ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯТА M_2 НА МНОГООБРАЗИЕТО M_3 ОТ ПРАВИ В P_4 (II)

Иванка Иванова-Каратопраклиева

Тъй като настоящата работа е продължение на работата [8], то най-напред ще направим някои допълнения към последната.

Произволно подмногообразие M_2 на трипараметрична съвкупност M_3 от прави се задава с едно линейно уравнение между диференциалите на параметрите, от които зависи M_3. Ако това пфафово уравнение е напълно интегруемо, то подмногообразието M_2 се нарича холономно. В този случай то представлява една двупараметрична подсъвкупност от прави на M_3. Ако уравнението не е напълно интегруемо, то подмногообразието M_2 се нарича нехолономно.[1] В този случай то представлява съвкупността от всички еднопараметрични подсъвкупности на M_3, кои о удовлетворяват това пфафово уравнение.

Подмногообразията M_2 на една трифокусна трипараметрична съвкупност M_3 от прави в P_4 се делят на три основни класа в зависимост от това, притежават ли или не развиваеми еднопараметрични подсъвкупности. Класа, който се състои от трите двуфокусни конгруенции, ще наричаме фокален. Класа, съставен от всички параболични конгруенции, ще наричаме полуфокален. Очевидно той се разпада на три подкласа поради наличието на три развиваеми повърхнини в M_3. Класа, съставен от всички подмногообразия M_2, несъдържащи развиваеми повърхнини, ще наричаме афокален.

В § 1 на [8] към всяка права на M_3 е присъединен един полуканоничен репер, който е инвариантно свързан освен с M_3 още и с произволно нейно афокално подмногообразие.

В § 2 на [8] са намерени връзките между компонентите на построения полуканоничен репер и компонентите на каноничния репер ([6], [7]) на M_3, а така също и връзките между диференциалните инварианти на M_3 и съвместните диференциални инварианти на M_2 и M_3. Тъй като каноничният репер се отнася за съвкупности M_3, чиито развиваеми повърхнини не са конични, то и получените връзки са само за такива съвкупности.

В § 3 на [8] са намерени връзките между диференциалните инварианти на произволно афокално подмногообразие M_2 и диференциалните инварианти на обхващащото го многообразие M_3.

---

[1] Както ни обърна внимание Л. З. Кругляков, в [8] неточно е употребен терминът „двупараметрично" за *всяко* подмногообразие M_2.

Спрямо полуканоничния репер афокалното подмногообразие M_2 се задава с уравнението

$$\Omega_2^5=0, \tag{1}$$

а спрямо каноничния — с уравнението

$$\omega_2^5=\frac{2}{a_1^1-a_2^2+a_2^1-1}\omega_1^3+\frac{2}{b_1^1-a_1^1-b_2^2+a_2^2}\omega_1^4. \tag{2}$$

Прилагайки критерия на Фробениус [1], получаваме, че уравнението (1) е напълно интегруемо тогава и само тогава, когато

$$2a_2^1-2a_3^5+2b_4^5\equiv 2+\bar{z}_2+\bar{y}_4+\bar{z}_5-2\bar{x}+2\bar{y}^*=0. \tag{3}$$

В този случай подмногообразието M_2 е холономно, т. е. уравнението (1) допуска решение от вида $f(u, v, w)=c$ и определя двупараметрично подмногообразие M_2 на M_3. Като се вземе пред вид доказаната в [8] теорема, лесно се съобразява, че съвкупността M_3 заедно с произволно нейно афокално, холономно подмногообразие M_2 зависи от четири произволни функции на три аргумента ($q=32$, $s_1=17$, $s_2=11$, $s_3=4$, $N=Q=51$). Коефициентите $\hat{a}_i^j$, $\hat{b}_i^j$ в (3.2) [8] са диференциалните инварианти на афокалното холономно подмногообразие M_2. Ако подмногообразието M_2 не е холономно, т. е. не е изпълнено равенството (3), то неговите диференциални инварианти са $\hat{a}_i^j=a_i^j$, $\hat{b}_i^j=b_i^j$, $i, j=1,\ldots, 5$.

§ 1. Геометрична характеристика на полуканоничния репер

В този параграф ще изясним връзката на полуканоничния репер с афокалното подмногообразие $M_2: \Omega_2^5=0$, към което е отнесена съвкупността.

Съгласно направения избор на полуканоничния репер върхът B_1 съвпада с фокуса F_1 на развиваемата повърхнина (1. а) [8], B_2 е хармонично спрегнат на B_1 спрямо останалите два фокуса $F_2=B_1+B_2$ и $F_3=B_1-B_2$ на M_3, а координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$ е допирателна[1] към M_2 в B_2.

Трите координатни подмногообразия M_2 са

$\Omega_1^3=0$ — параболична конгруенция,

$\Omega_1^4=0$ — параболична конгруенция,

$\Omega_2^5=0$ — афокално подмногообразие.

