НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НОРМПОВЕРХНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Гергана Енева

В работе [1] Бертини рассматривает общие свойства двумерных линейчатых поверхностей V_2^{r-1} порядка $r-1$ проективных пространств S_r. Он называет их нормповерхностями этих пространств. Специально для V_2^3 ($r=4$) Бертини показывает, что ее проекция в S_3 из любой точки общего положения на поверхности есть квадрика F_2^2 и, что на V_2^3 лежит прямая, пересекающая все образующие.

З. А. Скопец в [4] дает несколько эквивалентных определений нормповерхности F_3^2. Он доказывает, что через каждую точку пространства T, не принадлежащую F_3^2, проходит единственная плоскость, пересекающая F_3^2 по кривой второго порядка.

Некоторые свойства поверхности F_3^2 установлены и в работах [2] и [3].

В предлагаемой работе рассматриваются новые вопросы теории нормповерхности четырехмерного проективного пространства.

1. Проективная эквивалентность нормповерхностей третьего порядка в P^4.

Двумерную поверхность третьего порядка P^4 мы определим как поверхность, след которой в любой гиперплоскости есть нормкривая третьего порядка и на которой имеется по крайней мере одна нераспавшаяся коника. Эта нормкривая третьего порядка может распадаться на конику и прямую, имеющие одну общую точку, или на три прямые. Во втором случае возможно совпадение двух или трех из прямых, или две из них скрещиваются, а третья их пересекает. Тогда произвольная плоскость в P^4 будет пересекать поверхность в трех точках или по конике (распавшейся или нет), или по прямой и в точке, или только по прямой.

Отметим, что в любой гиперплоскости двумерный конус третьего порядка тоже оставляет след в виде нормкривой третьего порядка, но на нем не лежит ни одна нераспавшаяся коника.

Пусть дана двумерная поверхность третьего порядка M_3^2 в P^4. Мы покажем, что она линейчатая и проективно эквивалентна с определенной в [2], [3], [4] поверхностью F_3^2*. Возьмем две гиперплоскости

---

* F_3^2 есть совокупность прямых, соединяющих пары соответствующих точек в проективном соответствии между точками одной коники c_2^0 и одной прямой u, не принадлежащие одной гиперплоскости.

P^3 и $(P^3)'$ пространства P^4. Пусть они пересекают поверхность M_3^2 соответственно по нормкривым третьего порядка c_3 и c_3', которые имеют три общие точки A, B, C, лежащие в плоскости σ^2, по которой пересекаются гиперплоскости P^3 и $(P^3)'$. Пусть U произвольная точка плоскости σ^2. Через U в P^3 проходит единственная бисеканта кривой c_3, а в $(P^3)'$ — единственная бисеканта кривой c_3'. Обе бисеканты определяют плоскость, которая имеет с поверхностью M_3^2 четыре общие точки и следовательно пересекает ее по конике. Итак, мы нашли двухпараметрическое множество плоскостей, пересекающих поверхность M_3^2 по коникам. Теперь найдем плоскости, для которых эти коники распадаются.

Известно, что проекция нормкривой c_3 из любой ее точки L есть конус с вершиной в этой точке. След этого конуса в плоскости σ^2 есть коника, проходящая через точки A, B, C. Она проходит еще через след касательной к c_3 в точке L и касается в этой точке следа в σ^2 соприкасающейся плоскости к c_3 в точке L. Таким образом, меняя точку L по c_3, мы получим в σ^2 семейство G коник, гроходящих через точки A, B, C. Следы в σ^2 касательных к c_3 определяют кривую четвертого порядка c_4, которая имеет точки A; B, C точками возврата и касается каждой коникой рассматриваемого множества G. Аналогично нормкривая c_3' определяет кривую четвертого порядка c_4' и однопараметрическое множество G' коник, проходящих через A, B, C. A, B, C являются точками возврата и для c_4' и c_4' касается каждой коникой семейства G'.

Теперь мы ищем конику k_2, которая принадлежит семействам G и G', т. е. которая проходит через точки A, B, C и касается c_4 и c_4'.

Рассмотрим произвольное квадратичное кремоновое преобразование в плоскости σ^2 с фундаментальными точками A, B, C. Так как кривая c_4 проходит через точки A, B, C и для нее они являются точками возврата, то она переходит в конику c_2, вписанную в треугольнике ABC. Аналогично кривая c_4' переходит в конику c_2', вписанную в треугольнике ABC. Обе коники c_2 и c_2' тогда имеют и четвертую общую касательную k и она в обратном преобразовании перейдет в конику k_2, проходящую через точки A, B, C и касающуюся кривыми c_4 и c_4'. Пусть S и S' точки на c_3 и c_3', из которых они проектируются на σ^2 в k_2.

Проведем через произвольную точку X_0 коники k_2 бисеканты нормкривых c_3 и c_3'. Бисеканта нормкривой c_3 пересечет кривую в точке S и еще в некоторой точке X, а бисеканта кривой c_3' пересечет ее в точке S' и еще в некоторой точке X'. Установим между точками кривых c_3 и c_3' соответствие φ так, что точки A, B, C являются инвариантными, а каждой точке X кривой c_3 соответствует полученная выше точка X' кривой c_3'. Мы покажем, что φ есть проективность.

