид непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x_0

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.31}$$

Съществува n_0 достатъчно голямо, за което при $n_k>n_0$ ще имаме

$$(1.32) \qquad h(f, p_{n_k}) < \max\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \delta\right\}, \ |p_{n_k}(x_0) - a| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

От второто от неравенствата (1.32) следва, че в квадратчето с център $(x_0, p_{n_k}(x_0))$, $n_k > n_0$, и страна $2\max\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \delta\right\}$ няма да има точка от f, което противоречи на първото неравенство (1.32).

От лема 4 и теоремата на Лебег за граничен преход под знака на интеграла получаваме

Теорема 4. Нека $f(x)$ е интегруема по Риман функция в интервала $\Delta = [a, b]$. Тогава, ако $\{p_n(x)\}_1^\infty$ е редица от функции, за които е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} h(f, p_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f(x) - p_n(x)|\, dx = 0$.

§ 2

По аналогия с казаното в началото най-добро h-приближение на функцията $f(x)$ с полиноми от n-та степен ще бележим с

$$(2.1) \qquad E_n^h(f) = \inf_{p_n \in H_n} h(f, p_n).$$

Ако $p_n(x) \in H_n$ и за него е изпълнено

$$(2.2) \qquad E_n^h(f) = h(f, p_n),$$

то ще наричаме $p_n(x)$ полином на най-добро h-приближение за функцията $f(x)$.

Теорема 5. Ако $f(x)$ е ограничена функция, то за всяко n съществува полином на най-добро h-приближение.

Теорема 5 е пряко следствие на компактността на равномерно ограничените полиноми от n-та степен.

По-нататък ще ни бъде необходимо следното

Определение. Ще казваме, че полиномът $p_n(x) \in H_n$ осъществява алтернанс за функцията $f(x)$ на интервала $\Delta = [a, b]$, ако съществуват $n+2$ точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, принадлежащи на интервала Δ, такива, че

$$\min_{x \in \Delta} \max\{|x - x_i|, |f(x) - p_n(x_i)|\} = E_n^h(f),$$

$$\operatorname{sign}\{f(x_i) - p_n(x_i)\} = (-1)^{i+\varepsilon},$$

където ε е нула или 1.

Лема 5. Нека функциите $f(x)$ и $g(x) \in C_{[a,b]}$. Ако за дадена точка $z \in [a, b]$ е изпълнено $g(z) > f(z)$, то за всяко число ξ, $0 < \xi < g(z) - f(z)$, е в сила неравенството $M < L$, където M и L, се определят от

$$L=\min_{x\in\Delta}\max\{|x-z|,\ |f(x)-g(z)|\},$$

$$M=\min_{x\in\Delta}\max\{|x-z|,\ |f(x)-(g(z)-\xi)|\}.$$

Доказателство. Нека точката $x_0\in\Delta$ е такава, че

$$L=\max\{|x_0-z|,\ |f(x_0)-g(z)|\}.$$

От непрекъснатостта на $f(x)$ и $f(z)<g(z)$ веднага следва, че

$$f(x_0)<g(z).$$

По същите причини за точката $\tilde{x}$, за която

$$M=\max\{|\tilde{x}-z|,\ |f(\tilde{x})-(g(z)-\xi)|\},$$

ще имаме $f(\tilde{x})<g(z)-\xi$. Нека $f(x_0)>f(z)$ (при $f(x_0)=f(z)$ лемата е очевидна). Тогава

$$|\tilde{x}-z|<|x_0-z|.$$

Но тогава ще имаме и

$$M=\max\{|\tilde{x}-z|,\ |f(\tilde{x})-(g(z)-\xi)|\}<\max\{|x_0-z|,\ |f(x_0)-g(z)|\}=L, \tag{2.3}$$

защото в противен случай във вътрешността на интервала $[x_0, \tilde{x}]$, ако $x_0<\tilde{x}$, ще има точка x', за която $\max\{|x'-z|,\ |f(x')-(g(z)-\xi)|\}$ $<L=\max\{|x_0-z|,|f(x_0)-g(z)|\}\leqq M=\min_x\max\{|x-z|,\ |f(x)-(g(z)-\xi)|\}$.

От последните неравенства и (2.3) следва твърдението на лемата.

Теорема 6. Ако полиномът $p_n(x)\in H_n$ е полином на най-добро h-приближение за непрекъснатата функция $f(x)$ на интервала $\Delta=[a, b]$, то $p_n(x)$ осъществява алтернанс за функцията $f(x)$.

Доказателство. Методът на доказателство на теоремата е напълно аналогичен на този на съответната теорема на Чебишев за равномерните приближения, но за пълнота ще приведем пълното доказателство.

