ВЪРХУ ПОЛИНОМИТЕ НА НАЙ-ДОБРО ПРИБЛИЖЕНИЕ ОТНОСНО ХАУСДОРФОВО РАЗСТОЯНИЕ

Борислав Д. Боянов

Целта на настоящата работа е да изучи свойствата, които характеризират полиномите на най-добро приближение на точкови съвкупности по отношение на хаусдорфовото разстояние. Разглежда се и въпросът за единственост на тези полиноми.

Нека с Δ означим крайния затворен интервал $[a, b]$. Както в [1], да означим с F_Δ съвкупността от всички ограничени и затворени точкови множества в равнината, които са изпъкнали по отношение на оста Y и чиято проекция върху X съвпада с Δ. Допълнената графика $\bar{f}$ на всяка ограничена и дефинирана в Δ функция $f(x)$ е множество от F_Δ [1].

Нека $F \in F_\Delta$ и (x, y) е произволна точка от равнината, за която $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < y < \infty$. С $(x, y) \div F$ ще бележим хаусдорфовото разстояние от точката до множеството. Определяме го така:

$$|(x, y) \div F| = \min_{(\xi, \eta) \in F} \|(x, y) - (\xi, \eta)\|_0,$$

където

$$\|(x, y) - (\xi, \eta)\|_0 = \max[|x - \xi|, |y - \eta|].$$

$$\operatorname{sign}((x, y) \div F) = \operatorname{sign}(y - \eta),$$

където (x, η) е произволна точка от F. Тъй като $F \in F_\Delta$, то разстоянието е определено еднозначно.

Ако $F \in F_\Delta$, $x \in \Delta$, то с F_x ще означаваме множеството от точки $(x, y) \in F$.

Нека $F \in F_\Delta$, $G \in F_\Delta$. Със символа $F(x) \div G(x)$ ще бележим разстоянието от множеството F до множеството G в точката x, което определяме по следния начин:

$$|F(x) \div G(x)| = \max[\max_{A \in F_x} |A \div G|, \max_{A \in G_x} |F \div A|].$$

Ако този максимум се достига за точка $A \in F$, то

$$\operatorname{sign} F(x) \div G(x) = \operatorname{sign} A \div G;$$

ако се достига за точка $B \in G$, то

$$\operatorname{sign} F(x) \div G(x) = \operatorname{sign} F \div B,$$

Вижда се, че разстоянието не се определя еднозначно. Може да се случи $F(x) \dotdiv G(x)$ да бъде равно на t и на $-t$ едновременно. Ние винаги ще приемаме по-нататък, че равенството $F(x) \dotdiv G(x) = \lambda$ е изпълнено, когато λ е стойност на $F(x) \dotdiv G(x)$.

С помощта на въведените по-горе означения хаусдорфовото разстояние между две множества F и G може да се определи по следния начин:

$$r(F, G) = \max_{x \in \Delta} |F(x) \dotdiv G(x)|.$$

По аналогичен начин се дефинира в [2] хаусдорфово разстояние между две непрекъснати функции.

Да означим с H_n множеството от всички алгебрични полиноми със степен, по-малка или равна на n. Ако $Q(x)$ е непрекъсната функция, то с Q ще означаваме множеството от точки (x, y), които принадлежат към графиката на $Q(x)$, т. е. такива, за които $y = Q(x)$.

Теорема 1. Нека $F \in F_\Delta$, $P(x) \in H_n$ и λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n+2)$ са положителни числа. Ако съществуват $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b$$

такива, че

a) $$P(\xi_k) \dotdiv F(\xi_k) = (-1)^k \varepsilon \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+2),$$

където ε е $+1$ или -1,

b) $$\xi_{k+1} - \xi_k > \lambda_k + \lambda_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

