ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА ТОЧКИТЕ ОТ P^4 ЧРЕЗ ШЕСТОРКИ ТОЧКИ ОТ РАВНИНА С ПОМОЩТА НА ПРОСТРАНСТВЕНА КРИВА ОТ ЧЕТВЪРТИ КЛАС

Анани Лангов

В [1] е построено изображение на P^3 върху равнина, в което на точките от P^3 отговарят тройки точки от една равнина, съединителните прави на които принадлежат на крива C^2 от втори клас. Правите от P^3 се изобразяват с помощта на криви от втора степен, в които могат да се впишат триъгълници със страни, които принадлежат на C^2.

В тази статия се прави естествено обобщение на това изображение. Точките от P^4 сега ще се изобразяват с помощта на шесторки точки, които са върхове на четиристранници със страни, принадлежащи на крива C^2 от втори клас. Правите от P^4 ще се изобразяват чрез криви от трета степен, в които могат да се впишат ∞^1 четиристранници със страни, принадлежащи на C^2.

1. Увод

1. Нека C^4 е крива от четвърти клас в P^4 и t е нейна допирателна права, π^2 — нейна оскулачна двумерна равнина, която минава през t, а P^3 е хиперравнина на P^4, минаваща през π^2 и принадлежаща на C^4. Известно е, че хиперравнината P^3 се пресича от останалите хиперравнини на C^4 в съвкупност равнини, които принадлежат на крива C^3 от трети клас. Кривата C^3 съдържа равнината π^2, а правата t е тангента на C^3, лежаща в π^2. Правите, в които равнините на кривата C^3 пресичат π^2 (както е известно, тези прави принадлежат на крива C^2 от втори клас), са пресечниците на P^3 с хиперравнините, които принадлежат на C^4.

Поставяме обратната задача. Дадени са: 1) равнина π^2 и права t в нея, 2) хиперравнина P^3, която минава през π^2, 3) крива C^2 от втори клас, която лежи в π^2 и съдържа t. Колко криви C^4 от четвърти клас има в P^4, на всяка от които: 1) π^2 е оскулачна равнина, а t — тангента, 2) хиперравнината P^3 принадлежи на C^4, 3) хиперравнините на C^4 пресичат π^2 в правите на дадената крива C^2?

Избираме в π^2 четири прави $a_i (i=1, 2, 3, 4)$, които принадлежат на C^2, и вземаме по една хиперравнина през всяка от тях. По този начин получаваме ∞^8 различни четворки хиперравнини $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$. Съществува единствена крива от четвърти клас, на която принадлежат хиперравнините на една четворка от това множество и хиперравнината

P^3 и за която крива π^2 е оскулачна равнина, а t — тангента. Така получаваме ∞^8 криви, всяка от които, както е лесно да се види, изпълнява дадените условия. Тъй като всяка крива C^4, която е решение на поставената задача, може да се определи с помощта на t, π^2, P^3 и четворка хиперравнини $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$, които минават през избраните прави $a_i (i=1, 2, 3\ 4)$, то намерената съвкупност от ∞^8 криви съдържа всички криви, удовлетворяващи условията на поставената задача.

Доколкото предлаганият по-долу метод за изобразяване на P^4 върху равнина се описва със задаване на: 1) хиперравнина P^3, 2) равнина π^2, която лежи в P^3, 3) права t в π^2 и 4) крива C^2 от втори клас в π^2 и съдържаща t, то като C^4 винаги ще си мислим една фиксирана неразпадаща се крива от четвърти клас от разгледаното горе множество.

2. Построяване на изображение W

Дефиниция I. Нека в P^4 са дадени: двумерна равнина π^2, крива от втори клас C^2 в π^2 и хиперравнина P^3, която минава през π^2. Нека още t е една фиксирана права от C^2 и C^4 е неразпадаща се крива от четвърти клас в P^4, която съдържа P^3, на която π^2 е оскулачна равнина, t — тангента и хиперравнините на която пресичат π^2 в правите на кривата C^2. Ако A е произволна точка от P^4, то през A минават четири хиперравнини на кривата C^4, които пресичат π^2 в прави $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ от кривата C^2. На точката A съпоставяме шесторката върхове на четиристранника $a_i (i=1, 2, 3, 4)$.

Така дефинираното съответствие на точките от P^4 в шесторките върхове на четиристранници със страни, които принадлежат на C^2, което ще означаваме с W, е 1,1-значно. Наистина нека $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ е един четиристранник, страните на който принадлежат на C^2. През всяка от правите $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ минава точно една хиперравнина на кривата C^4, различна от P^3. Четирите хиперравнини α_i се пресичат в една точка A, която очевидно се изобразява чрез W в шесторката върхове на избрания четиристранник. Следователно W е сюрективно съответствие. Биективността на W следва от еднозначността на построенията.

