НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Васил А. Попов и Васил М. Веселинов

В этой заметке рассматриваются некоторые вопросы о сходимости производных линейных положительных операторов к неограниченным функциям относительно равномерного и хаусдорфового расстояния. Показано также, что условие выпуклости недостаточно, чтобы обеспечить сходимость производных операторов, если требуется только локальное существование производной функции. Получена оценка для отклонения производной полинома Бернштейна от производной функции в зависимости от ее модуля немонотонности.

§ 1.

Введем сначала некоторые обозначения.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на отрезке Δ. Обозначим через $S^f(x)$ и $I^f(x)$ соответственно верхнюю и нижнюю функции Бэра функции $f(x)$:

$$S^f(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{|x-x'|\leq\delta} f(x'),$$

$$I^f(x)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{|x-x'|\leq\delta} f(x').$$

Дополненным графиком f_Δ функции $f(x)$ называется множество точек (x, y) плоскости, для которых $x\in\Delta$, $I^f(x)\leqq y\leqq S^f(x)$ [1].

Хаусдорфовое расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке Δ определяется следующим образом [1]:

$$r_\Delta(f, g)=r_\Delta(\bar{f}_\Delta, \bar{g}_\Delta)=\max\{\max_{X\in\bar{f}_\Delta}\min_{Y\in\bar{g}_\Delta} d(X, Y), \max_{X\in\bar{g}_\Delta}\min_{Y\in\bar{f}_\Delta} d(X, Y)\},$$

где

$$d(X, Y)=d(X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2))=\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}.$$

Обозначим через $\rho_\Delta(f, g)$ равномерное расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$, непрерывными на отрезке Δ:

$$\rho_\Delta(f, g)=\max_{x\in\Delta}|f(x)-g(x)|.$$

Пусть $[\alpha, \beta]$ — конечный или бесконечный интервал, и $\Delta=[a, b]$ — отрезок, $[a, b]\subset[\alpha, \beta]$. Обозначим через $C_\Delta^{[\alpha,\beta]}$ совокупность функций,

заданных на интервале $[\alpha, \beta]$, непрерывных на отрезке Δ и непрерывных слева в точке a и справа в точке b. Через $D_{\Delta}^{[\alpha,\beta]}$ обозначим совокупность функций $f(x)$, заданных на интервале $[\alpha, \beta]$, непрерывных в точках a и b, для которых $I_{\Delta} f = f_{\Delta} = \bar{S}_{\Delta} f$. Заметим, что $C_{\Delta}^{[\alpha,\beta]} \subset D_{\Delta}^{[\alpha,\beta]}$, но множество $D_{\Delta}^{[\alpha,\beta]}$ существенно шире чем $C_{\Delta}^{[\alpha,\beta]}$.

Функция $f(x)$, заданная на интервале $[\alpha, \beta]$, называется выпуклой m-го порядка, если для произвольной системы точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ интервала $[\alpha, \beta]$ выполнено неравенство $[x_0, x_1, \ldots, x_m; f] \geqq 0$, где $[x_0, x_1, \ldots, x_m; f]$ m-тая разделенная разность функции $f(x)$ [8]. Совокупность всех выпуклых функций m-го порядка обозначим через $K^m_{[\alpha,\beta]}$. Будем говорить, что функция $\hat{f}^{(m)}(x) \in D_{\Delta}^{[\alpha,\beta]}$ является m-ой G-производной функции $f(x)$, если $m-1$-ая производная $f^{(m-1)}(x)$ функции $f(x)$ существует и является интегралом функции $\hat{f}^{(m)}(x)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$.

Пусть $L[f(t); x]$, $(t \in [\alpha, \beta],\ x \in [a, b])$ — оператор. Будем говорить, что оператор $L[f(t); x]$ — выпуклый m-го порядка, если отображает $K^m_{[\alpha,\beta]}$ в $K^m_{[a,b]}$.