Общите еднопараметрични съвкупности на подмногообразието (1) и двуфокусните конгруенции (1.*d*), (1.е) и (1.*f*) са съответно

[1] Допирателна хиперравнина към M_2 в една точка наричаме онази, в която лежат допирателните равнини в тази точка към всички линейни повърхнини на M_2.

$$M_1^{2d}: \Omega_1^3 = \Omega_2^5 = 0;$$

$$M_1^{2e}: \begin{matrix} \Omega_1^3 - \Omega_1^4 = 0, \\ \Omega_2^5 = 0, \end{matrix}$$

$$M_1^{2f}: \begin{matrix} \Omega_1^3 + \Omega_1^4 = 0, \\ \Omega_2^5 = 0. \end{matrix}$$

Трите координатни еднопараметрични подсъвкупности са

$$M_1^{25}: \Omega_1^3 = \Omega_1^4 = 0$$

— развиваемата повърхнина (1.а);

$$M_1^{14}: \Omega_1^3 = \Omega_2^5 = 0$$

— M_1^{2d} и

$$M_1^{13}: \Omega_1^4 = \Omega_2^5 = 0$$

— хармонично спрегнатата на M_1^{2d} относно M_1^{2e} и M_1^{2f} [5].

В [8] показахме, че: 1) върховете B_1 и B_2 на полуканоничния репер се явяват фокуси в смисъл на [4] за онези координатни еднопараметрични подсъвкупности, които принадлежат на M_2, т. е. на M_1^{14} и M_1^{13}; 2) фокусите $F_2 = B_1 + B_2$ и $F_3 = B_1 - B_2$ на M_3 са фокуси в смисъл на [4] съответно за еднопараметричните подсъвкупности M_1^{2e} и M_1^{2f}.

Фокусите F_1, F_2, F_3 на M_3 се явяват фокуси съответно на M_1^{2d}, M_1^{2e} и M_1^{2f} в смисъл на [4] поради това, че всяка еднопараметрична подсъвкупност на M_3, която принадлежи на една от двуфокусните конгруенции, разглеждана като елемент на кое да е съдържащо я подмногообразие M_2, има за свой фокус точно онзи фокус на M_3, който не принадлежи на тази конгруенция. Това е така, защото: 1) допирателното тримерно пространство на коя да е еднопараметрична съвкупност на една двуфокусна конгруенция се явява допирателната хиперравнина на тази конгруенция и 2) допирателната хиперравнина към всяко подмногообразие M_2 във фокусите на M_3 са съответните фокални хиперравнини.

Върхът B_5 на полуканоничния репер поместихме в пресечната точка $\bar{F}_1$ на допирателните към първите фокални линии върху фокалните хиперповърхнини (F_2) и (F_3), т. е. в първата фокална точка[1] на M_3. Последните две закрепвания на репера бяха такива, че за втората и третата фокална точка на M_3 получихме $\bar{F}_2 = B_3 - B_4 - B_5$, $\bar{F}_3 = B_3 + B_4 + B_5$. Остава да дадем геометрична характеристика за върховете B_3 и B_4.

[1] Пресечната точка на допирателните към първите (вторите, съответно третите) фокални линии, които не се допират до $p = B_1B_2$, ще наричаме първа (втора, съответно трета) фокална точка на M_3. Правите $f_1 = \bar{F}_2\bar{F}_3$, $f_2 = \bar{F}_1\bar{F}_3$ и $f_3 = \bar{F}_1\bar{F}_2$ ще наричаме първа, втора и трета фокална права на M_3.

Допирателните хиперравнини към подмногообразието M_2 във фокусите F_i, $i=1, 2, 3$ са съответните фокални хиперравнини, а във върха B_2 на репера — координатната хиперравнина $\varepsilon=B_1B_2B_3B_4$.

Първата, втората и третата фокални прави на M_3 пробождат хиперравнината ε съответно в три точки, които ще наричаме съответно първа, втора и трета фокална точка на M_2 за точката B_2 и ще ги означаваме $\overline{\overline{F}}_i$, $i=1, 2, 3$. При построения полуканоничен репер имаме

$$\overline{\overline{F}}_1=f_1\cap\varepsilon=B_3,\quad \overline{\overline{F}}_2=f_2\cap\varepsilon=B_3+B_4,\quad \overline{\overline{F}}_3=f_3\cap\varepsilon=B_3-B_4.$$

Очевидно точките $\overline{\overline{F}}_i$, $i=1, 2, 3$, лежат на една права, тъй като трите фокални прави на M_3 лежат в двумерната равнина $\overline{F}_1\overline{F}_2\overline{F}_3$. Понеже допирателните хиперравнини по правата $p=B_1B_2$ към конгруенциите $(1.d)$, $(1.e)$ и $(1.f)$ са съответно $\varepsilon_1=B_1B_2B_3(B_4+B_5)$, $\varepsilon_2=B_1B_2(B_3+B_4)B_5$, $\varepsilon_3=B_1B_2(B_3-B_4)B_5$, то допирателните пространства на линейните повърхнини M_1^{2d}, M_1^{2e} и M_1^{2f} са съответно ε_1, ε_2, ε_3.

