ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОМПЛЕКС ОТ ПРАВИ С ЛИНЕЙНИ ФОРМИ В ПРОЕКТИВНИ ПРОСТРАНСТВА

Адриян В. Борисов

От класическата диференциална геометрия на повърхнините в тримерното евклидово пространство е известно, че една повърхнина се определя със своите първа и втора основна форма. Съвсем естествено възниква въпросът за определяне на комплекс от прави с форми на Пфаф в някои подпространства на тримерното проективно пространство P_3. В настоящата работа този въпрос се решава в положителен смисъл в пространствата A_2^1 и A_2 (g).

Аналогични разглеждания са правени и в други пространства. В. Хаак и С. П. Фиников определят комлекс от прави в тримерното евклидово пространство с три линейни форми [4], [5]. Г. Станилов определя комплекс от прави в двуосното пространство както с три линейни форми, така също и с две квадратни форми [2], [3].

§ 1

Пространството A_2^1 е подпространство на тримерното проективно пространство P_3. Абсолютът му се състои от две реални точки E_3, E_4 и една реална равнина ε, минаваща през едната от тях. Фундаменталната му група е седемпараметрична. Ще използваме репери $A_1A_2A_3A_4$, притежаващи свойствата: върховете A_3, A_4 съвпадат с абсолютните точки E_3, E_4, а абсолютната равнина ε има тангенциални координати

$$\varepsilon=(A_4,\quad A_1+A_3,\quad A_2+A_3).$$

Инфинитезималните преобразования на върховете на такъв репер се дават с формулите:

$$\begin{aligned}
dA_1&=(\omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^2)A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3+\omega_1^4A_4,\\
dA_2&=\omega_2^1A_1+(\omega_2^3+\omega_3^3-\omega_2^1)A_2+\omega_2^3A_3+\omega_2^4A_4,\\
dA_3&=\omega_3^3A_3,\\
dA_4&=\omega_4^4A_4,
\end{aligned}\tag{1}$$

като пфафовите форми ω_i^j удовлетворяват структурните уравнения на пространството:

$$
\begin{aligned}
&D\omega_1^2=[\omega_1^3-\omega_2^3+\omega_2^1,\ \omega_1^2],\ D\omega_1^3=[\omega_1^3-\omega_2^3,\ \omega_1^2],\\
&D\omega_1^4=[\omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^2-\omega_4^4,\ \omega_1^4]+[\omega_1^2\omega_2^4],\\
(2)\qquad &D\omega_2^1=[\omega_2^3-\omega_1^3+\omega_1^2,\ \omega_2^1],\ D\omega_2^3=[\omega_2^3-\omega_1^3,\ \omega_2^1],\\
&D\omega_2^4=[\omega_2^3+\omega_3^3-\omega_2^1-\omega_4^4,\ \omega_2^4]+[\omega_2^1\omega_1^4],\\
&D\omega_3^3=0,\ D\omega_4^4=0.
\end{aligned}
$$

Като поставим върховете A_1, A_2 върху правата $p=p(u, v, w)$ на комплекса, можем да определим главните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4. Диференциалното уравнение на комплекса записваме във вида

$$\omega_2^4=a\omega_1^3+b\omega_1^4+c\omega_2^3. \tag{3}$$

От него с външно диференциране получаваме

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1=x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4+x_3\omega_2^3,\\
(4)\qquad &\varphi_2=x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^3,\\
&\varphi_3=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^3,
\end{aligned}
$$

като сме направили полагането

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1=da+a(\omega_4^4-\omega_3^3-\omega_2^3+\omega_2^1)+c\omega_2^1,\\
(4')\qquad &\varphi_2=db+b(\omega_1^3+\omega_2^1-\omega_2^3)-\omega_2^1,\\
&\varphi_3=dc+c(\omega_4^4-\omega_3^3+\omega_1^2)+a\omega_1^2.
\end{aligned}
$$