В [2] (см. также [1]) доказана следующая

Теорема А. Пусть $\{L_n[f(t); x]\}_1^{\infty}$ — последовательность линейных положительных операторов, $(t, x \in \Delta = [a, b])$, выпуклых m-го порядка для каждого m от 0 до $p+1$ и удовлетворяющих условиям П. П. Коровкина [5]

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Delta}(L_n[t^i; x], x^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Тогда

1) если $f^{(m)}(x) \in C_{\Delta'}^{[a,b]}$, где $a < a' < b' < b$, $\Delta' = [a', b']$ и $m \leqq p$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\Delta'}(L_n[f(t); x]^{(m)}, f^{(m)}(x)) = 0$;

2) если $\hat{f}^{(m)}(x) \in D_{\Delta'}^{[a,b]}$, где a', b' — точки непрерывности $\hat{f}^{(m)}(x)$, $a < a' < b' < b$, $\Delta' = [a', b']$, $m \leqq p$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta'}(L_n[f(t); x]^{(m)}, \hat{f}^{(m)}(x)) = 0.$$

Основная цель этого параграфа — сформулировать и доказать аналог теоремы А для операторов $L_n[f(t); x]$, где $f(t)$ — функции, заданные на бесконечном интервале (теорема 1).

Обозначим через I — бесконечный интервал и пусть $\Delta = [a, b]$ — отрезок, $\Delta \subset I$.

Пусть $\varphi(x) \geqq 0$ — функция, заданная и непрерывная на I, $\sup\limits_{x \in I} \varphi(x) = \infty$.

Известна также ([3], [4]).*

Теорема В. Пусть $\{L_n[f(t); x]\}_1^\infty$ — последовательность линейных положительных операторов, $t \in I$, $x \in \Delta$, удовлетворяющих условиям

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \rho_\Delta (L_n[t^i; x], x^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\Delta (L_n[\varphi(t); x], \varphi(x)) = 0.$$

Тогда

1) если $f(x) \in C_\Delta^I$ и $|f(x)| \leqq \varphi(x)$ для $x \in I$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\Delta (L_n[f(t); x], f(x)) = 0;$$

2) если $f(x) \in D_\Delta^I$ и $|f(x)| \leqq \varphi(x)$ для $x \in I$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_\Delta (L_n[f(t); x], f(x)) = 0.$$

Теперь сформулируем один из основных результатов настоящей заметки:

Теорема 1. Пусть $\{L_n[f(t); x]\}_1^\infty$ — последовательность линейных положительных операторов, удовлетворяющих (1) и выпуклых m-го порядка для каждого m от 0 до $p+1$. Если на интервале I выполнено неравенство $|x|^{k+2} \leqq M(1+\varphi(x))$, где $k \leqq p$ и $M > 0$ — постоянная, и производная $\varphi^{(k)}(x)$ существует и является монотонной на интервале I, то

1) если $f^{(k)}(x) \in C_\Delta^I$ и $|f^{(k)}(x)| \leqq \varphi^{(k)}(x)$ для $x \in I$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Delta'} (L_n[f(t); x]^{(k)}, f^{(k)}(x)) = 0; \quad \Delta' = [a', b'], \ a < a' < b' < b;$$

2) если $\hat{f}^{(k)}(x) \in D_\Delta^I$ и $|\hat{f}^{(k)}(x)| \leqq \varphi^{(k)}(x)$ для $x \in I$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta'} (L_n[f(t); x]^{(k)}, \hat{f}^{(k)}(x)) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta' = [a', b'],$$

a', b' — точки непрерывности $\hat{f}^{(k)}(x)$, $a < a' < b' < b$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 1 [1]. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$ и $f_n(x)$, $f(x) \in K_\Delta^2$. Если $f_n'(x)$ и $f'(x)$ непрерывные на отрезке $[a, b]$, то последовательность $\{f_n'(x)\}_1^\infty$ сходится равномерно к $f'(x)$ в каждом сегменте, содержащиемся внутри (a, b).

* Об условиях сходимости последовательности линейных положительных операторов к неограниченной функции смотри также [13].