Всяка от линейните повърхнини M_1^{2d}, M_1^{2e} и M_1^{2f} има във фокусите на конгруенцията, към която принадлежи, за допирателни равнини тези на развиваемите повърхнини, принадлежащи на същата конгруенция, а в точката B_2 допирателните равнини са

$$\zeta_2^{2d}=\varepsilon\cap\varepsilon_1=B_1B_2B_3 \qquad \text{за } M_1^{2d},$$
$$\zeta_2^{2e}=\varepsilon\cap\varepsilon_2=B_1B_2(B_3+B_4) \text{ за } M_1^{2e},$$
$$\zeta_2^{2f}=\varepsilon\cap\varepsilon_3=B_1B_2(B_3-B_4) \text{ за } M_1^{2f}.$$

Фокусите на конгруенцията $(1.d)$ бяха F_2 и F_3. Следователно първата фокална права $f_1=\overline{F}_2\overline{F}_3$ на M_3 лежи в допирателното тримерно пространство ε_1 на M_1^{2d}. Тогава f_1 и допирателната равнина ζ_2^{2d} към M_1^{2d} в точката B_2 ще имат обща точка и тя е първата фокална точка $\overline{\overline{F}}_1$ на M_2, т. е. за върха B_3 на полуканоничния репер имаме

$$B_3=\overline{\overline{F}}_1=f_1\cap\zeta_2^{2d}.$$

Подобни разглеждания за конгруенцията $(1.e)$ показват, че втората фокална точка $\overline{\overline{F}}_2=B_3+B_4$ на M_2 лежи в допирателната равнина към M_1^{2e} в B_2, т. е.

$$\overline{\overline{F}}_2=B_3+B_4=f_2\cap\zeta_2^{2e}.$$

И накрая — третата фокална точка $\overline{\overline{F}}_3=B_3-B_4$ на M_2 лежи в допирателната равнина към M_1^{2f} в точката B_2, т. е.

$$\overline{\overline{F}}_3=B_3-B_4=f_3\cap\zeta_2^{2f}.$$

Правата, върху която лежат фокалните точки $\overline{\overline{F}}_1$, $\overline{\overline{F}}_2$, $\overline{\overline{F}}_3$ на M_2, ще наричаме фокална права на подмногообразието M_2 за точката B_2 и ще я означаваме с f.

От горните разглеждания следва, че ръбът B_3B_4 съвпада с фокалната права f на M_2, като върхът B_3 е поместен във фокалната точка $\overline{\overline{F}}_1$ на M_2, а B_4 е хармонично спрегнат с $\overline{\overline{F}}_1$ относно останалите две фокални точки $\overline{\overline{F}}_2$ и $\overline{\overline{F}}_3$ на M_2. С това геометричната характеристика на репера е дадена.

Накрая да отбележим, че построеният полуканоничен репер не е еднозначен, тъй като върхът B_1 може да бъде поместен в кой да е от трите фокуса на правата, описваща съвкупността M_3.

§ 2. Специални подмногообразия M_2 на M_3

Различните съотношения между инвариантите a_i^j, b_i^j отделят различни класове подмногообразия M_2 на M_3. В този параграф ще отбележим най-простите свойства на някои от тях. За целта най-напред ще направим две бележки.

а) Спрямо построения полуканоничен репер на M_3 диференциалните уравнения на асимптотичните линии за фокалните хипер повърхнини (F_i), $i=1, 2, 3$, са, както следва:

$$2\bar{x}_6\Omega_1^3\Omega_2^5+(\bar{x}_1-2\bar{x}_6)(\Omega_1^3)^2+2\bar{x}_2\Omega_1^3\Omega_1^4+\bar{x}_4(\Omega_1^4)^2-\bar{x}_6(\Omega_2^5)^2=0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(\bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_6)(\Omega_1^3)^2+(\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_6+\bar{z}_5-\bar{y}_2)(\Omega_1^4)^2\\ +(\bar{z}_6-\bar{y}_6)(\Omega_2^5)^2\\ +2(\bar{z}_4-\bar{z}_3-\bar{z}_6-\bar{z}_5-\bar{y}_4)\Omega_1^3\Omega_1^4+2(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{y}_6)\Omega_1^3\Omega_2^5\\ +2(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6)\Omega_1^4\Omega_2^5=0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(\bar{y}_6-\bar{y}_2-\bar{z}_2-\bar{z}_3+\bar{z}_5)(\Omega_1^3)^2+(\bar{z}_3+\bar{z}_6-\bar{z}_2-\bar{z}_5-\bar{y}_2)(\Omega_1^4)^2\\ +(\bar{y}_6+\bar{z}_6)(\Omega_2^5)^2\\ +2(\bar{z}_6-\bar{y}_4-\bar{z}_4+\bar{z}_3-\bar{z}_5)\Omega_1^3\Omega_1^4+2(\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_6)\Omega_1^3\Omega_2^5\\ +2(\bar{z}_5-\bar{z}_3-\bar{z}_6)\Omega_1^4\Omega_2^5=0.\end{aligned} \tag{6}$$

б) Допирателното пространство от втори ред в правата $\overline{12}$ към подмногообразието M_2, т. е. на всевъзможните еднопараметрични подсъвкупности на M_3, удовлетворяващи уравнението (1), се определя от правите

$$\overline{12},\quad \overline{14}-\overline{23},\quad \overline{13}-\overline{24}-\overline{25},$$

$$A\overline{14}+2\,\overline{34}+B\,\overline{13}+\bar{x}^{*}\overline{15}+\bar{x}_1\overline{25},\ -\bar{y}_4\,\overline{13}-2\,\overline{34}-2\,\overline{35}+C\,\overline{15} \tag{7}$$

$$-\bar{z}_4\overline{23}+\bar{x}_4\overline{25},$$

$$2\bar{z}_2\overline{14}+2\,\overline{45}+2\,\bar{y}_2\overline{13}-2\bar{x}_2\overline{25}-D\,\overline{15},$$