При изменение само на вторичните параметри са в сила равенствата

$$
\begin{aligned}
&\delta a+a(\pi_4^4-\pi_3^3+\pi_2^1)+c\pi_2^1=0,\\
(5)\qquad &\delta b+(b-1)\pi_2^1=0,\\
&\delta c+c(\pi_4^4-\pi_3^3+\pi_1^2)+a\pi_1^2=0.
\end{aligned}
$$

Можем така да изберем тези параметри, че да постигнем

$$b=0,\quad c=0, \tag{6}$$

$$a=1. \tag{7}$$

За да интерпретираме тези равенства, нека $M=A_1+tA_2$ е произволна точка от правата p на комплекса. На нея в нормалната корелация на правата p съответствува равнина $\pi(t)$, която има тангенциални координати [6]

$$\pi(t)=(1+bt)(A_1A_2A_3)+(c-at)(A_1A_2A_4). \tag{8}$$

Точките от правата p, за които съответно $\pi(t)\angle A_3$, $\pi(t)\angle A_4$, се наричат **централни точки**. Те се определят от уравнението

$$abt^2+(a-bc)t-c=0 \tag{9}$$

и имат представянето

$$\begin{aligned} Z_1 &= aA_1+cA_2, \\ Z_2 &= -bA_1+A_2. \end{aligned} \tag{9'}$$

Следователно равенствата (6) означават, че точките A_1 и A_2 съвпадат с централните точки.

Сега можем да дадем геометрична интерпретация и на нормировката (7). Тя означава, че централните точки Z_1, Z_2, точката $N=(p, \varepsilon)$ и единичната точка A_1+A_2 на проективната координатна система върху p с основни върхове A_1, A_2 образуват хармонична група.

Реперът $A_1A_2A_3A_4$ е вече геометрически напълно определен. За него получаваме формулите:

$$\begin{aligned} &\omega_2^4-\omega_1^3=0, \\ &\omega_4^4-\omega_3^3+\omega_2^1=x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4+(x_3+1)\omega_2^3, \\ &\omega_2^1=x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^3, \\ &\omega_1^2=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^3, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\pi_1^3=0,\ \pi_1^4=0,\ \pi_2^3=0,\ \pi_2^4=0, \\ &\pi_1^2=0,\ \pi_2^1=0,\ \pi_4^4-\pi_3^3=0. \end{aligned} \tag{10'}$$

За да постигнем каноничен репер, е достатъчно да предположим, че детерминантата от координатите на върховете A_1, A_2, A_3, A_4 на репера има стойност 1, т. е.

$$(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)=1. \tag{11}$$

Диференцирането на последното равенство дава

$$\omega_1^3+\omega_2^3+3\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_1^2-\omega_2^1=0, \tag{11'}$$

$$3\pi_3^3+\pi_4^4=0. \tag{11''}$$

От (10) и (11′) се получават следните основни формули в диференциалната геометрия на комплекс от прави в разглежданото пространство:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2=x_3\omega_1^2+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^3, \\ &\omega_2^1=-x_2\omega_1^3-x_4\omega_1^4-x_5\omega_2^3,\ \omega_2^4=\omega_1^3, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\omega_3^3=-\frac{1}{4}\{(x_1+2x_2-x_3+1)\omega_1^3+(x_2+2x_4-x_5)\omega_1^4$$

$$+(x_3+2x_5-x_6+2)\omega_2^3\}, \tag{12}$$

$$\omega_4^4=\frac{1}{4}\{(3x_1+2x_2+x_3-1)\omega_1^3+(3x_2+2x_4+x_5)\omega_1^4$$

$$+(3x_3+2x_5+x_6+2)\omega_2^3.$$

Ще покажем, че ако са дадени формите ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, могат да бъдат определени инвариантите x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, а следователно и формите ω_1^2, ω_2^1, ω_2^4, ω_3^3, ω_4^4. За тази цел ще използваме структурните уравнения (2) на пространството и основните формули (12). Трябва да отбележим, че сигурно

$$\psi=[\omega_1^3\,\omega_1^4\,\omega_2^3]\neq 0,$$

защото външните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3 са линейно независими. Освен това ще отбележим, че външният диференциал на известна форма е известна величина.