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим линейный оператор

$$R_n[f(t);\,x]=L_n\left[\int_0^t dt_1\,\ldots\int_0^{t_{k-1}} f(t_k)\,dt_k;\;x\right]^{(k)};\quad k\leqq p.$$

Имея ввиду, что $L_n[f(t);\,x]$ — выпуклый оператор k-го порядка, легко увидеть, что $R_n[f(t);\,x]$ — положительный оператор. Имеем

$$R_n[\hat{f}^{(k)}(t);\,x]=L_n[f(t);\,x]^{(k)}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}L_n[t^i;\,x]^{(k)}. \tag{2}$$

Заметим, что для доказательства теоремы, в силу теоремы B, достаточно установить следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\Delta'}(R_n[t^i;\,x],\,x^i)=0,\quad i=0,\,1,\,2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\Delta'}(R_n[\varphi^{(k)}(t);\,x];\;\varphi^{(k)}(x))=0,$$

т. е. (см. [2]).

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\Delta'}(L_n[t^i;\,x]^{(k)};\;(x^i)^{(k)})=0,\quad \text{для}\quad i=0,\,1,\,2,\ldots,\,k+2, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\Delta'}(L_n[\varphi(t);\,x]^{(k)};\;\varphi^{(k)}(x))=0. \tag{4}$$

Доказательство (3) проводится по существу как в [2]. Так как функции $L_n[\varphi(t);\,x]$ и $\varphi(x)$ — выпуклые m-го порядка для каждого m от 0 до $p+1$, то для доказательства (4) достаточно применить k раз лемму 1.

Теорема доказана.

Замечание. Если функции 1, $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$ образуют систему Чебышева на любом отрезке $[\alpha,\,\beta]$, $[\alpha,\,\beta]\subset I$ и $|\varphi_0(x)|\leqq\varphi(x)$ для $x\in I$, то в условии теоремы 1 функции 1, x, x^2 и $\varphi(x)$ можно заменить только тремя функциями 1, $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$.

Дадим некоторые приложения теоремы 1.

Рассмотрим следующие операторы:

1) Общий оператор Баскакова ([5], [6])

$$B_n^*[f(t);\,x]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k\,\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}\,f\left(\frac{k}{n}\right),$$

где $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ — последовательность функций действительного переменного, для которой:

а) $\varphi_n(z)$ — аналитическая в замкнутом круге $|z-R|\leqq R$;

б) $\varphi_n(0)=1$;

в) $(-1)^k\varphi_n^{(k)}(x)\geqq 0,\quad k=0,\,1,\,2,\,3\ldots,\;x\in[0,\,R]$;

г) $-\varphi_n^{(k)}(x)=n\,\varphi_{m_n}^{(k-1)}(1+\alpha_{kn}(x))$, $k=1, 2, 3, \ldots$, где $x\in[0, R]$ и $\alpha_{kn}(x)$ равномерно относительно k и x стремятся к нулю;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{m_n}=1$;

2) специальный оператор Баскакова ([5], [6])

$$\overline{B}_n[f(t);\ x]=\sum_{k=0}^{\infty}{}'\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\,f\left(\frac{k}{n}\right);$$

3) оператор Миракьяна — Саса [5]

$$M_n[f(t);\ x]=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{(nx)^k}{k!}\,f\left(\frac{k}{n}\right);$$

4) Гамма — оператор [11]

$$G_n[f(t);\ x]=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}e^{-xu}\,u^n f\left(\frac{n}{u}\right)du.$$

Операторы $\overline{B}_n$ и M_n — частные случаи оператора B_n^*.

В [10], [11] показано, что операторы B_n^*, $\overline{B}_n$, M_n и G_n — выпуклые произвольного порядка.

Нетрудно подсчитать, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\Delta(B_n^*[t^i;\ x],\ x^i)=O,\quad \Delta=[a, b],\quad 0\leqq a<b\leqq R,\quad i=0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда, применяя теорему В, получим

Теорема 2; 1. Пусть $f(x)\in C_\Delta^{[0,\infty]}$ и $f(x)=O(x^m)$ для $x\to\infty$ $m\geqq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\Delta(B_n^*[f(t);\ x],\ f(x))=O,\quad \Delta=[a, b];\ 0\leqq a<b\leqq R.$$

Теорема 2; 2. Пусть $f(x)\in D_\Delta^{[0,\infty]}$ и $f(x)=O(x^m)$ для $x\to\infty$, $m\geqq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}r_\Delta(B_n^*[f(t);\ x],\ f(x))=O,\quad \Delta=[a, b];\ 0\leqq a<b\leqq R.$$

Отметим, что теорема 2; 1 для $f(x)=O(x^2)$ приведена в [12].