където

$$A=\bar{z}_6+2\bar{z}_3-\bar{z}_4,\quad B=-2\bar{z}_5-\bar{y}_6-\bar{y}_4,$$

$$C=\bar{y}-\frac{1}{2}\bar{y}_2-\frac{1}{2}\bar{z}_4+\frac{1}{2}\bar{z}_3+\frac{1}{2}\bar{z}_6, \tag{8}$$

$$D=\bar{x}+\bar{y}^{*}-1-\frac{1}{2}\bar{z}_2-\frac{1}{2}\bar{y}_4-\frac{1}{2}\bar{z}_5,\qquad \overline{ij}=(B_iB_j),$$

$$i,\ j=1,\ldots,5,\quad i\neq j.$$

Шестте линейно независими прави (7) определят една линейна двупараметрична съвкупност L_2 от прави. В [3] е показано, че такава съвкупност от прави образува една хиперповърхнина на Власов, която е от трета степен и представлява геометрично място на прави, пресичащи пет равнини. Всеки четири от тези равнини са в общо положение, а петата е асоциирана с тях. Пресечните точки на правата $\overline{12}$ с петте асоциирани равнини се наричат точки на Власов, а всяка еднопараметрична съвкупност на M_2, която има за фокус точка на Власов, се нарича повърхнина на Власов.

Следователно във всяка права $p=B_1B_2$ на M_3 правите (7) определят една хиперповърхнина на Власов за подмногообразието M_2: $\Omega_2^5=0$. Тъй като правите (7) пресичат петте асоциирани равнини, то дуалните им грасманови координати a^{ij}, $i,\ j=1,\ldots,5$, $i\neq j$, удовлетворяват освен уравненията [3]

$$\begin{aligned}
&a^{12}a^{34}-a^{13}a^{24}+a^{14}a^{23}=0,\\
&a^{12}a^{35}-a^{13}a^{25}+a^{15}a^{23}=0,\\
&a^{12}a^{45}-a^{14}a^{25}+a^{15}a^{24}=0,\\
&a^{23}a^{45}-a^{24}a^{35}+a^{25}a^{34}=0,\\
&a^{13}a^{45}-a^{14}a^{35}+a^{15}a^{34}=0
\end{aligned} \tag{9}$$

още и връзките.

$$\begin{aligned}
&a^{12}=0,\\
&a^{14}-a^{23}=0,\\
&a^{13}-a^{24}-a^{25}=0,\\
&Ba^{13}+Aa^{14}+\bar{x}^{*}a^{15}+\bar{x}_1a^{25}+2a^{34}=0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{y}_4 a^{13} - C a^{15} + \bar{z}_4 a^{23} - \bar{x}_4 a^{25} + 2a^{34} + 2a^{35} = 0,$$
(10)
$$2\bar{y}_2 a^{13} + 2\bar{z}_2 a^{14} - D a^{15} - 2\bar{x}_2 a^{25} + 2a^{45} = 0.$$

Като определим a^{12}, a^{14}, a^{13}, a^{34}, a^{35}, a^{45} от (10) и заместим в (9), получаваме

$$(a^{24} + a^{25})a^{24} - (a^{23})^2 = 0,$$
$$(a^{24} + a^{25})a^{25} - a^{15}a^{23} = 0,$$
$$a^{23}a^{25} - a^{15}a^{24} = 0,$$

(11)
$$a^{23}\left[\frac{D}{2}a^{15} - \bar{z}_2 a^{23} - \bar{y}_2 a^{24} + (\bar{x}_2 - \bar{y}_2)a^{25}\right]$$
$$-\frac{1}{2}a^{24}[(B - y_4)a^{24} + (A - z_4)a^{23}$$
$$+ (\bar{x}_1 + \bar{x}_4 - y_4 + B)a^{25} + (C + x^*)a^{15}] - \frac{1}{2}a^{25}[Aa^{23} + Ba^{24}$$
$$+ (\bar{x}_1 + B)a^{25} + \bar{x}^* a^{15}] = 0,$$
$$(a^{24} + a^{25})\left[\frac{D}{2}a^{15} - \bar{z}_2 a^{23} - \bar{y}_2 a^{24} + (\bar{x}_2 - \bar{y}_2)a^{25}\right] - \frac{1}{2}a^{23}[(B - \bar{y}_4)a^{24}$$
$$+ (A - \bar{z}_4)a^{23} + (\bar{x}_1 + x_4 - \bar{y}_4 + B)a^{25} + (C + \bar{x}^*)a^{15}] - \frac{1}{2}a^{15}[Aa^{23} + Ba^{24}$$
$$+ (\bar{x}_1 + B)a^{25} + \bar{x}^* a^{15}] = 0.$$

I. Нека $a^{23} = 0$. Тогава имаме следните възможности: а) $a^{24} = 0$ и b) $a^{24} = -a^{25} \neq 0$. При а), съответно b), получаваме, че такава равнина съществува, ако $\bar{x}^* = 0$, съответно $\bar{x}_4 = 0$, и не съществува, ако $\bar{x}^* \neq 0$, съответно $\bar{x}_4 \neq 0$.

