НОВА ДЕФИНИЦИЯ И ДОКАЗАТЕЛСТВА НА ОСНОВНИТЕ СВОЙСТВА НА ПОЛЯРНАТА БИКВАДРАТНА СИСТЕМА НА А. К. ВЛАСОВ

Анани Лангов[1]

Биквадратната полярна система, означавана от Власов $(XYZT)_3$ [1], е съвкупност от ∞^3 четворки точки, които принадлежат на коничното сечение C^2, такива, че ако X е точка от C^2, съвкупността от тройките точки YZT, които допълват точката X до четворка от полярната система, образуват кубична полярна система.

Тъй като кубичната полярна система е съвкупност от ∞^2 тройки YZT на C^2, такива, че ако Y е точка от C^2, то двойките точки ZT, които допълват точката Y до тройка на кубичната полярна система, образуват квадратна инволюция, то биквадратната полярна система може да се разглежда като съвкупност G от четворки точки на C^2, така че, ако X, Y са две произволни точки от C^2, двойките точки Z, T на C^2 със свойството, че четворката $XYZT$ принадлежи на G, образуват квадратна инволюция.

1. Нова дефиниция на биквадратната полярна система

В [2] е построено изображение W на точките от P^4 върху шесторките върхове на четиристранниците със страни, които принадлежат на едно конично сечение, по следния начин. Нека в равнината π^2 е дадено конично сечение C^2, а P^3 е едно тримерно пространство, минаващо през π^2. Разглеждаме една крива C^4 от четвърти клас в P^4, която съдържа P^3 и хиперравнините на която пресичат π^2 в правите на C^2. На точката A от P^4 чрез W се съпоставя шесторката върхове на четиристранника $A(a_i)$, страните на който са пресечниците на π^2 с хиперравнините на C^4, минаващи през A. Да забележим още, че хиперравнините на C^4 пресичат P^3 в равнините на една крива от трети клас C^3 и тези равнини пресичат π^2 в правите на коничното сечение C^2.

Ще означим с W_1 изображението на точките от P^4 върху четворките точки на коничното сечение C^2, при което на точката A от P^4 се съпоставя четворката допирни точки на C^2 със страните на четиристранника, изобразяващ чрез W точката A. С помощта на изображението W_1 даваме следната дефиниция на полярната биквадратна система.

Дефиниция 1. Полярна биквадратна система върху коничното сечение C^2 наричаме съвкупността от четворките точки върху C^2, които са образи чрез изображението W_1 на точките от една хиперравнина на P^4.

Теорема 1. Биквадратната полярна система има свойството, че ако X е точка от C^2, то съвкупността от тройките YZT, такива, че четворката $XYZT$ принадлежи на биквадратната полярна система, образуват кубична полярна система.

Доказателство. Нека полярната биквадратна система е определена като съвкупност от образите чрез W_1 на точките от хиперравнината Q^3. През допирателната x към кривата C^2, която минава през точката X, има точно една хиперравнина L^3 на C^4, отлична от P^3. Равнината $\alpha = Q^3 \times L^3$ изобразяваме чрез съответствието Φ ([3], § 3. деф. 1), при което на точките от P^4 съпоставяме четворките върхове на тетраедри със стени, принадлежащи на кривата C^3. Тъй като всички тези тетраедри имат обща стена — равнината $\sigma = L^3 \times P^3$, то образът на α чрез Φ е квадрика, която се разпада на двойка равнини (σ, α_1). Но тогава точките на α чрез W се изобразяват в четиристранници с една обща страна x, а останалите три страни на всеки такъв четиристранник са пресечниците на π^2 с равнините на C^3, минаващи през някоя точка от равнината α_1. Но в [4] е доказано, че съвкупността от тройките точки на C^2, които са допирни точки на C^2 с такива тройки равнини, е кубична полярна система. С това теоремата е доказана.

Теорема 2. Една биквадратна полярна система се определя с помощта на такива четири свои четворки A_i', B_i', C_i', D_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$, че кривите $K^3(A, B)$, $K^3(A, C)$, $K^3(A, D)$ (с A сме означили четиристранника със страни правите на C^2, минаващи през точките A_i', а $K^3(A, B)$ е кривата от трета степен, която минава през върховете на четиристранниците A и B) не принадлежат на един сноп от една W-мрежа (вж. [2]), т. е. трите криви нямат три общи точки.