то за всеки полином $Q(x) \in H_n$ имаме

$$r(F, Q) \geqq \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}\}.$$

Доказателство. Допускаме, че има полином $Q(x) \in H_n$, за който

(1) $$r(Q, F) < \min_k \lambda_k.$$

Ще покажем, че на всяка точка ξ_k съответствува точка t_k такава, че

(2) $$\operatorname{sign}[P(t_k) - Q(t_k)] = (-1)^k \varepsilon.$$

Фиксираме k. Да приемем, че $(-1)^k \varepsilon = 1$. Разсъжденията протичат аналогично, когато $(-1)^k \varepsilon = -1$. Тъй като по дефиниция

$$|P(\xi_k) \dotdiv F(\xi_k)| = \max\left[|(\xi_k, P(\xi_k)) \dotdiv F|, \max_{A \in F_{\xi_k}} |P \dotdiv A|\right],$$

то възможни са следните два случая:

(3) $$|P(\xi_k) \dotdiv F(\xi_k)| = |(\xi_k, P(\xi_k)) \dotdiv F|,$$

(4) $$|P(\xi_k) \dotdiv F(\xi_k)| = \max_{A \in F_{\xi_k}} |P \dotdiv A|.$$

Да допуснем, че е изпълнено (3). Тогава

$$(\xi_k,\ P(\xi_k)) \div F = \lambda_k.$$

Оттук следва, че ако $(x, y) \in F$ и $x \in I_k$, $I_k = (\xi_k - \lambda_k,\ \xi_k + \lambda_k)$, то

$$y < P(\xi_k) - \lambda_k. \tag{5}$$

Сега вече е лесно да се види, че е изпълнено неравенството

$$Q(\xi_k) < P(\xi_k).$$

Наистина, ако допуснем противното, би следвало въз основа на (1), че съществува квадрат със страна, по-малка от $2\lambda_k$, и център в $(\xi_k, Q(\xi_k))$, който съдържа точка $(x, y) \in F$. Но това противоречи на (5). Следователно за точката $t_k = \xi_k$ е изпълнено условието (2).

Сега да разгледаме втория случай, когато е изпълнено (4). Нека $(\xi_k, f) \in F$ е точката, за която $P \div (\xi_k, f) = \lambda_k$. Оттук се вижда, че ако $x \in I_k$, то $P(x) \geqq f + \lambda_k$. Тъй като по допускане (1) е изпълнено, то има точка $(t_k,\ Q(t_k))$ такава, че

$$\|(t_k,\ Q(t_k)) - (\xi_k, f)\|_0 < \lambda_k,$$

което влече $t_k \in I_k$ и $Q(t_k) < f + \lambda_k$. Следователно

$$Q(t_k) < P(t_k).$$

Равенството (2) е изпълнено.

От условията на теоремата и $t_k \in I_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+2)$ следва

$$a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+2} \leqq b_1.$$

Полиномът $P(x) - Q(x)$ принадлежи на H_n, не е тъждествено равен на нула и сменя знака си в $n+2$ различни точки. Това противоречи на основната теорема на алгебрата. Теоремата е доказана.

От доказателството на теорема 1 се вижда, че ограниченията, наложени на точките от алтернанса $\{\xi_k\}_1^{n+2}$ в b), могат леко да се отслабят. Достатъчно е вместо b) да бъде изпълнено:

Ако $\xi_i \in \{\xi_k\}_1^{n+2}$, $P(\xi_i) \div F(\xi_i) = P \div (\xi_i,\ y)$, $(\xi_i,\ y) \in F$ и точките ξ_{i-1}, ξ_{i+1} са такива, че

$$(\xi_{i-1},\ P(\xi_{i-1})) \div F = P(\xi_{i-1}) \div F(\xi_{i-1}),$$

$$(\xi_{i+1},\ P(\xi_{i+1})) \div F = P(\xi_{i+1}) \div F(\xi_{i+1}),$$

то $\xi_{i+1} - \xi_i > \lambda_i$, $\xi_i - \xi_{i-1} > \lambda_i$.