II. Нека $a^{23} \neq 0$. Тогава и $a^{24} \neq 0$. Полагаме $a^{23} = 1$ и получаваме

(12)
$$a^{15} = \frac{1 - (a^{24})^2}{(a^{24})^2}, \quad a^{25} = \frac{1 - (a^{24})^2}{a^{24}},$$

където a^{24} удовлетворява уравнението

$$2\bar{x}_4(a^{24})^5 + (\bar{z}_3 + \bar{z}_4 + \bar{z}_6 + 2\bar{y} - \bar{y}_2 - 4\bar{x}_2)(a^{24})^4 + (2 + 2\bar{x}_1 + 3\bar{y}_4$$
$$+ \bar{z}_5 - 2\bar{x} - 2\bar{x}_4$$
(13)
$$- 2\bar{y}^* - 3\bar{z}_2)(a^{24})^3 + (4\bar{x}_2 + 2\bar{x}^* + 3\bar{z}_4 - 3\bar{y}_2 - 2\bar{y} - 5\bar{z}_3 - 3\bar{z}_6)(a^{24})^2$$
$$+ (2\bar{x} + 2\bar{y}^* + \bar{y}_4 + 2\bar{y}_6 + 3\bar{z}_5 - 2 - 2\bar{x}_1 - \bar{z}_2)a^{24} - 2\bar{x}^* = 0.$$

Следователно дуалните координати на всяка равнина от петте асоциирани равнини, за която $a^{23}\neq 0$, се определят от (10), (12) и (13).

Направените бележки a) и b) ще използуваме, за да отделим някои специални подмногообразия M_2 на съвкупността M_3.

1. Ако $x_4=0$, то подмногообразието M_2 се характеризира със следните по-важни свойства: a) еднопараметричната му съвкупност M_1^{2d} поражда върху фокалната хиперповърхнина (F_1) асимптотична линия (двуфокусната конгруенция $(1.d)$ беше спрегната [9] относно (F_2) на първата развиваема повърхнина); b) фокусът F_1 на M_3 е точка на Власов, а M_1^{2d} е съответната повърхнина на Власов за подмногообразието.

Наистина свойството a) следва веднага от уравнението (4), а от предните разглеждания следва, че

$$\alpha_1(a^{12}=a^{13}=a^{14}=a^{15}=a^{23}=0,\quad a^{24}=2,\quad a^{25}=-2,\tag{14}$$
$$a^{34}=\bar{x}_1,\quad a^{35}=-\bar{x}_1,\quad a^{45}=-2\bar{x}_2)$$

е равнина на Власов. В точкови координати x^i, $i=1,\ldots,5$, тя има представяне

$$2x^2+\bar{x}_1x^3+2\bar{x}_2x^4=0,$$
$$\alpha_1: x^4-x^5=0;$$

т. е. $\alpha_1=B_1(\bar{x}_1B_2-2B_3)(\bar{x}_2B_2-B_4-B_5)$, откъдето следва свойство b).

2. Ако $\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6-\bar{y}_2=0$ $(\bar{z}_3+\bar{z}_6-\bar{z}_2-\bar{z}_5-\bar{y}_2=0)$, то съвкупността M_1^{2d} на M_2 поражда асимптотична линия върху втората (третата) фокална хиперповърхнина.

3. Подмногообразието $2(\bar{z}_2+\bar{z}_4-z_3-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_4)-\bar{y}_6-\bar{z}_6=0$ се характеризира със: a) M_1^{2e} поражда асимптотична линия върху фокалната хиперповърхнина (F_2) (конгруенцията $(1.e)$ беше спрегната относно (F_2) с втората развиваема повърхнина); b) равнината

$$\alpha_2(a^{12}=a^{15}=a^{25}=0,\quad a^{13}=a^{24}=-1,\quad a^{14}=a^{23}=1,\tag{15}$$
$$a^{34}=\bar{y}_2-\bar{z}_2+\frac{1}{2}(\bar{y}_4-\bar{z}_4),\quad a^{35}=-a^{45}=\bar{z}_2-\bar{y}_2)$$

удовлетворява уравнението (13). Следователно $\alpha_2=(B_1+B_2)[(\bar{z}_2-\bar{y}_2)B_1+B_5]\{[\bar{z}_4-\bar{y}_4+2(\bar{z}_2-\bar{y}_2)]B_2+2B_3+2B_4\}$ е равнина на Власов, фокусът F_2—точка на Власов, а M_1^{2e} — повърхнина на Власов за това подмногообразие.

4. За подмногообразието $\bar{x}_1+2\bar{x}_2+\bar{x}_4-2\bar{x}_6=0$ $(\bar{y}_6+3\bar{z}_6+2(\bar{z}_3-\bar{z}_2-\bar{z}_4-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_4)=0)$ съвкупността му M_1^{2e} поражда асимптотична линия върху първата (третата) фокална хиперповърхнина.