От второто уравнение на (2), като умножим външно с ω_1^3, ω_1^4 и вземем пред вид (12), получаваме

$$x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^3\omega_1^3], \qquad -x_3-x_6=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^3\omega_1^4]. \tag{13}$$

По аналогичен начин от третото и петото уравнение на (2) намираме равенствата

$$\begin{gathered} x_6=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^4\omega_1^4], \quad 1-x_1-x_2-x_3-x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^4\omega_2^3], \\ x_4=\frac{1}{\psi}[D\omega_2^3\omega_1^3], \qquad -x_2-x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_2^3\omega_1^4]. \end{gathered} \tag{14}$$

От (13) и (14) определяме инвариантите x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$:

$$\begin{gathered} x_1=1+\frac{1}{\psi}\{[D(\omega_1^3+\omega_1^4+\omega_2^3),\ \omega_1^4]-[D\omega_1^4\omega_2^3]\}, \\ x_2=-\frac{1}{\psi}\{[D\omega_1^3\omega_1^3]+[D\omega_2^3\omega_1^4]\}, \\ x_3=-\frac{1}{\psi}[D(\omega_1^3+\omega_1^4),\ \omega_1^4], \quad x_4=\frac{1}{\psi}[D\omega_2^3\omega_1^3], \\ x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^3\omega_1^3], \quad x_6=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^4\omega_1^4]. \end{gathered} \tag{15}$$

Резултатът, който установихме, може да бъде формулиран в следната

Теорема 1. Нека са дадени три линейно независими пфафови форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3. Тогава формите ω_1^2, ω_2^1, ω_2^4, ω_3^3, ω_4^4 се определят от (12), като коефициентите x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, са точно тези от (15). Нека при това са удовлетворени всички уравнения на системата (2). Тогава напълно интегруемата система (1) определя с точност до произволна колинеация, запазваща абсолюта на пространството A_2^1, комплекс от прави, за който ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3 са базисни форми и x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, са инвариантите от втори ред.

§ 2.

Ще покажем, че и в пространството $A_2(g)$ е в сила теорема, подобна на тази, която доказахме в предния параграф. Пространството $A_2(g)$ е подпространство на тримерното проективно пространство P_3 и абсолютът му се състои от две реални точки E_3, E_4 и една реална права g, минаваща през едната от тях. Фундаменталната му група е седемпараметрична. Определяме семейство от репери по следния начин: върховете A_3, A_4 съвпадат с неподвижните точки E_3, E_4, а абсолютната права g има тангенциални координати

$$g=[A_4,\ A_1+A_2+A_3].$$

Уравненията на структурата са:

$$\begin{aligned}
&D\omega_1^2=-[\omega_2^1\omega_1^2],\ D\omega_1^3=[\omega_2^3-\omega_2^1,\ \omega_1^3]+[\omega_1^2\omega_2^3],\\
&D\omega_1^4=[\omega_1^3+\omega_2^3+\omega_3^3-\omega_2^1-\omega_4^4,\ \omega_1^4]+[\omega_1^2\omega_2^4],\\
&D\omega_2^1=-[\omega_1^2\omega_2^1],\ D\omega_2^3=[\omega_1^3-\omega_1^2,\ \omega_2^3]+[\omega_2^1\omega_1^3],\\
&D\omega_2^4=[\omega_1^3+\omega_2^3+\omega_3^3-\omega_1^2-\omega_4^4,\ \omega_2^4]+[\omega_2^1\omega_1^4].
\end{aligned}\tag{16}$$