Върховете на четиристранника $a_i (i=1, 2, 3, 4)$, който изобразява точката A, се получават от пресичането на π^2 с шестте двумерни оси на кривата C^4, минаващи през точката A.

За да построим страните и върховете на четиристранника $a_i (i=1, 2, 3, 4)$, който изобразява точката A, можем да постъпим така. Четирите хиперравнини и шестте двумерни оси на кривата C^4, които минават през A, пресичаме с хиперравнината P^3. Получените четири равнини и шест прави са стени и ръбове на един тетраедър със стени, принадлежащи на крива C^3 от трети клас. Равнините на C^3 се получават от пресичането на P^3 с хиперравнините на C^4. Като пресечем стените и ръбовете на получения тетраедър с равнината π^2, ще получим страните и върховете на четиристранника, изобразяващ A.

От това следва, че изображението W може да се разложи на произведение от две изображения, а именно: 1) Φ — изображение на P^4 върху съвкупността на тетраедрите със стени, които принадлежат на кривата C^3 от трети клас, и 2) φ — изображение на множеството на споменатите тетраедри върху множеството на шесторките върхове на четиристранниците, страните на които принадлежат на една крива C^2 от втори клас. Последните четиристранници се получават от пресичането на стените и ръбовете на тетраедрите, които изобразяваме с равнината π. Полученото разложение е полезно, защото изображението Φ е добре изучено в [3], а φ е достатъчно елементарно съответствие.

3. Изобразяване на права

Нека правата a е в общо положение относно кривата C^4. Ще докажем, че редът точки a се изобразява посредством W в ред четиристранници, вписани в една алгебрична крива от трета степен. Затова реда a първо изобразяваме чрез Φ. В резултат на това изобразяване се получава ред тетраедри със стени, принадлежащи на кривата C^3, вписани в една крива от трета степен a_3, наречена в [2] H-крива. Ръбовете на тези тетраедри лежат на праволинейна повърхнина в хиперравнината P^3. Степента на тази повърхнина ще определим с помощта на принципа на Шал.

Вземаме произволна права l в P^3 и точка A върху l. През A минава единствена бисеканта на кривата a_3. През двете ѝ пресечни точки с a_3 минават по три равнини на кривата C^3, пресичащи l в шест точки $A_i(i\ 1, \ldots, 6)$. На точката A съпоставяме шесторката точки $A_i(i=1, \ldots, 6)$. Да пресметнем колко точки от правата l се изобразяват чрез така дефинираното съответствие в точката A_i. През A_i минават три равнини на кривата C^3, които пресичат a_3 в девет точки. През всяка от получените точки минават по две бисеканти на кривата a_3, които пресичат l. Това са правите, пресичащи l и принадлежащи на конуса от втора степен, който проектира кривата a_3 от избраната точка върху нея. Като пресечем l с тези две прави, получаваме 18 точки, всяка от които, както е лесно да се провери, се изобразява чрез описаното съответствие в A_i. Така построихме (6, 18)-значно съответствие върху l, което съгласно принципа на Шал има 24 двойни точки.

Непосредствено се проверява, че през всяка от тези двойни точки минава бисеканта на кривата a_3, която е ос на C^3, т. е. ръб на тетраедър, който изобразява посредством Φ точка от правата a. Но лесно се вижда, че ако P е двойна точка на съответствието, то с нея се сливат още три двойни точки, т. е. имаме само шест различни двойни точки.

С това доказахме, че съществуват точно шест оси на кривата C^3, които са бисеканти на a_3 и които пресичат l. Тъй като това са общите точки на l с разгледаната по-горе повърхнина, то установяваме, че тази повърхнина е от шеста степен.

Тази повърхнина пресича π^2 в крива от шеста степен K_6, съдържаща множеството G на пресечните точки на всички бисеканти на кривата a_3, които са оси на C^3. Но K_6 съдържа три линейни компоненти. Това са страните на триъгълника, върховете на който са пресечните точки на a_3 с π^2. Последните три прави не принадлежат на разглежданото геометрично място, защото от свойството, че две бисеканти на крива от трета степен не могат да се пресичат в точка, нележаща на кривата, следва, че на G принадлежат от тези прави само пресечните точки на a_3 с π^2. Като изоставим тези три линейни компоненти на K_6, получаваме кривата K_3 от трета степен, която съдържа върховете на всички четиристранници, които изобразяват чрез W точките от правата a.