Ако за една от съседните на ξ_i точка от алтернанса, да речем за ξ_{i+1}, имаме

$$P(\xi_{i+1}) \div F(\xi_{i+1}) = P \div (\xi_{i+1},\ y), \quad (\xi_{i+1},\ y) \in F,$$

то

$$\xi_{i+1} - \xi_i > \lambda_i + \lambda_{i+1}.$$

Имайки пред вид горната забележка, виждаме, че е вярна следната

Теорема 2. Нека $P(x) \in H_n$, $F \in F_\Delta$ и λ_k $(k=1, 2, \ldots, n+2)$ са положителни числа. Ако съществуват $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b$$

такива, че

$$(\xi_k, P(\xi_k)) \div F = (-1)^k \varepsilon \lambda_k \quad (k=1, 2, \ldots, n+2),$$

то за всеки полином $Q(x) \in H_n$

$$r(Q, F) \geqq \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}\}.$$

Ако в условията на предните две теореми поставим изискването $\lambda_k = r(P, F)$ $(k=1, 2, \ldots, n+2)$, ще получим достатъчни условия, за да бъде полиномът $P(x) \in H_n$ полином на най-добро хаусдорфово приближение. И така като непосредствено следствие от теореми 1 и 2 получаваме

Теорема 3. Нека $F \in F_\Delta$ и $P(x) \in H_n$. Ако съществуват $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b$$

такива, че

$$\xi_{k+1} - \xi_k > 2r(P, F) \qquad (k=1, 2, \ldots, n+1),$$

$$P(\xi_k) \div F(\xi_k) = (-1)^k \varepsilon r(P, F) \quad (k=1, 2, \ldots, n+2),$$

то

$$r(P, F) = E_n^*(F) = \inf_{Q \in H_n} r(Q, F).$$

Теорема 4. Нека $F \in F_\Delta$ и $P(x) \in H_n$. Ако съществуват $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b$$

такива, че

$$(\xi_k, P(\xi_k)) \div F = (-1)^k \varepsilon r(P, F) \qquad (k=1, 2, \ldots, n+2),$$

то

$$r(P, F) = E_n^*(F).$$

Ако на множеството F се наложат някои ограничения, то в теореми 3 и 4 може да се твърди, че $P(x)$ е единствен оптимален полином.

Теорема 5. Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в Δ функция и съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки нейни две точки на прекъсване t_1 и t_2, за които $f(t_i) > f(x)$ $(i=1, 2)$ или $f(t_i) < f(x)$ при $x \in (t_1, t_2)$, да имаме $|t_1 - t_2| > \delta$. Ако $2E_n^*(f) < \delta$ и за полинома $P(x) \in H_n$ има алтернанс от описания вид, то $P(x)$ е единствен полином на най-добро хаусдорфово приближение.

Доказателство. Допускаме, че има полином $Q(x) \in H_n$, $Q(x) \not\equiv P(x)$, за който $r(Q, f) = E_n^*(f) = E$.

Ако $P(\xi_k) \div \bar{f}(\xi_k) = P \div (\xi_k, y) = E$, $(\xi_k, y) \in \bar{f}$, то както в теорема 1 намираме точка $t_k \in [\xi_k - E, \xi_k + E]$, за която $Q(t_k) \leqq P(t_k)$.

Нека

$$P(\xi_k) \dot{-} \overline{f}(\xi_k) = (\xi_k, P(\xi_k)) \dot{-} \overline{f} = E, \qquad 1 \leqq k \leqq n+2.$$

Да допуснем, че

$$Q(\xi_k) > P(\xi_k).$$

От $(\xi_k, P(\xi_k)) \dot{-} \overline{f} = E$ следва, че ако $M = (x, y) \in \overline{f}$, то

$$y \leqq P(\xi_k) - E \quad \text{за} \quad x \in (\xi_k - E, \xi_k + E).$$

Значи точките (p, q), за които

$$\|(\xi_k, Q(\xi_k)) - (p, q)\|_0 = E, \quad (p, q) \in \overline{f},$$

трябва да имат абсциса $\xi_k - E$ или $\xi_k + E$ и P е точка на прекъсване на $f(x)$. Нека $P = \xi_k + E$. Тъй като разстоянието между две точки на прекъсване е по-голямо от $2E$, то има $\delta_1 > 0$ такова, че