Доказателство. От поставеното условие за точките A_i', B_i', C_i', D_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ следва, че чрез W_1^{-1} на тях отговарят четири точки от P^4, които не лежат в една равнина. Хиперравнината, която съдържа тези точки, чрез W_1 се изобразява в четворките точки на една полярна биквадратна система, съдържаща дадените четворки. Единствеността на полярността, която удовлетворява изискванията на теоремата, следва от това, че W_1 е биективно изображение.

А. К. Власов доказва ([1], стр. 40), че биквадратната полярна система се определя със задаването на четири нейни четворки, взети в общо положение. Вземайки пред вид теоремите 1 и 2 и това, че теорема 2 в същност уточнява теоремата на Власов, стигаме до заключението:

Теорема 3. Полярната биквадратна система, въведена с дефиниция 1, съвпада с биквадратната полярна система, определена от А. К. Власов.

2. Свойства на полярната биквадратна система.

Ако четворката LLLL принадлежи на полярната биквадратна система, то точката L се нарича корен на полярната система.

Хиперравнината Q^3, която определя полярната система, пресича кривата C_4 — геометрично място на допирните точки на кривата C^4 (вж. [5], стр. 236), в четири точки X', Y', Z', T', които чрез W_1 се изо-

бразяват в четворките съвпадащи точки $X \equiv X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \equiv X_4, \ldots$ $T \equiv T_1 \equiv T_2 \equiv T_3 \equiv T_4$. Тъй като тези съвпадащи четворки изобразяват съществуващите четири точки от Q^3, следва, че полярната биквадратна система има четири корена ([1], стр. 41).

Известно е, че кривата C^4 определя в P^4 полярна корелация φ, в която на произволна точка A отговаря хиперравнината L^3, която минава през допирните точки L_1', L_2', L_3', L_4' на четирите хиперравнини от C^4 през A. Всяка точка от L^3 е спрегната на А в тази корелация.

А. К. Власов ([1], стр. 41) въвежда понятието аполярни четворки от една крива от втора степен. Не е трудно да се види, че две аполярни четворки чрез W_1^{-1} се трансформират в две спрегнати при φ точки и обратно. И тъй като, ако A е спрегната при φ на B, то и B е спрегната на A, очевидна е теоремата ([1], стр. 41): ако A_i е аполярна четворка с четворката B_i, то и B_i е аполярна с A_i.

Ако са дадени чатворките L_i и L_i' ($i = 1, 2, 3, 4$), то съвкупността от ∞^2 четворки, които са аполярни с L_i и L_i', се нарича биквадратна инволюция от втора степен. Означава се I_4^2.

Лесно се вижда, че биквадратната инволюция от втора степен е съвкупност от четворки точки на C^2, които чрез W_1^{-1} се трансформират в точките на една равнина и обратно. Това е равнината, в която се пресичат полярите на точките L и L', изобразяващи четворките L_i и L_i' чрез W_1^{-1}. Вземайки пред вид, че една равнина се определя с три точки, заключаваме, че една биквадратна инволюция от втора степен се определя с помощта на три свои четворки ([1], стр. 59).

Съвкупността от четворките, аполярни с три дадени четворки, се нарича биквадратна инволюция от първа степен. Означава се I_4^1. Повтаряйки разсъжденията, направени за биквадратната инволюция от втора степен, ще се види, че биквадратната инволюция от първа степен е съвкупност от четворки върху C^2, които изобразяват чрез W_1 точките от една права от P^4.

Разгледаните по-горе свойства на биквадратната полярна система и нейните подсъвкупности — биквадратни инволюции от втора и първа степен, изразяват свойствата на четиримерното проективно пространство и неговите линейни подпространства. Хесе [6] разглежда инволюциите от n-та размерност и k-та степен I_n^k като еквивалент на k-мерно линейно подпространство в n-мерната геометрия на уникурсална крива C_n. Точки в тази геометрия са n-торки от точки върху C_n, прави — линейните редове g_n^1, т. е. съвкупност от n-торки точки върху C_n, всяка от които е определена с помощта на една своя точка, k-мерна равнина — линеен ред g_n^k, т. е. съвкупност от n-торки точки, всяка от които е определена с помощта на k свои точки.

В настоящата работа се установява конструктивна връзка между четиримерната геометрия на C_n и геометрията на четиримерното пространство и с това се потвърждава така нареченият „принцип на пренасянето“ на Хесе.

По-интересни свойства на биквадратната полярна система и нейните подсъвкупности се доказват по-долу с помощта на теорията на Т-квадриките [7].