5. Ако $2(\bar{z}_4+\bar{z}_5-\bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{y}_2+\bar{y}_4)+\bar{y}_6-\bar{z}_6=0$, то съвкупността M_1^{2f} на M_3 поражда асимптотична линия върху третата фокална хиперпо-

върхнина на M_3 (конгруенцията $(1.f)$ беше спрегната с третата развиваема повърхнина относно (F_3)). Сега равнината

$$(16)\qquad \alpha_3(a^{12}=a^{15}=a^{25}=0,\ a^{13}=a^{14}=a^{23}=a^{24}=1,\ a^{34}=z_2+y_2$$

$$-\frac{1}{2}(y_4+z_4),\quad a^{35}=a^{45}=-y_2-z_2)$$

е решение на (13). Следователно $\alpha_3=(B_1-B_2)[(y_2+z_2)B_1-B_5]\{[y_4+z_4-2(y_2+z_2)B_2]+2B_3-2B_4\}$ е равнина на Власов, фокусът F_3 на M_3 е точка на Власов, а M_1^{2f} — повърхнина на Власов за това подмногообразие.

6. Ако $x_1-2x_2+x_4-2x_6=0$ $(3z_6-y_6+2(z_2+z_3+z_5-z_4-y_2+y_4)=0)$, съвкупността M_1^{2f} на M_2 поражда асимтотична линия върху първата (втората) фокална хиперповърхнина на M_3.

7. Ако $2(z_3+z_6-z_5)-y_2-y_4-z_2-z_4=0$, еднопараметричните съвкупности M_1^{2d} и M_1^{2e} на M_2 са спрегнати относно третата фокална хиперповърхнина (F_3 е общ фокус за двуфокусните конгруенции $(1.d)$ и $(1.e)$).

8. Ако $x_2+x_4=0$ $(z_2+z_4-y_2-y_4=0)$, то еднопараметричните съвкупности M_1^{2d} и M_1^{2e} на M_2 са спрегнати относно първата (втората) фокална хиперповърхнина.

9. За подмногообразието $2(z_3+z_5+z_6)+z_2-z_4+y_4-y_2=0$ съвкупностите M_1^{2d} и M_1^{2f} са спрегнати относно втората фокална хиперповърхнина (F_2 е общ фокус за $(1.d)$ и $(1.f)$).

10. За подмногообразието $x_2-x_4=0$ $(y_4-y_2+z_4-z_2=0)$ еднопараметричните съвкупности M_1^{2d} и M_1^{2f} са спрегнати относно първата (третата) фокална хиперповърхнина на M_3.

11. Ако $x_1-x_4-2x_6=0$, то съвкупностите M_1^{2e} и M_1^{2f} са спрегнати относно първата фокална хиперповърхнина (F_1 е общ фокус за конгруенциите $(1.e)$ и $(1.f)$).

12. За подмногообразието $y_6+z_6+2z_3+2z_5=0$ $(z_6-y_6+2z_3-2z_5=0)$ съвкупностите му M_1^{2e} и M_1^{2f} са спрегнати относно втората (третата) фокална хиперповърхнина на M_3.

13. Ако $z_2+z_4-y_2-y_4=0$, $z_3+z_5+z_6+y_4-z_4=0$ $(y_4-y_2+z_4-z_2=0,\ z_3+z_6-z_4-z_5-y_4=0)$, то еднопараметричната съвкупност M_1^{2d} на M_2 е хармонично спрегната с всяка негова еднопараметрична съвкупност относно втората (третата) фокална хиперповърхнина на M_3. Сега в M_2 няма друга еднопараметрична съвкупност, която да поражда асимптотична линия върху (F_2) $((F_3))$ освен M_1^{2d}. В помощната проективна равнина [9] P_2 правата — образ на M_2, се допира в точката — образ на M_1^{2d}, към кривата k_2 (k_3) — образ на съвкупността от еднопараметричните подсъвкупности на M_3, пораждащи върху (F_2) $((F_3))$ асимптотични линии.

14. Подмногообразието $\bar{x}_2=0$ ($\bar{y}_4-\bar{z}_4=0$, съответно $\bar{y}_4+\bar{z}_4=0$) се характеризира с това, че еднопараметричната му съвкупност M_1^{2d} е хармонично спрегната относно втората и третата развиваеми повърхнини на обхващащата я съвкупност M_3 с общата еднопараметрична съвкупност на двуфокусната конгруенция (1.d) и спрегнатото подмногообразие M_2 на M_1^{2d} относно (F_1) ((F_2), съответно (F_3)).

Аналогични на подмногообразията 14. има още шест — три за M_1^{2e} и три за M_1^{2f}.

15. Подмногообразието $b_2^1=0$, т. е. $\bar{y}_2+\bar{z}_4-\bar{z}_3-\bar{z}_6=0$ ($a_2^1=0$, т. е. $2\bar{x}_6-\bar{y}_4-\bar{z}_2-\bar{z}_5=0$), се характеризира с това, че ръбът B_2B_3 (B_2B_4) на каноничния му репер описва параболична конгруенция с развиваема повърхнина M_1^{2d} (M_1^{13} — хармонично спрегнатата на M_1^{2d} относно M_1^{2e} и M_1^{2f}) и фокус B_2.