Теперь применим теорему 1 для операторов B_n^*, $\overline{B}_n$, M_n и G_n. Из теоремы 1, 2; 1 и 2; 2 получаем

Теорема 3; 1. Пусть $f^{(k)}(x)\in C_\Delta^{[0,\infty]}$ и $f^{(k)}(x)=O(x^m)$ для $x\to\infty$, $m\geqq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\Delta(B_n^*[f(t);\ x]^{(k)},\ f^{(k)}(x))=O,\quad \Delta=[a, b];\ 0<a<b<R.$$

Теорема 3; 2. Пусть $\hat{f}^{(k)}(x) \in D_{\Delta}^{[0,\infty)}$ и $\hat{f}^{(k)}(x) = O(x^m)$ для $x \to \infty$ $m \geq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta}(B_n^*[f(t);\ x]^{(k)},\ f^{(k)}(x)) = O,\ \Delta = [a, b];\ 0 < a < b < R.$$

Отметим, что теорема 3; 1 для $m = 2$ доказана в [12].

Теоремы 3; 1 и 3; 2 справедливы и для оператора $G_n[f(t);\ x]$. Это следует из теоремы 1 и результатов из [11].

Теорема 4; 1. Пусть $f^{(k)}(x) \in C_{\Delta}^{[0,\infty)}$ и $f^{(k)}(x) = O(e^{mx})$ для $x \to \infty$, $m \geqq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta}(\overline{B}_n[f(t);\ x]^{(k)},\ f^{(k)}(x)) = O,\ \Delta = [a, b],\ 0 < a < b < \infty.$$

Теорема 4; 2. Пусть $\hat{f}^{(k)}(x) \in D^{[0,\infty)}$ и $\hat{f}^{(k)}(x) = O(e^{mx})$ для $x \to \infty$, $m \geqq 0$ — произвольное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta}(\overline{B}_n[f(t);\ x]^{(k)},\ \hat{f}^{(k)}(x)) = O,\ \Delta = [a, b],\ 0 < a < b < \infty.$$

Теоремы 4; 1 и 4; 2 следуют из теоремы 1 и результатов из [4]. Теоремы 4; 1 и 4; 2 сохраняются и для операторов $M_n[f(t);\ x]$.

§ 2.

В связи с теоремой 1 можно поставить вопрос: Если потребуем только существование $f'(x_0)$ в данной точке x_0, при сохранении всех требований для L_n (выпуклость и т. д.), то будет ли иметь место

$$\lim_{n\to\infty} L_n'[f(t);\ x_0] = f'(x_0).$$

Ответ на этот вопрос отрицательний, как показывает следующий пример. Рассмотрим функцию $\psi(x) = (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}$ на интервале $[0, \infty)$ и произвольную последовательность $\{L_n\}_1^{\infty}$ линейных положительных операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 1 для $p = 2$. Пример такой последовательности является общий оператор Баскакова $B_n^*[f(t);\ x]$. Пусть теперь $\{x_k\}_1^{\infty}$ — последовательность чисел, для которых

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 1,\ \psi'(x_k) \geqq \frac{1}{2},\quad x_k \geqq 1.$$

Имея ввиду теорему 1, получаем, что для каждого k существует индекс n_k, для которого

$$L_{n_k}'[\psi(t);\ x_k] \geqq \frac{1}{4};\ n_k < n_{k+1}.$$

Рассмотрим теперь последовательность линейных положительных операторов

$$\tilde{L}_{n_k}[f(t);\ x]=L_{n_k}[f(t);\ x+x_k-1].$$

Очевидно $\tilde{L}_{n_k}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и выпуклые соответственного порядка.