В случая, когато през a минава една хиперравнина L^3 на кривата C^4, тетраедрите, които изобразяват точките от a чрез Ф, имат обща стена $\sigma^2 = L^3 \times P^3$ и a_3 се разпада на права a_2 и крива от втора степен a_1^2, която лежи в равнината σ^2, принадлежаща на C^3. Следователно четиристранниците, които изобразяват точките от a чрез W, имат обща страна $\bar{a}_1 = \sigma^2 \times \pi^2$, която е компонента на кривата $\bar{a}_3$, изобразяваща a. Квадратната компонента на $\bar{a}_3$, както е лесно да се види, съдържа върховете на триъгълниците със страни, принадлежащи на C^2; тези триъгълници с правата $\bar{a}_1$ се допълват до четиристранници, изобразяващи точките от a.

Ако през a минават две хиперравнини на кривата C^4, то разсъждавайки по аналогичен начин, установяваме, че кривата $\bar{a}_3$, която изобразява чрез W правата a, се разпада на три линейни компоненти $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, две от които са прави от C^2 и са общи страни на четиристранниците, изобразяващи точките от a.

В случая, когато a е едномерна ос на C^4, $\bar{a}_3$ се разпада на тройка прави, принадлежащи на C^2. Тогава произволен четиристранник с три страни тези прави и произволна четвърта страна, принадлежаща на C^2, изобразява една точка от a.

На правата a образ при W ще наречем кривата $\bar{a}_3$, която съдържа върховете на четиристранниците, изобразяващи точките от a.

Забележка. Кривите от трета степен, в които могат да се впишат ∞^1 четиристранници със страни, принадлежащи на C^2, ще наричаме W-криви относно C^2.

4. Изобразяване на правите от една равнина

Нека е дадена равнина α в общо положение спрямо C^4. При Ф равнината α се преобразува в Т-квадрика α^2 ([2], § 2. опр. I), а правите от α — в Н-криви ([2], § 1, опр. I), лежащи на α^2. Върху квадриката α^2 (сгл. [2], 4. т. 3) лежат три оси o_1, o_2, o_3 на кривата C^3, които са бисеканти на всички Н-криви, лежащи върху α^2.

Нека a е произволна права в α. Всяка от правите o_1, o_2, o_3 е бисеканта на кривата a_3, която изобразява чрез Ф правата a, и следо-

вателно е ръб на един тетраедър, изобразяващ чрез Ф една точка от a. Оттук получаваме, че кривата $\bar{a}_3$, която изобразява a чрез W, минава през точките $O_1 = o_1 \times \pi^2$, $O_2 = o_2 \times \pi^2$, $O_3 = o_3 \times \pi^2$. Ако са дадени две прави a и b в α, то не само че двете криви $\bar{a}_3$ и $\bar{b}_3$ минават през точките O_1, O_2, O_3, но тези криви имат общ вписан четиристранник със страни, принадлежащи на C^2. Това е четиристранникът, който съответствува при W на точката $a \times b$.

Следователно правите от една равнина чрез изображението W се трансформират в множество W-криви, които минават през три постоянни точки $O_i (i = 1, 2, 3)$, и всеки две криви от това множество имат общ вписан четиристранник със страни, принадлежащи на C^2.

Ще докажем и обратното, че множеството W-криви с изброените свойства изобразява правите от една равнина от P^4.

Нека точките O_1, O_2, O_3 от равнината π^2 са разположени така, че никои две от тях не лежат на права от C^2. През O_1 минават две хиперравнини на кривата C^4, различни от P^3, които нека се пресичат в двумерната ос σ^2 на C^4. По аналогичен начин намираме, използвайки точките O_2 и O_3, двумерните оси τ^2 и μ^2 на C^4. Като се вземат пред вид ограниченията за точките $O_i (i = 1, 2, 3)$, лесно се установява, че равнините σ^2, τ^2 и μ^2 имат само по една обща точка: $P = \sigma^2 \times \tau^2$, $Q = \tau^2 \times \mu^2$ и $R = \sigma^2 \times \mu^2$. Да вземем две W-криви $\bar{a}_3$ и $\bar{b}_3$, които минават през точките $O_i (i = 1, 2, 3)$ и имат общ вписан четиристранник със страни, принадлежащи на C^2. Чрез W^{-1} кривите $\bar{a}_3$ и $\bar{b}_3$ се изобразяват в прави a и b. Ще докажем, че a и b лежат в равнината $\alpha = PQR$. Наистина, тъй като $\bar{a}_3$ и $\bar{b}_3$ минават през O_1, то a и b пресичат σ^2 в точките $\sigma^2 \times a = A_1$, $\sigma^2 \times b = A_2$. По аналогичен начин се доказва съществуването на точките $\tau^2 \times a = B_1$ и $\tau^2 \times b = B_2$. Правите A_1A_2, B_1B_2 от равнината ab лежат съответно в σ^2 и τ^2. Но тъй като σ^2 и τ^2 имат само една обща точка, а именно P, то $A_1A_2 \times B_1B_2 = P$ и следователно равнината ab минава през точката P. С аналогични разсъждения заключаваме, че равнината ab минава през Q и R. Следователно $ab = PQR$. Веднага се вижда, че правите от α се изобразяват чрез W в кривите на зададеното множество. С това ние даже дадохме метод за намиране на равнината, правите на която се изобразяват в зададеното множество W-криви.