3. Свойства на полярната система, които произтичат от свойствата на Т-квадриките

Хиперравнина на P^4 в общо положение спрямо C^4 с помощта на изображението Φ [3] се трансформира в съвкупност тетраедри със стени, принадлежащи на C^3, които образуват съвкупност I_a^3, с характеризиращото I_a^3 свойство, че всеки два тетраедра от I_a^3 са вписани в една крива от трета степен, на която фиксирана права a е бисеканта. Нека с Ω означим съответствието на точките от P^3 върху C^2, при което на произволна точка $A \in P^3$ отговаря върху C^2 тройката допирни точки на C^2 с трите равнини на C^3, минаващи през A. Ако точките от правата a изобразим върху C^2 чрез Ω, то правата a се изобразява в една инволюция от трета размерност и първа степен [4]. Затова една полярна биквадратна система може да се определи с помощта на една кубична инволюция I_3^1 върху C^2.

Поляра на точката $X \in C^2$ наричаме тройката корени на кубичната полярна система $X(YZT)_2$.

Теорема 3. Съвкупността от полярите на всички точки от C^2 е кубична инволюция.

Доказателство. Да вземем произволна точка $X \in C^2$ и през допирателната x на C^2, минаваща през X, да прекараме хиперравнината L^3 на кривата C^4, която е различна от P^3. Равнината $\alpha = L^3 \times Q^3$ (Q е хиперравнината, с помощта на която е зададена полярната система) се изобразяза чрез Φ в Т-квадрика $F^2(\sigma, \alpha_1)$, разпадаща се на двойка равнини, от които $\sigma \in C^3$ и $\sigma \supset x$. Точките на равнината α_1 се изобразяват чрез Ω в тройки на една кубична полярна система [4]. Поляра на точката X е тройката корени на тази полярна система. Но това са образите чрез Ω на пресечните точки на α_1 с кривата C_3, която е геометрично място на допирните точки на равнините на кривата C^3. Кривата C^3 определя една нулева корелация в P^3, при която на точка A отговаря равнината α_1, съединяваща допирните точки на трите равнини на C^3, които минават през A. Тъй като проектиращите прави на тези допирни точки съвпадат по три в една и лежат в равнини на кривата C^3, минаващи през A, то точката A чрез Ω се изобразява в тройката корени на тази полярна система.

Като забележим, че равнината α_1 минава през правата a ([7], § 5), която характеризира съвкупността I_a^3, изобразяваща чрез Φ точките от Q^3, то когато X описва C^2, равнината α_1 описва снопа равнини с носител a, а полюсът ѝ A се движи по една права b, която е спрегнатата поляра на a при φ. Тъй като чрез Ω точките на b се изобразяват в една кубична инволюция, то с това теоремата е доказана.

Кубичната инволюция, съществуването на която доказахме в тази теорема, се нарича инволюция на полярите.

Теорема 4. Инволюцията на полярите на дадена биквадратна полярна система има четири двойни точки.

Доказателство. Всяка права в общо положение спрямо кривата C^3 пресича четири допирателни на C^3. Прилагаме това свойство за правата b от теорема 3. През всяка от тези пресечни точки две от равнините на кривата C^3 се сливат. Следователно кубичната инволюция I_3^1, изобразяваща b чрез Ω, има четири двойни точки. С това теоремата е доказана.

Съвкупността от двойните точки на инволюцията на полярите на една биквадратна полярна система се нарича хесиан на тази система.

Теорема 5. Две биквадратни полярни системи, определени с помощта на две спрегнати поляри в нулевата корелация, възбудена от кривата C^3, имат общ хесиан.

Доказателство. Хесианът на биквадратната полярна система, определена с помощта на правата a съгласно теорема 4, се получава чрез изображението посредством Ω на четирите точки, в които правата b — спрегната поляра на a в нулевата корелация, възбудена от C^3, пресича четирите допирателни на C^3, Този резултат е валиден и за правата b. Следователно доказателството на теоремата се свежда до тоза да установим, че правите a и b се пресичат от едни и същи четири допирателни на C^3. Това наистина е така, защото допирателните на C^3 са инвариантни прави в споменатата нулева корелация, а знаем, че ако една инвариантна права пресича едната от две спрегнати поляри, то тя пресича и другата, т. е. всяка допирателна към C^3, която пресича a, пресича и b.

Вярна е и обратната теорема.

Теорема 6. Четири точки H_1, H_2, H_3, H_4 от кривата C^2 определят две полярни биквадратни системи, имащи тази четворка точки за хесиан. Последните полярни системи се определят с помощта на спрегнати прави в нулевата корелация спрямо C^3.