Ще считаме, че $E_n^h(f)\neq 0$, в противен случай теоремата е очевидна. Една точка $x_0\in\Delta$, за която е изпълнено

$$E_n^h(f)=\min_{x\in\Delta}\max\{|x-x_0|,\ |p_n(x_0)-f(x)|\},$$

ще наричаме (+) точка, ако $\operatorname{sign}(p_n(x_0)-f(x_0))=1$, и (—) точка в противния случай. Нека всички (+) и (—) точки в интервала Δ отляво надясно са

$$x_1, x_2, \ldots \quad , \quad x_{k_1} \quad (+) \quad \text{точки},$$
$$x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \ldots, \quad x_{k_2} \quad (-) \quad \text{точки},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{k_{m-1}+1}, x_{k_{m-1}+2}, \ldots, x_{k_m}, (-)^{m-1} \text{ точки.}$$

(За определеност сме допуснали, че отначало имаме (+) точки.)

Ще покажем, че $m \geqq n+2$. Да допуснем противното, т. е. че $m \leqq n+1$. Да означим с A множеството от всички (+) и (—) точки в Δ. На всяка точка $x_k \in A$ съпоставяме такова число $\delta_k > 0$, така че за всяко $Z \in [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$ имаме

$$p_n(z) - f(z) > 0, \quad \text{ако} \quad p_n(x_k) - f(x_k) > 0,$$
$$p_n(z) - f(z) < 0, \quad \text{ако} \quad p_n(x_k) - f(x_k) < 0.$$

Да означим

$$\delta = \min\left\{ \min_{i=1,2,\ldots,m-1} \frac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{4}, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m \right\}.$$

Ако $x_0 \in \Delta$, то с $O_{x_0}(\delta)$ ще означаваме $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Нека $B = \bigcup_{x \in A} O_x(\delta)$ и $\bar{B} = [a, b] \setminus B$. От определението и компактността на $\bar{B}$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$ такова, че

$$\max_{x_0 \in \bar{B}} h(f(x), p_n(x_0)) = E_n^h(f) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Нека $z_i \in \Delta$ е такава точка, че

$$x_{k_i} < z_i < x_{k_i+1}, \quad z_i \in \bar{B}.$$

Съществуването на такава точка z_i следва от дефинициите на δ и $\bar{B}$. За $i = 1, 2, \ldots, m-1$ получаваме точките

$$z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}.$$

Да разгледаме полинома

$$R(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \ldots (z_{m-1} - x). \tag{2.5}$$

Тъй като $m \leqq n+1$, то $R(x) \in H_n$. Очевидно

$$\operatorname{sign} R(x) = \operatorname{sign}(p_n(x) - f(x)) \text{ за } x \in B.$$

Да изберем $\lambda > 0$ така, че

$$\max_{x \in \Delta} |\lambda R(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \max_{x \in \Delta} |\lambda R(x)| < \min_{x \in B} |p_n(x) - f(x)|. \tag{2.6}$$

Да разгледаме полинома $Q(x) - p(x) - \lambda R(x)$. Очевидно $Q(x) \in H_n$. Ще покажем, че е изпълнено

$$h(f, Q) < E_n^h(f).$$

Нека $x_0 \in B$. Да допуснем за определеност, че $p_n(x_0) > f(x_0)$. (Разсъжденията са аналогични за $p_n(x_0) < f(x_0)$.)

От (2.5) и (2.6) следва, че

$$f(x_0) < Q(x_0) < p_n(x_0).$$

От последните неравенства и лема 5 следва, че

$$\min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_0|, |Q(x_0)-f(x)|\} < \min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_0|, |p_n(x_0)-f(x)|\}.$$

И така за $x_0 \in B$ е изпълнено

$$h(f, Q) < h(f, p_n) \leqq E_n^h(f). \tag{2.7}$$

Нека $x_0 \in \bar{B}$. Тогава

$$h(f, Q) \leqq h(f, p_n) + h(p_n, Q).$$

От (2.4) следва

$$h(f(x), p_n(x_0)) \leqq E_n^h(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$

а, от друга страна,

$$h(p_n(x_0), Q_n(x_0)) \leqq \rho(p_n(x_0), Q(x_0))$$

$$\leqq \max_{x \in \Delta} |p_n(x) - p_n(x) + \lambda R(x)| = \max_{x \in \Delta} |\lambda R(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончателно за $x_0 \in \bar{B}$ имаме

$$h(f(x), Q(x_0)) < E_n^h(f). \tag{2.8}$$

От (2.7) и (2.8) следва, че

$$h(f, Q) < E_n^h(f).$$

Полученото противоречие се дължи на допускането, че $m \leqq n+1$. С това теоремата е доказана.