$$f(x) \leqq P(\xi_k) - E, \quad x \in (\xi_k - \delta_1, \xi_k + \delta_1).$$

Но тогава за достатъчно малки $\delta_2 > 0$ ще имаме

$$|(\xi_k - \delta_2, Q(\xi_k - \delta_2)) \dot{-} \overline{f}| > E,$$

което противоречи на избора на $Q(x)$. Следователно

$$Q(\xi_k) \leqq P(\xi_k).$$

Тук разглеждаме само случая $(-1)^k \varepsilon = 1$. Ако $(-1)^k \varepsilon = -1$, то разсъжденията са напълно аналогични.

Намерихме $n+2$ точки, в които $P(x) - Q(x)$ или се анулира, или сменя знака си. Следователно $P(x) \equiv Q(x)$. Полученото противоречие доказва теоремата.

Сега ще покажем, че съществуването на алтернанс е и необходимо условие за един широк клас от функции.

Нека $F \in F_\Delta$, $\delta > 0$. С $F_\square(\delta)$ ще означаваме множеството от точки (x, y), за които $x \in \Delta$, $-\infty < y < \infty$ и $|(x, y) \dot{-} F| \leqq \delta$.

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a, b]$ функция. С $C_\Delta[f, \delta]$ ще бележим класа от тези непрекъснати функции $h(x)$, за които $h \in \overline{f}_\square(\delta)$ и

$$f(a) - \delta \leqq h(a) \leqq f(a) + \delta, \quad f(b) - \delta \leqq h(b) \leqq f(b) + \delta.$$

Теорема 6. Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a, b]$ функция, непрекъсната отдясно в a и отляво в b. Ако съществува такова $\delta_0 > 0$, че за всяко $\delta < \delta_0$ и за всяка функция $h(x) \in C_\Delta[f, \delta]$ да имаме $r(h, f) \leqq \delta$, то за достатъчно големи n функцията $f(x)$ има единствен полином на най-добро приближение. И за този полином съществува алтернанс, т. е. съществуват $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b,$$

за които

$$(\xi_k, P(\xi_k)) \dot{-} \overline{f} = (-1)^k \varepsilon E_n^*(f) \quad (k = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Доказателство. Нека $\delta > 0$. Дефинираме

$$S'(f, \delta)=\{ (x, y) / x \in (a, b),\ y= \max_{(x,\eta)\in \bar{f}_{\square}(\delta)} \eta;\ (a, f(a)+\delta),\ (b, f(b)+\delta) \},$$

$$I'(f, \delta)=\{ (x, y) / x \in (a, b),\ y= \min_{(x,\eta)\in \bar{f}_{\square}(\delta)} \eta;\ (a, f(a)-\delta),\ (b, f(b)-\delta) \}.$$

Да прибавим към $S'(f, \delta)$ и $I'(f, \delta)$ техните точки на сгъстяване и получените множества означим с $S(f, \delta)$ и съответно $I(f, \delta)$. Когато е ясно за кои $f(x)$ и δ става дума, ще използваме означенията S и I.

В лемите, които ще докажем по-долу, ще предполагаме, че функцията $f(x)$ удовлетворява изискванията на теорема 6 а $h(x) \in C_{\Delta}[f, \delta]$.

Лема 1. Множеството от точки $(t, h(t))$, $t \in \Delta$, за които $|(t, h(t)) \div \bar{f}|=\delta$, съвпада със сечението на h и $S \cup I$.

Доказателство. Нека $|(t, h(t)) \div \bar{f}|=\delta$. Допускаме, че $T \notin S \cup I$, $T=(t, h(t))$. Тогава има две възможности:

а) Съществува квадрат с център в точка от $\bar{f}$ и страна 2δ, който съдържа T във вътрешността си. А това значи, че $|T \div \bar{f}| < \delta$, което противоречи на условието.