Доказателство. Да прекараме допирателните h_1, h_2, h_3, h_4 към кривата C^3, минаващи през точки H_1, H_2, H_3, H_4. Съществуват две прави a и b, които пресичат едновременно четирите прави h_1, h_2, h_3, h_4. Правите a и b определят две полярни биквадратни системи, които имат за хесиан зададената четворка точки. Спрегнатостта на a и b се доказва така: тъй като a пресича самоспрегнатите прави h_1, h_2, h_3, h_4 в нулевата корелация относно C^3, то и нейната спрегната поляра a' ще пресича тези прави. Но тъй като тези четири прави имат само две трансверзали, то $a' = b$.

В заключение ще докажем едно свойство на биквадратната инволюция от втора степен.

Теорема 7. Биквадратната инволюция от втора степен има три двойки точки, всяка от които с помощта на две произволни точки от C^2 се допълва до четворка от дадената инволюция.

Доказателство. Съгласно 2 биквадратната инволюция от втора степен е съвкупност от четворки точки върху C^2, изобразяващи чрез W_1 точките от една равнина от P^4. Значи тези четворки са допирните точки на C^2 със стените на тетраедрите, със стени, принадлежащи на C^3 и вписани в една Т-квадрика. Но на всяка Т-квадрика лежат три оси на кривата C^3 ([7], т. 3, § 4). Да разгледаме една от тях O и да означим със σ и τ равнините на C^3, които минават през O, а с X и Y техните допирни точки с кривата C^2. Тъй като две произволни равнини σ' и τ', които принадлежат на C^3 и се допират до C^2 в точки Z и T, заедно със σ и τ образуват тетраедър, вписан в тази Т-квадрика, то четворката $XYZT$ принадлежи на дадената биквадратна инволюция от втора степен.

С помощта на останалите две оси получаваме още две такива двойки, които с помощта на произволни две точки от C^2 се допълват до четворки от дадената инволюция. С това теоремата е доказана.

Разбира се, могат да се приведат доказателства и на други известни свойства на биквадратната полярна система, а също така от свойствата на Т-квадриките да се формулират и други теореми, но и приведените тук примери ясно показват колко новото определение на полярната биквадратна система опростява изучаването на свойствата ѝ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, А.: Полярные системи высших порядков в образах первой ступени. Москва, 1909.
2. Лангов, А.: Изобразяване на точките от P^4 чрез шесторки точки от равнина с помощта на пространствена крива от четвърти клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 64 (1970/71), 171—177.
3. Лангов, А.: Изобразяване на точките от P^4 чрез четворки точки от P^3 с помощта на пространствена крива от четвърти клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1969/70), 109—120.
4. Лангов, А., Скопец, З.: Новое определение и доказательство основных свойств кубической полярной системы А. К. Власова. Уч. зап. Ярославского пед. ин-та, вып. 64, част I, 98—105.
5. Bertini, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien, 1924.
6. Hesse, O.: Über ein Übertragungsprinzip. Journ. f. Math., 66 (1866), 15.
7. Лангов, А.: Някои свойства на тетраедрите със стени, принадлежащи на една нормкрива C^3 от трети клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1969/70), 95—108.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

UNE NOUVELLE DÉFINITION ET DES DÉMONSTRATIONS DES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU SYSTÈME POLAIRE BICARRÉ DE A. K. VLASSOV

A. Langov

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail on construit une application W_1 des points de P^4 sur les systèmes de quatre points d'une section conique. Soit dans le plan π^2 une section conique C^2. On choisit un espace de trois dimensions P^3 par π^2 et une courbe C^4 de quatrième classe, qui contient π^2 et telle que ses hyperplans coupent π^2 suivant les droites de C^2. Au point arbitraire A de P^4 on fait correspondre par W_1 les quatre points de C^2 où les quatre hyperplans de la courbe C^4, qui passent par A, touchent C^2.

On démontre que les points d'un hyperplan de P^4 se transforment par W_1 en ∞^3 systèmes de 4 points qui forment le système polaire bicarré de A. K. Vlassov [1]. Cette interprétation d'un système polaire permet de simplifier les démonstrations de beaucoup de théorèmes de la théorie des involutions et aussi d'obtenir de nouvelles propriétés en employant les propriétés des T-quadriques.

C'est dans ce sens qu'apparaît le théorème 7: l'involution bicarrée de deuxième degré I_4^2 contient trois couples de points tels que chaque couple forme avec deux points arbitraires un système de 4 points de l'involution donnée.