Тъй като между правите на равнината α и W-кривите на това множество изображението W установява колинеарно отношение в смисъл, че на сноп прави от α отговарят сноп криви, то това множество е мрежа криви с три базисни точки $O_i (i = 1, 2, 3)$.

Може да се установи, че необходимото и достатъчно условие равнината α да съдържа една едномерна ос на C^4 е точките $O_i (i = 1, 2, 3)$ да образуват триъгълник със страни, принадлежащи на C^2.

Полученият резултат ни дава възможност да докажем следната теорема, която има смисъл независимо от изображението W.

Теорема 1. Ако в равнината π^2 са дадени крива C^2 от втори клас и три четиристранника $\bar{A}(a_i)$, $\bar{B}(b_i)$ и $\bar{C}(c_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ със страни, принадлежащи на C^2, но невписани в една крива от трета степен, то съществуват кривите $k^3(\bar{A}, \bar{B})$, $k^3(\bar{B}, \bar{C})$, $k^3(\bar{C}, \bar{A})$ от трета степен, всяка от които минава през дванадесетте върха на произволни два от дадените три четиристранника, и тези три криви имат три общи точки.

Доказателство. Да вземем в P^4 една крива C^4, на която π^2 е оскулачна равнина и хиперравнините на която пресичат π^2 в правите на кривата C^2, и да построим изображение W на P^4 върху π^2, както това е направено с дефиниция 1. Посредством W^{-1} на четиристранниците $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ отговарят неколинеарните точки A, B, C. Съгласно доказаното в предните разглеждания правите от равнината $\alpha = ABC$ се изобразяват в мрежа криви от трета степен с базисни точки O_1, O_2, O_3. Тъй като правите AB, BC, CA се изобразяват чрез W в кривите $k^3(\bar{A}, \bar{B})$, $k^3(\bar{B}, \bar{C})$, $k^3(\bar{C}, \bar{A})$, то тези криви съществуват и принадлежат на мрежата, т. е. минават през точките $O_i (i=1, 2, 3)$.

Ще разгледаме сега някои частни положения на равнината α относно C^4. Ако през α минава точно една хиперравнина на C^4, то квадриката α^2, която е образ на α чрез Φ, се разпада на равнина σ, принадлежаща на C^3, и равнина α_1, която не принадлежи на C^3. Произволна права a в α се изобразява чрез същото съответствие в H-крива a_3, която има линейна компонента a_1, лежаща в α_1. Тетраедрите, които изобразяват чрез Φ точките от a, имат един връх върху $a_1 \sum \alpha_1$ и една стена в σ. Следователно кривата $\bar{a}_3$, която изобразява a чрез W, има линейна компонента правата $\sigma \times \pi^2$ и минава през точката $O = o \times \pi^2$, където o е оста на C^3, лежаща в равнината α_1. Тъй като точката O не зависи от избора на правата a, заключаваме, че W-мрежата от кривите, изобразяващи чрез W правите от α, сега се състои от кривите от трета степен с обща компонента правата $\sigma \times \pi^2$; квадратните компоненти на тези криви образуват мрежа от конични сечения с една базисна точка. Всеки две криви на тази мрежа имат общ вписан триъгълник със страни, принадлежащи на C^2.

Накрая, ако α е двумерна ос на C^4, правите от α чрез W се изобразяват в W-криви, които имат две общи линейни компоненти; третата им компонента е произволна права от равнината π^2 и следователно те пак образуват мрежа.