в) T лежи във вътрешността на областта, образувана от квадратите K_1 и K_2 с центрове съответно в $M_1, M_2 \in \bar{f}$ и страна 2δ. Но има поне една точка $M=(t, \eta) \in \bar{f}$ и T не е вътрешна за квадрата K с център в M и страна 2δ, тъй като $|T \div \bar{f}|=\delta$. И така $K_1, K_2, K \in \bar{f}_{\square}(\delta)$ и K се намира под или над вътрешната точка T на $K_1 \cup K_2$. Тогава можем да намерим функция $g(x) \in C_{\Delta}[f, \delta]$ такава, че $|g \div M| > E$. Това противоречи на избора на $f(x)$.

Вярно е и обратното: ако $T=(t, h(t)) \in S \cup I$, то $|T \div \bar{f}|=\delta$.

Наистина, ако $|T \div \bar{f}| < \delta$, то значи, че има квадрат с център в $\bar{f}$ и страна 2δ, който съдържа T във вътрешността си, и следователно T не може да принадлежи към $S \cup I$. Противоречието доказва нашето твърдение, а с това и лемата

Оттук става ясно, че въпросът за съществуване на екстремални точки, т. е. такива $(t, h(t))$, $t \in \Delta$, за които $|(t, h(t)) \div \bar{f}|=\delta$, е въпрос за съществуване на общи точки на графиката на $h(x)$ и множеството $S \cup I$.

Лема 2. Ако точката $M \in \bar{f}$ и $|M \div h|=\delta$, то има поне една точка $(t, h(t)) \in S \cup I$.

Доказателство. Да допуснем, че h няма общи точки с $S \cup I$. Тогава квадратът с център в M и страна 2δ не би могъл да се допира или пресича с $S \cup I$ поне в едната си хоризонтална страна. Но в такъв случай можем да намерим функция $g(x)$ от $C_{\Delta}[f, \delta]$ и такава, че $|M \div g| > \delta$, което влече $r(g, f) > \delta$. Достигнахме до противоречие с условията на теорема 6. Лемата е доказана.

След установените по-горе леми твърденията на теоремата стават очевидни. Известно е, че ако $F \in F_\Delta$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E_n^*(F)=0$. Следователно съществува цяло число N такова, че за всяко $n \geqq N$ да имаме $E_n^*(f)<\delta_0$.

Нека $n\geqq N$, $P(x)\in H_n$ и $E=E_n^*(f)=r(P,f)$. Да допуснем, че за полинома $P(x)$ не могат да се намерят $n+2$ точки на алтернанс, т. е. има най-много $m+2$, $m<n$, различни точки, в които

$$(\xi_k,\ P(\xi_k))\dot{-}\bar{f}=(-1)^k \varepsilon E \quad (k=1,2,\ldots,m+2).$$

От лема 1 следва, че графиката на полинома $P(x)$ се допира до $S(f,E)$ и $I(f,E)$ $m+2$ пъти. Но тъй като $m<n$, то можем да намерим полином $P_1(x)\in H_n$ [3] такъв, че графиката на полинома $Q(x)=P(x)+P_1(x)$ да няма нито една обща точка с $S(f,E)\cup I(f,E)$. От леми 1 и 2 би следвало тогава, че $r(Q,f)<E$, което противоречи на приемането, че $P(x)$ е полином на най-добро хаусдорфово приближение. Следователно съществуват $n+2$ точки

$$a\leqq\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n+2}\leqq b,$$

в които графиката на $P(x)$ се допира на смени до $S(f,E)$ и $I(f,E)$. Според лема 1

$$(\xi_k,\ P(\xi_k))\dot{-}\bar{f}=(-1)^k \varepsilon E \quad (k=1,2,\ldots,n+2).$$

Тъй като $f(x)$ удовлетворява изискванията на теорема 5, то следва, че $P(x)$ е единствен оптимален полином.

Известно е, че всяка монотонна функция има единствен полином на най-добро приближение [4]. Вижда се лесно, че този резултат е непосредствено следствие от теорема 6.