Но $\tilde{L}'_{n_k}[\psi(t);\ 1]=L'_{n_k}[\psi(t);\ x_k]\geqq\frac{1}{4}>\psi'(1)=O$, а это означает, что $\tilde{L}'_{n_k}[\psi(t);\ 1]$ при $n_k\to\infty$ не стремится к $\psi'(1)=O$.

Этим показано, что локальное существование производной, даже при наличии выпуклости линейных положительных операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 1, не обеспечивает сходимость.

§ 3.

В этом параграфе получим оценку для хаусдорфового расстояния между $f'(x)$ и $B'_n(f;\ x)$, где

$$B_n(f;\ x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

— полином Бернштейна для $f(x)$.

Сначала докажем некоторые вспомогательные предложения.

Обозначим через $f_h(x)$ функцию Стеклова для $f(x)$:

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt.$$

Если $f(x)$ задана на $[0,\ 1]$, ее можно продолжить на $[-h,\ 1+h]$ с сохранением $\mu_f(\delta)$, а именно

$$f(x)=f(0),\ x\in[-h,\ 0]\ \text{и}\ f(x)=f(1),\ x\in[1,\ 1+h].$$

Следовательно можно считать, что $f_h(x)$ задана также на $[0,\ 1]$.

Лемма 2. Имеет место неравенство

$$\mu_{f_h}(\delta)\leqq\mu_f(\delta+2h). \tag{5}$$

Доказательство. По определению [1]:

$$\mu_f(\delta)=\sup_{\substack{x'\leqq x\leqq x''\\ x''-x'\leqq\delta}}\{|f(x)-f(x')|+|f(x)-f(x'')|-|f(x')-f(x'')|\}.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Существуют $\delta>0$ и точки $x',\ x'',\ x''',\ x''-x'\leqq\delta$, $x'\leqq x'''\leqq x''$ такие, что

$$(6)\qquad |f_h(x')-f_h(x''')|+|f_h(x'')-f_h(x''')|-|f_h(x')-f_h(x'')|\geqq \mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon.$$

Пусть для определенности $f_h(x''')>f_h(x'')$, $f_h(x''')>f_h(x')$; тогда (6) эквивалентно неравенствам

$$(7)\qquad \begin{aligned} f_h(x''')-f_h(x') &\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\} \\ f_h(x''')-f_h(x'') &\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\} \end{aligned}$$

Из (7) получаем:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2h}\left\{\int_{\alpha_1}^{x'''+h} f(t)\,dt-\int_{x'-h}^{\beta_1} f(t)\,dt\right\}\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}, \\ &\frac{1}{2h}\left\{\int_{x'''-h}^{\beta_2} f(t)\,dt-\int_{\alpha_2}^{x''+h} f(t)\,dt\right\}\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\{x'+h,\ x'''-h\}, \\ \alpha_2 &= \max\{x'''+h,\ x''-h\}, \\ \beta_1 &= \min\{x'''-h,\ x'+h\}, \\ \beta_2 &= \min\{x'''+h,\ x''-h\}. \end{aligned}$$

Из (8) следует

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\theta_1}{2h}\{\max_{\alpha_1\leqq t\leqq x'''+h} f(t)-\min_{x'-h\leqq t\leqq \beta_1} f(t)\}\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}, \\ &\frac{\theta_2}{2h}\{\max_{x'''-h\leqq t\leqq \beta_2} f(t)-\min_{\alpha_2\leqq t\leqq x''+h} f(t)\}\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 0\leqq \theta_1 &= x'''+h-\alpha_1=\beta_1-x'+h\leqq 2h \\ 0\leqq \theta_2 &= \beta_2-x'''+h=x''+h-\alpha_2\leqq 2h \end{aligned}$$

(9) дает

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\max_{x'''-h\leqq t\leqq x'''+h} f(t)-\min_{x'-h\leqq t\leqq \beta_1} f(t)\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}, \\ &\max_{x'''-h\leqq t\leqq x'''+h} f(t)-\min_{\alpha_2\leqq t\leqq x''+h} f(t)\geqq \frac{1}{2}\{\mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Из (10) и определения $\mu_f(\delta)$ следует
$\mu_f(\delta+2h) \geqq \mu_{f_h}(\delta)-\varepsilon$, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ дает (5).