Подмногообразията M_2, отбелязани дотук, съществуват във всяка съвкупност M_3 от разглеждания вид.[1] Да покажем това например за съвкупността от точка 9. От равенствата (1.42)[2] на [8] и връзката

$$2(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6)+\bar{z}_2-\bar{z}_4+\bar{y}_4-\bar{y}_2=0 \tag{17}$$

при изменение на вторичните параметри получаваме

$$(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6)(3\pi_3^5-\pi_4^5)=0. \tag{18}$$

Коефициентът $z_3+z_5+z_6$ в (18) е различен от нула, тъй като в противен случай поради (17) ще следва, че втората развиваема повърхнина е конична, което противоречи на предположението за M_3. Тогава $3\pi_3^5-\pi_4^5=0$, което показва, че един от полувторичните параметри е фиксиран в резултат на това, че сме отнесли съвкупността M_3 към подмногообразието от точка 9.

Аналогично и при останалите се вижда, че съответната връзка между диференциалните инварианти води до фиксиране на някои от полувторичните параметри, а това показва, че отбелязаните подмногообразия M_2 съществуват във всяка съвкупност M_3 [2]. За подмногообразието от точка 13. имаме

$$\begin{matrix}(\bar{z}_4-\bar{y}_4)(\pi_4^5+\pi_3^5)=0, \\ (\bar{z}_4-\bar{y}_4)(\pi_3^5-\pi_4^5)=0,\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}(\bar{z}_4+\bar{y}_4)(\pi_4^5-\pi_3^5)=0, \\ (\bar{z}_4+\bar{y}_4)(\pi_3^5+\pi_4^5)=0,\end{matrix}\right),$$

откъдето поради $\bar{z}_4-\bar{y}_4\neq 0$ ($\bar{z}_4+\bar{y}_4\neq 0$) получаваме $\pi_3^5=\pi_4^5=0$, т. е. отнасянето на съвкупността M_3 към това подмногообразие M_2 фик-

[1] Тъй като всички специални класове M_2, които разглеждаме, са свързани с уравненията (4) — (6), то всяка от развиваемите повърхнини на M_3 е различна от конична.

[2] Четвъртото от тези равенства е $\delta\bar{y}_2=(\bar{y}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_6)\pi_3^5+(2\bar{y}_4+\bar{z}_5-\bar{z}_2)\pi_3^5$.

сира полувторичните параметри и следователно реперът става каноничен за M_3.

16. За подмногообразието $\bar{x}_2=\bar{x}_4=0$ еднопараметричната съвкупност M_1^{2d} е хармонично спрегната с всяка еднопараметрична подсъвкупност на M_3 относно първата фокална хиперповърхнина. M_1^{2d} поражда върху (F_1) асимптотична линия, фокусът F_1 е точка на Власов за M_2, а M_1^{2d} — съответната повърхнина на Власов. Сега в помощната равнина P_2 кривата k_1 се разпада на две прави, т. е. $k_1=g_1\cup g_2$, където

$$g_{1,2}:\Omega_2^5=(1\pm\sqrt{-1-\bar{x}_1})\,\Omega_1^3,$$

с пресечна точка — образа на M_1^{2d}. Следователно асимптотичните линии на първата фокална хиперповърхнина на M_3 се пораждат само от еднопараметричните подсъвкупности, принадлежащи на подмногообразията M_2^1 и M_2^2 — прообрази на g_1 и g_2.

Аналогични на подмногообразията в т. 13. и 16. има още четири — две съответно за M_1^{2e} и две съответно за M_1^{2f}.

17. Ако $a_3^4-a_3^5=0$, $b_3^4-b_3^5=0$, т. е. $\bar{x}_1-\bar{x}_6=0$, $\bar{x}_2=0$, то ръбът B_1B_3 на каноничния репер на подмногообразието M_2 описва двуфокусна конгруенция с допирателна хиперравнина $B_1B_2B_3(B_4+B_5)$. Сега M_2 притежава и свойствата от т. 14. Обхващащото многообразие в този случай притежава следната особеност: асимптотичните линии върху (F_1) се пораждат само от еднопараметричните подсъвкупности, принадлежащи на подмногообразията

$$M_2^{1,2}:\Omega_1^4=\pm\sqrt{\frac{\bar{x}_6}{\bar{x}_4}}\,(\Omega_1^3-\Omega_2^5).$$

18. Ако $x_4=0$, $2(\bar{y}_2+z_3-z_4)+\bar{z}_6=0$, $2(y_4+z_5-z_2)+\bar{y}_6=0$, то съвкупностите M_1^{2d}, M_1^{2e}, M_1^{2f} на M_2 пораждат асимптотични линии съответно върху (F_1), (F_2) и (F_3). Фокусите на M_3 са точки на Власов, а M_1^{2d}, M_1^{2e}, M_1^{2f} — повърхнини на Власов за M_2. Равнините (14), (15) и (16) са три от петте асоциирани равнини на Власов, а останалите две се определят от уравнението

$$(19)\qquad (-4x_2+2\bar{y}+3\bar{z}_4-3\bar{y}_2-\bar{z}_3)(a^{24})^2+(-2\bar{x}-2\bar{x}_6-2\bar{y}^*$$
$$-3\bar{z}_2+3\bar{y}_4+\bar{z}_5+2\bar{x}_1)a^{24}+2\bar{x}^*=0.$$

Сега обхващащото многообразие M_3 притежава следната особеност: в него има три еднопараметрични подсъвкупности, принадлежащи съответно на двуфокусните конгруенции (1.*d*), (1.*e*) и (1.*f*) и на едно афокално подмногообразие (разглежданото), такива, че всяка от тях поражда асимптотична линия върху онази фокална хиперповърхнина,

която се описва от непринадлежащия фокус на обхващащата я двуфокусна конгруенция.