Теорема 7. Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a,b]$ функция, непрекъсната отдясно в a и отляво в b. Нека съществуват краен брой точки

$$a=z_0<z_1<\ldots<z_m<z_{m+1}=b$$

такива, че $f(x)$ е монотонна в $[z_k, z_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,m)$ и не е растяща (намаляща) в два съседни интервала. За достатъчно големи n функцията $f(x)$ има единствен полином на най-добро приближение.

Доказателство. Съществува $\delta_0>0$ такова, че за всяко $\delta\leqq\delta_0$ няма триъгълник с върхове в z, z', $z''\in\{z_k\}_1^m$, който да се съдържа изцяло в $\bar{f}_\square(\delta)$. Нека $\delta<\delta_0$. Да означим с f_δ множеството от тези точки $(x,y)\in\bar{f}$, за които няма точка $(x_1,y)\in\bar{f}$ такава, че $|x_1-x|<2\delta$. Нека $h(x)\in C_\Delta[f,\delta]$.

7.1. Ако $M\in f_\delta$ и $|M\dot{-}h|=\delta$, то има поне една точка от h, която принадлежи и към $S\cup I$.

Наистина, ако $M=(x,y)\in f_\delta$, то или

$$(x-\delta,\ y+\delta) \in S, \quad (x+\delta,\ y-\delta) \in I,$$

или

$$(x-\delta,\ y-\delta) \in I, \quad (x+\delta,\ y+\delta) \in S,$$

защото f_δ се състои само от монотонни части на графиката на $f(x)$. Понеже има точка от h, за която $\|(\xi,\ h(\xi))-(x,\ y)\|_0=\delta$, и $h(x)$ е непрекъсната, то $(\xi, h(\xi))$ трябва да съвпада с една от горните четири точки.

7.2. Ако $|(\xi, h(\xi)) \dotdiv \bar{f}|=\delta$, то $(\xi, h(\xi)) \in S \cup I$ и, обратно, ако $(\xi, h(\xi)) \in S \cup I$, то $|(\xi, h(\xi)) \dotdiv \bar{f}|=\delta$.

Доказва се аналогично на лема 1.

7.3. Нека $M \in f_\delta$ и не съществува точка $(\xi, h(\xi)) \in S \cup I$, за която $\|M-(\xi, h(\xi))\|_0=\delta$. Ако две точки $M_1=(x_1, y_1)$ и $M_2=(x_2, y_2)$ имат това свойство, то за всяко $z=(z', z'') \in \{z_k\}_1^m$,

$$x_1 \leqq z',\ x_2 \leqq z' \quad \text{или} \quad x_1 \geqq z',\ x_2 \geqq z'.$$

Да допуснем, че има точка $(z', z'') \in \{z_k\}_1^m$ такава, че $x_1<z'<x_2$, и нека f има локален максимум в (z', z''). Тъй като точките $(\xi_i, h(\xi_i))$, за които $\|(\xi_i, h(\xi_i))-(x_i, y_i)\|_0=\delta$ $(i=1, 2)$, не принадлежат към $S \cup I$, то $\xi_1=x_1+\delta$, $\xi_2=x_2-\delta$. Но $M_1, M_2 \in f_\delta$. Следователно $x_2-\delta<x_1+\delta$, което дава $\xi_1>\xi_2$. От непрекъснатостта на $h(x)$ следва, че съществува точка $\xi_1>\xi>\xi_2$ такава, че

$$\|(\xi, h(\xi))-M_1\|_0<\delta,$$

което противоречи на условието. Твърдението е доказано.