5. Изобразяване правите от една хиперравнина

Нека L^3 е хиперравнина на P^4, която е в общо положение спрямо C^4. С помощта на Φ точките от L^3 се изобразяват в една съвкупност от тетраедри такава, че H-кривата, минаваща през върховете на произволни два от тях, има за бисекванта една фиксирана права a. Такава съвкупност е наречена в [2] съвкупност I_a^3. Да разгледаме съвкупността от тетраедрите с една стена π^2, с един връх на правата a и стени, принадлежащи на C^3. Стените и върховете на тетраедрите от

тази съвкупност пресичат π^2 в триъгълници, вписани в една крива от втора степен a_2.

Нека b е произволна права от L^3. Тъй като правата a е бисеканта на кривата b_3, която изобразява чрез Φ правата b, то b_3 може да се определи с помощта на тетраедрите A и B, вписани в нея и един връх на всеки от които лежи на правата a. Чрез φ тези тетраедри се изобразяват в четиристранници с по три върха върху кривата a_2. Следователно правите от L^3 се изобразяват чрез W в криви от трета степен, които минават през върховете на два такива четиристранника със страни, принадлежащи на C^2, че съществуват два триъгълника със страни измежду страните на тези четиристранници, които са вписани в кривата a_2.

Обратното лесно се установява, а именно, ако вземем два триъгълника, вписани в кривата a_2 и със страни, принадлежащи на C^2, и с помощта на две прави, които принадлежат на C^2, допълним тези триъгълници до четиристранници A и B и разгледаме W-кривата $k^3(A, B)$, то съществува права в L^3, която с помощта на W се изобразява в кривата $k^3(A, B)$.

Да разгледаме случая, когато L^3 съдържа двумерна ос σ^2 на C^4. Нека σ^2 чрез Φ се изобразява в двойката равнини (σ_1, σ_2), всяка от които принадлежи на C^3. Всяка права от L^3 пресича равнината σ^2 в една точка, която чрез Φ се изобразява в тетраедър с две стени σ_1 и σ_2 и следователно с ръб върху правата $o=\sigma_1\times\sigma_2$. Следователно кривите, които изобразяват чрез W правите от L^3, в този случай имат обща точка $O=o\times\pi^2$.

Накрая, ако L^3 принадлежи на C^4, точките от L^3 чрез Φ се изобразяват в тетраедри с една обща стена σ и следователно W-кривите, изобразяващи правите от L^3 чрез W, имат обща линейна компонента. Лесно е да се види, че квадратните им компоненти са криви, в които се вписват триъгълници със стени, принадлежащи на C^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лангов, А.: Изобразяване на пространството P^3 върху равнина с помощта на конгруенция от трета степен и първи клас. Год. на ВТУЗ, т. 4, кн. 3.
2. Лангов, А.: Някои свойства на тетраедрите със стени, принадлежащи на една нормкрива C^3 от трети клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1969/70), 95—108.
3. Лангов, А.: Изобразяване на точките от P^4 чрез четворки точки от P^3 с помощта на пространствена крива от четвърти клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1969/70), 109—120.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

REPRÉSENTATION DES POINTS DE P^4 PAR DES SYSTÈMES DE SIX POINTS DU PLAN À L'AIDE D'UNE COURBE DE QUATRIÈME CLASSE DANS L'ESPACE

A. Langov

(RÉSUMÉ)

Dans cet article on construit une application de P^4 sur un plan de la manière suivante: soit C^2 une courbe de deuxième classe fixée dans le plan projectif π^2. Dans P^4 on prend une courbe C^4 de quatrième classe dont les hyperplans coupent π^2 suivant les droites de C^2. A chaque point A de P^4 on fait correspondre un système de six points: les sommets du quadrilatère dans π^2 dont les côtés sont les intersections de π^2 avec les quatre hyperplans de la courbe C^4 passant par A.

Il est démontré que les points d'une droite de P^4 sont transformés ainsi en six points qui se trouvent sur une courbe algébrique de troisième degré.

On trouve les ensembles de courbes qui sont les transformées des droites d'un plan ou d'un hyperplan. On obtient quelques propriétés des courbes de troisième degré dans lesquelles on peut inscrire des quadrilatères qui sont circonscrits à une section conique. Par exemple le théorème 1: soient trois quadrilatères A, B, C circonscrits à une section conique, il existe alors des courbes $k^3(A, B)$, $k^3(B, C)$, $k^3(A, C)$ de troisième degré, telles que chacune de ces courbes passe par les douze sommets de deux des quadrilatères donnés et ces trois courbes ont trois points communs.