19. Подмногообразието $x_4=0$, $x_2=0$, $x_1-2x_6=0$ $(z_2+z_3+z_5+z_6-y_2=0$ $2(z_2+z_4-z_3-z_5-y_2-y_4)-y_6-z_6=0$, $2(z_2+z_3+z_5-z_4-y_2+y_4)+3z_6-y_6=0$; $z_3+z_6-z_2-z_5-y_2=0$, $2(z_3-z_2-z_4-z_5-y_2-y_4)+y_6+3z_6=0$, $2(z_4+z_5-z_2-z_3-y_2+y_4)+y_6-z_6=0)$ се характеризира с това, че M_1^{2d}, M_1^{2e}, M_1^{2f} пораждат асимптотични линии върху (F_1) $((F_2)$; $(F_3))$, фокусът F_1 $(F_2; F_3)$ е точка на Власов, а M_1^{2d}, $(M_1^{2e}; M_1^{2f})$ — повърхнина на Власов за това подмногообразие M_2. Сега M_1^{2d} $(M_1^{2e}; M_1^{2f})$ е спрегната с всяка еднопараметрична подсъвкупност на M_3. В помощната проективна равнина P_2 кривата k_1 $(k_2; k_3)$ се разпада на две прави — едната от тях е образът на разглежданото подмногообразие M_2, а другата е образът на двуфокусната конгруенция $(1.d)$ $((1.e); (1.f))$. Следователно онези еднопараметрични подсъвкупности пораждат асимптотични линии върху (F_1) $((F_2); (F_3))$, които принадлежат на M_2 и $(1.d)$ $(M_2$ и $(1.e); M_2$ и $(1.f))$.

Подмногообразията M_2, отбелязани в т. 16. — 19., не съществуват във всяка съвкупност M_3 от разглеждания вид. Връзките между диференциалните инварианти, които отделят тези подмногообразия M_2, налагат известни особености и на обхващащото многообразие M_3, някои от които посочихме..

Всички разгледани в този параграф специални подмногообразия M_2 на съвкупността M_3 са нехолономни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П.: Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
2. Щербаков, Р. Н.: О методе репеража подмногообразий. Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 5—11.
3. Карапетян, С. Е.: Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 15 (1962), № 1, 53—72.
4. Карапетян, С. Е.: Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 15 (1962), № 2, 25—43.
5. Карапетян, С. Е.: Проктивно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 15 (1962), № 3, 17—28.
6. Гайдельман, Р. М.: Проективная теория конгруэнций прямых четырехмерного пространства. Лит. матем. сб., 1963, 3, № 2, 250.
7. Иванова, И.-Каратопраклиева: Каноничен репер на трипараметричните съвкупности от прави в четиримерното проективно пространство. Изв. на Мат. инст. на БАН, 9, 196, 275—293.
8. Иванова, И.-Каратопраклиева: Диференциална геометрия на двупараметричните подмногообразия на многообразието M_3 от прави в P_4 (I). Год. на Соф. унив. Мат. фак., 62 (1967/68), 123—156.
9. Иванова, И.-Каратопраклиева: Някои геометрични тълкувания на диференциалните инварианти от втори ред на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Изв. на Мат. инст. на БАН, 10, 59—67.

Постъпила на 12. XI. 1970 г.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES SOUS-VARIÉTÉS M_2 DU SYSTÈME M_3 DE DROITES DANS P_4 (II)

Iv. Ivanova-Karatoprakliéva

(RÉSUMÉ)

Cet article est une suite de l'article [8]. Dans le premier paragraphe on montre que le repère semicanonique [8] du système M_3 est attaché invariablement à la sous-variété afocale M_2 par rapport de laquelle est rapporté M_3.

Le sommet B_1 coïncide avec le foyer F_1 de M_3 et B_2 est conjugué harmonique par rapport aux autres foyers F_2 et F_3 de M_3. B_5 coïncide avec le premier point focal $\overline{F_1}$ de M_3. B_3B_4 est la droite focale f de M_2 pour le point B_2. B_3 coïncide avec le premier point focal $\overline{\overline{F_1}}$ de M_2 et B_4 est conjugué harmonique avec $\overline{\overline{F_1}}$ par rapport aux autres points focaux $\overline{F_2}$ et $\overline{F_3}$ de M_2.

Dans le deuxième paragraphe on considère certaines sous-variétés afocales spéciales M_2 (non-holonomes) de M_3. On donne pour elles une caractéristique géométrique avec les sous-variétés à une dimension M_1^{2d} M_1^{2e} et M_1^{2f} — communes pour M_2 et les trois congruences hyperboliques de M_3. On utilise les formes asymptotiques des hypersurfaces focales de M_3 et l'hypersurface de Vlassov pour M_2.