Понеже $\bar{f} \in F_\Delta$, то има такова цяло число N, че $E_n^*(f)<\delta_0$. Нека $n \geqq N$ и полиномът $P(x) \in H_n$ да бъде полином на най-добро хаусдорфово приближение на $f(x)$. Ще докажем, че има $n+2$ точки

$$a \leqq \xi_1<\xi_2< \dots <\xi_{n+2} \leqq b$$

такива, че

$$P(\xi_k) \dotdiv \bar{f}(\xi_k)=(-1)^k \varepsilon\, r(f, P) \quad (k=1, 2, \dots, n+2).$$

Допускаме, че има най-много $i+2$ такива точки $(i<n)$. Избираме точките η_k $(k=1, 2, \dots, i+1)$ така, че

$$\xi_1<\eta_1<\xi_2< \dots <\eta_{i+1}<\xi_{i+2}$$

и $(\xi, P(\xi)) \dotdiv \bar{f}$ да приема в интервала (η_k, η_{k+1}), $1 \leqq k \leqq i+1$, максималната стойност E само със знак $+$ или знак $-$. Означаваме

$$P_1(x)=(x-\eta_1)(x-\eta_2)\dots(x-\eta_{i+1}).$$

$P_1(x) \in H_n$, тъй като $i+1 \leqq n$. При подходящ знак и достатъчно малки абсолютни стойностти на λ за полинома $Q(x)=P(x)+\lambda P_1(x)$ ще имаме $r(Q, f)<E$.

Наистина:

а) Няма да има точка $(\xi, Q(\xi)) \in S \cup I$, тъй като λ е така избрано, че точките от $P \cap S$ да се смъкнат надолу, а тези от $P \cap I$ да се издигнат нагоре и сечението на Q и $S \cup I$ да си остане празно.

в) Ако $M \in f_E$ и $|P \dot{-} M| = E$, то поради специалния избор на $Q(x)$ ще имаме $|Q \dot{-} M| < |P \dot{-} M| = E$. Числото λ избираме толкова малко, че за всички $M \in f_E$, за които $|P \dot{-} M| < E$, да имаме $|Q \dot{-} M| < E$. Не може да има и точка $M \in f_E$, за която $|M \dot{-} Q| = E$, понеже от 7.1. ще следва, че Q и $S \cup I$ имат обща точка, а това противоречи на а).

Получихме, че за всяко $M \in \bar{f}$ и $(\xi, Q(\xi))$

$$|M \dot{-} Q| < E, \quad |(\xi, Q(\xi)) \dot{-} \bar{f}| < E.$$

Оттук $r(f, Q) < E$. Противоречието показва, че за полинома $P(x)$ съществува алтернанс от $n+2$ точки. От теорема 5 следва единствеността на оптималния полином. Теоремата е доказана.

Авторът изказва благодарност на Бл. Сендов и В. Попов за интереса, проявен към тази работа, и за някои критични забележки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, 24, вып. 5 (149), (1969), 141—178.
2. Сендов, Бл., Попов, В.: Аналог теоремы С. М. Никольского для приближении функций алгебраическими многочленами в хаусдорфовой метрике. Докл. Болг. АН (в печати).
3. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций. Москва — Ленинград, 1949.
4. Яков, С. М.: Някои въпроси от теорията на апроксимирането с алгебрични полиноми. Соф. унив., дипломна работа, 1963.

Постъпила на 10 XI. 1970 г.

ON THE POLYNOMIAL OF BEST APPROXIMATION RELATIVE TO HAUSDORFF DISTANCE

B. D. Boyanov

(SUMMARY)

The properties that characterize the polynomials of best approximation are studied. Theorem 1 and Theorem 2 are analogues of de la Vallée-Poussin's theorem about an estimate for the best uniform approximation. These theorems imply two sufficient and necessary conditions for the polynomial $P(x) \in H_n$ to be a polynomial of best Hausdorff appro-

ximation for the set $F \in F_\Delta$. Theorems 6 and 7 define a wide class of functions that have an unique optimal polynomial. The following statement is proved:

Let $f(x)$ be a piecewise monotonic, bounded in $[a, b]$ function, continuous at the points a and b. For a sufficiently great integer n $f(x)$ has an unique optimal polynomial and a sufficient and necessary condition for the polynomial $P(x) \in H_n$ to be optimal is the existence of points

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+2} \leqq b$$

such that

$$P(\xi_i) \div f(\xi_i) = (-1)^i \varepsilon r(P, \bar{f}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2).$$