Теперь докажем:

Теорема 2. Если $f'(x)$ существует, то имеет место соотношение

$$r_\Delta(B'_n(f;\, x),\, f'(x)) = O\left(\mu_{f'}\left(\lambda_{n-1}+\frac{2}{n}\right)+\lambda_n\right),$$

где

$$\lambda_n = n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln\ln n}}, \quad \Delta=[0,\, 1].$$

Доказательство. В [1] показано, что

$$r_\Delta(B_n(f;\, x),\, f(x)) = O\,(\mu_f(\lambda_n)+\lambda_n),\ \Delta=[0,\, 1]. \tag{10}$$

Так как

$$B'_n(f;\, x) = B_{n-1}\left(\tilde{f}'_{\frac{1}{n}};\, x\right), \tag{11}$$

где

$$\tilde{f}'_{\frac{1}{n}}(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)\,dt,$$

в силу леммы 2

$$\mu_{\tilde{f}'_{\frac{1}{n}}}(\delta) \leqq \mu_{f'}\left(\delta+\frac{2}{n}\right).$$

С другой стороны из теоремы 22 [1] следует, что

$$r_\Delta(f_h,\, f) \leqq \mu_f(4h)+h, \quad \Delta=[0,\, 1]. \tag{13}$$

Используя (10) — (13), получаем

$$r_\Delta(B'_n(f;\, x),\, f'(x)) \leqq r_\Delta\left(B_{n-1}\left(\tilde{f}'_{\frac{1}{n}};\, x\right),\, \tilde{f}'_{\frac{1}{n}}(x)\right)+$$

$$+r_\Delta\left(\tilde{f}'_{\frac{1}{n}}(x),\, f'(x)\right) = O\left(\mu_{f'}\left(\lambda_{n-1}+\frac{2}{n}\right)+\lambda_n\right), \quad \Delta=[0,\, 1],$$

что доказывает теорему.

Считаем приятным долгом поблагодарить Бл. Сендову за внимания к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, XXIV, 5 (149), 1969, 141—178.
2. Сендов, Бл. и Попов, В.: О сходимости производных линейных положительных операторов. Докл. Болг. АН, 22, № 5, (1969), 507—510.
3. Веселинов, В. М.: Аппроксимирование неограниченных функций при помощи линейных положительных операторов относительно хаусдорфова расстояния. Докл. Болг. АН, 22, № 5, (1969), 499—502.
4. Веселинов, В. М.: О сходимости некоторых последовательностей линейных положительных операторов. Mathematica (Cluj) (в печати).
5. Коровкин, П. П.: Линейные операторы и теория приближений. Москва, 1959.
6. Баскаков, В. А.: Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. ДАН СССР, 113, № 2 (1957), 249—251.
7. Ермаков, П. В.: Об условиях сходимости линейных положительных операторов на неограниченных множествах. Сб. „Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций", Баку, 1965, 146—151.
8. T. Popoviciu, T.: Les fonctions convexes. Paris, 1945.
9. Schurer, F.: On linear positive operators in approximation theory. Dissertation, Delft, 1965.
10. Lupas, A.: Some properties of the linear positive operators, I, II. Mathematica (Cluj); 9 (32), 1, 1967, 77—83; 9 (32), 2, 1967, 295—298.
11. Lupas, A. und Müller, M.: Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren, Math. Zeitschr., 98 (1967), 208—226.
12. Martini, R. On the approximation of functions together with their derivatives by certain linear positive operators. Indagationes mathematicae, XXXI, 5 (1969), 473—481.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

SOME REMARKS ON THE DERIVATIVES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

V. A. Popov and V. M. Veselinov

(SUMMARY)

The convergence conditions of sequences of derivatives of linear positive operators to unbounded functions in uniform and Hausdorff metric are discussed in the paper. It is shown, that the conditions for convexity are unsufficient to ensure the convergence of sequences of derivatives of operators, if only local existence of derivative of the function is required. An estimate is obtained for the Hausdorff distance between the derivative of Bernstein polynomials and the derivative of the function, depending on the modulus of nonmonotonicity of function.