Лема 6. Нека функциите $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x) \in C_{[a,b]}$. За всяко λ, $0<\lambda<1$, е изпълнено

$$h(f, \lambda g + (1-\lambda)\varphi) \leqq \max\{h(f, g), h(f, \varphi)\}.$$

Доказателство. Ние ще покажем, че е в сила по-силно твърдение, от което ще следва веднага лемата. Именно нека $f(x), g(x)$, $\varphi(x) \in C_{[a,b]}$. За всяко λ, $0<\lambda<1$, и всяка точка, $x_0 \in \Delta$, е изпълнено неравенството

$$\min \max\{|x-x_0|, |f(x)-(\lambda g(x_0)+(1-\lambda)\varphi(x_0))|\} \tag{2.9}$$

$$\leqq \max\{\min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_0|, |f(x)-g(x_0)|\}, \min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_0|, |f(x)-\varphi(x_0)|\}\}.$$

При това, ако $g(x_0) \neq \varphi(x_0)$, то неравенството е строго.

Действително достатъчно е да вземем пред вид, че числото $\lambda g(x_0)+(1-\lambda)\varphi(x_0)$ се намира между $g(x_0)$ и $\varphi(x_0)$, и да се приложи лема 5.

Теорема 7. Ако функцията $f(x) \in C_{[a,b]}$, то съществува единствен полином $p_n(x) \in H_n$ на най-добро h-приближение за $f(x)$.

Доказателство. Да допуснем, че полиномът $g_n(x) \in H_n$ е полином на най-добро приближение, т. е.

$$h(f, g_n) = E_n^h(f).$$

Да образуваме полинома $R_n(x) = \dfrac{p_n(x)+g_n(x)}{2}$. Очевидно $R_n(x) \in H_n$. По лема 6

$$h(f, R_n) \leqq \max\{h(f, p_n), h(f, g_n)\} = E_n^h(f) \tag{2.10}$$

и тъй като $R_n(x) \in H_n$, то в (2.10) строго неравенство е невъзможно. Ето защо

$$h(f, R_n) = E_n^h(f). \tag{2.11}$$

Оказа се, че и полиномът $R_n(x)$ е полином на най-добро h-приближение за $f(x)$. Според теорема 6 $R_n(x)$ осъществява алтернанс за $f(x)$. Нека означим точките на алтернанса с $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$. По определение, ако x_i е точка от алтернанса, то

$$\min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_i|, |f(x)-R_n(x_i)|\} = E_n^h(f);$$

$$\operatorname{sign}\{f(x_i)-R_n(x_i)\} = (-1)^{i+\varepsilon}, \quad \varepsilon = 0 \text{ или } 1.$$

Ще покажем, че за всяко x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, е изпълнено

$$p_n(x_i) = g_n(x_i).$$

Действително, ако $p_n(x_i) \neq g_n(x_i)$, то по (2.9) ще получим

$$\min_{x \in \Delta} \max\{|x-x_i|, |f(x)-R_n(x_i)|\} < E_n^h(f),$$

което противоречи на (2.11).

Получи се, че полиномите $p_n(x)$ и $g_n(x)$ от n-та степен съвпадат в $n+2$ точки, т. е. те навсякъде съвпадат:

$$p_n(x) = g_n(x),$$

което доказва единствеността на полинома на най-добро h-приближение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл. и Пенков, Б.: ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Изв. на Мат. инст. на БАН, 6 (1962), 27—50.
2. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теорий приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. УМН, т. XXIV (1969), вып. 5 (149), 141—178.
3. Яков, С. М.: Някои въпроси от теорията на апроксимирането с алгебрични полиноми. Соф. унив., Дипломна работа, 1963.
4. Сендов, Бл., Попов, В. А.: О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики. Mathematica (Cluj), 8 (31), (1966), 163--172.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS WITH RESPECT to A Δ-METRIC OF HAUSDORFF TYPE

A. Andreev and V. A. Popov

(SUMMARY)

In this paper we consider an approximation of continuous functions by algebraical polynomials with respect to the following Δ-metric of Hausdorff type

$$h(f, g)=\max_{x\in[a,b]} \min_{y\in[a,b]} \max\{|x-y|, |f(y)-g(x)|\}.$$

The best approximation of the continuous function by algebraical polynomials of degree at most n is defined by

$$E_n^h(f)=\inf_{p\in H_n} h(f, p),$$

where H_n denotes the space of the algebraical polynomials of degree at most n.

The theorem for existence and uniqueness of the polynomial of the best approximation is proved and it is shown that this polynomial is characterized by suitable alternation.

Furthermore the relation between the uniform distance, Hausdorff distance and the new h-distance is obtained.

It is shown that if $f(x)\in C_{[a,b]}$ the necessary and sufficient condition for

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g_n(x)|=0$$

is

$$\lim_{n\to\infty} h(f, g_n)=0 \tag{1}$$

and if $f(x)$ is integrable in the sense of Riemann then follows from (1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f-g_n|\,dx=0.$$