Произволен комлекс от прави в разглежданото пространство определяме с диференциалното уравнение (3). Канонизацията на репера на този комплекс се извършва по аналогичен начин на този от § 1. Избирането на върховете A_1 и A_2 за централни точки Z_1 и Z_2 довежда до $b=0$, $c=0$. Правата p на комплекса пробожда равнината $\varepsilon=(A_3, g)$ в точка $N=(p, \varepsilon)$. Ако поставим условието точките Z_1, Z_2, N, A_1-A_2 да образуват хармонична група, получаваме $a=1$. Основните формули в диференциалната геометрия на комплекс от прави в пространството $A_2(g)$ са:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^3,\\
&\omega_2^1=-x_2\omega_1^3-x_4\omega_1^4-x_5\omega_2^3,\ \omega_2^4=\omega_1^3,\\
&\omega_3^3=-\frac{1}{4}\{(x_1-3x_3+2)\omega_1^3+(x_2-3x_5)\omega_1^4+(x_3-3x_6+2)\omega_2^3\},
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\omega_4^4=\frac{1}{4}\{(3x_1-4x_2-5x_3-2)\omega_1^3+(3x_2-4x_4-5x_5)\omega_1^1 \tag{17}$$
$$+(3x_3-4x_5-5x_6-2)\omega_2^3\}.$$

От структурните уравнения (16) и основните формули (17), както в § 1, намираме

$$x_4=-\frac{1}{\psi}[D\omega_1^3\omega_2^3],\quad x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^3\omega_1^3],$$

$$x_6=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^1\omega_1^4],\quad 1-x_3+x_5=-\frac{1}{\psi}[D\omega_2^3\omega_1^4], \tag{18}$$

$$1-x_1+2x_2+2x_3-x_5=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^4\omega_2^3].$$

От горната система можем да намерим x_2, x_5, x_6, от което следва, че знаем и формата ω_1^2. Тогава от първото уравнение на структурата получаваме

$$x_3x_5-x_2x_6=\frac{1}{\psi}[D\omega_1^2\omega_1^4]. \tag{19}$$

Ако предположим $x_6\neq 0$, получените шест уравнения (18), (19) са необходими и достатъчни за определянето на всички инварианти x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, участвуващи в (17). Тогава

Теорема 2. Нека са дадени три линейно независими пфафови форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3. Формите ω_1^2, ω_2^1, ω_2^4, ω_3^3, ω_4^4 се определят от (17), като коефициентите x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, са точно тези, които се получават от решението на системата, съставена от уравненията (18) и (19), при което е предположено, че $x_6\neq 0$. Нека при това са удовлетворени всички уравнения на системата (16). Тогава напълно интегруемата система (1) определя с точност до произволна колинеация, запазваща абсолюта на пространството A_2 (g), комплекс от прави, за който ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3 са базисни форми и x_i, $i=1, 2,\ldots, 6$, са инвариантите от втори ред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станилов, Г.: Геометрия линейчатых многообразий биаксиального пространства. Канд. дис., Киев, 1965.
2. Станилов, Г.: Комплекси от прави в двуосната геометрия. Изв. на Мат. инст. на БАН, 8 (1964), 23—61.
3. Станилов, Г.: Визначення комплексу прямих у біаксиальному просторі двома квадратичными формами. Вісник Кіевского Ун., сер. мех. та мат., 8 (1966), 110—123.
4. Haack, W.: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. Math. Zeitschr., 40 (1935), 560—581.

5. Фиников, С. П.: Геометрия комплекса прямых. Уч. зап. Моск. гор. пединст. им. Потемкина, 1 (1940), 3—26.
6. Кованцов, Н. И.: Теория комплексов, Киев, 1963.

Постъпила на 12. XI. 1970 г.

BESTIMMUNG DER GERADENKOMPLEXE DURCH LINEARFORMEN IN PROJEKTIVEN RÄUMEN

A. W. Borissow

(ZUSAMMENFASSUNG)

Der Raum A_2^1 $(A_2(g))$ ist der projektive Raum P_3, in dem zwei Punkte E_3, E_4 und eine Ebene ε (Gerade g) durch E_4 invariant sind. Wir bauen ein kanonisches Bezugssystem zur Behandlung von Geradenkomplexen in diesen Räumen auf. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Drei Linearformen ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, die gewissen Relationen genügen, bestimmen im Raum A_2^1 $(A_2(g))$ ein Geradenkomplex.