Фиксируем на k_2 точку S_0 и проведем через нее бисеканты SS_0 и $S'S_0$ кривых c_3 и c_3'. Пучки плоскостей в P^3 и $(P^3)'$ с осями SS_0 и $S'S_0$ высекают соответственно на k_2 и c_3 и на k_2 и c_3' проективные ряды. При этом плоскости (SS_0X_0) и $(S'S_0X_0)$ пересекают c_3 и c_3' соответственно в точках X и X' и высекают в σ^2 один и тот же пучок прямых с центром в S_0. Следовательно, установленное нами соответствие на φ есть проективность.

Прямые XX' пересекают прямую SS', так как каждая из них лежит с ней в одной плоскости. Эти плоскости (SS', XX') пересекают M_3^2 по коникам.

Прямые XX', соединяющие пары соответственных точек при φ, или попарно скрещиваются, или все проходят через одну точку прямой SS'.

Допустим, что две такие прямые XX' и YY' пересекаются в точке, не лежащей на SS'. Тогда все три прямые SS', XX', YY' лежат в одной плоскости. Она принадлежит P^3, так как имеет с ней три общие точки S, X, Y, а также принадлежит $(P^3)'$, так как имеет с ней общие точки S', X' Y'. Но P^3 и $(P^3)'$ пересекаются по $\sigma^2=(ABC)$.

Случай, когда точка пересечения XX' и YY' лежит на SS', приводит к конусу третьего порядка, так как тогда все прямые, соединяющие пары соответственных точек, проходят через эту точку.

Фиксируем две бисеканты c_3 и c_3' — SX и $S'X'$, пересекающиеся в точке X_0 коники k_2 Проведем через плоскость $(SX, S'X')$ и каждую из прямых YY', ZZ', ..., соединяющих пары соответственных точек в проективности φ, пучок гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость этого пучка пересекает M_3^2 по нормкривой третьего порядка, которая распадается на конику в плоскости $(SX, S'X')$, проходящую через точки S, S', X, X', и на прямую. Если рассмотрим, например, гиперплоскость $[(SX, S'X'), YY']$, заметим, что прямая YY' не лежит в плоскости $(SX, S'X')$, а ее точки Y и Y', лежащие соответственно на c_3 и c_3', лежат на M_3^2. Следовательно, прямая YY' лежит на M_3^2. Аналогично получается, что все прямые, соединяющие пары соответственных точек при φ, лежат на M_3^2. Отсюда следует, что прямая SS' тоже лежит на M_3^2. Отметим, что в проективности φ точки S и S' вообще не соответственны.

Таким образом мы получили, что плоскости (SS', XX') пересекают M_3^2 по распавшимся коникам.

Мы показали, что поверхность M_3^2 линейчатая.

Плоскости (SS', XX') образуют гиперконус K_2^3 с одномерной вершинной SS', так как точки X_0, в которых эти плоскости пересекают плоскость σ^2, лежат на конике k_2.

Теперь фиксируем на поверхности M_3^2 невырожденную конику c_2^0 (мы предполагаем, что такая коника существует) в некоторой плоскости $\varkappa^2$. Гиперконус K_2^3 пересекает $\varkappa^2$ также по конике g_2. Мы покажем, что обе коники c_2^0 и g_2 совпадают. Допустим, что существует точка P, лежащая на g_2, но не лежащая на c_2. Через точку P проведем в плоскости $(SS'\ P)$ прямую l. Так как эта плоскость есть образующая гиперконуса K_2^3, то в ней лежит некоторая прямая XX', являющаяся образующей M_3^2. Прямая l имеет с M_3^2 две общие точки, именно точки, в которых она пересекает SS' и XX'. Также через точку P в плоскости $\varkappa^2$ мы проводим прямую m, которая пересечет M_3^2 тоже в двух точках; это точки, в которых m пересекает конику c_2^0. Тогда плоскость (l, m) имеет с M_3^2 четыре общие точки и, следовательно, пересечет ее по конике. Но гиперплоскость $[\varkappa^2, (l, m)]$ будет пересекать M_3^2 по распавшейся на две коники кривой четвертого порядка, чего быть не может. Следовательно, коники g_2 и c_2^0 совпадают, т. е. поверхность M_3^2 и гиперконус K_2^3 пересекают плоскость по одной и той же конике c_2^0.

Так как плоские образующие гиперконуса K_2^3 пересекают поверхность M_3^2 по распавшимся коникам, а плоскость $\varkappa^2$ в точках коники c_2^0, лежащей на M_3^2, то через каждую точку c_2^0 проходит прямая, соединяющая пару соответственных точек в проективном соответствии φ между нормкривыми третьего порядка c_3 и c_3'. Здесь очевидно, что прямая SS' не может пересекать плоскость коники c_2^0. При этом прямые XX', соединяющие пары соответственных точек при φ, высекут на c_2^0 и SS' проективные ряды. Следовательно, поверхность M_3^2 проективно эквивалентна с определенной в [2], [3], [4] двумерной поверхностью третьего порядка F_3^2.

2. Алгебраические кривые на F_3^2.

В специальной проективной системе координат поверхность F_3^2 имеет параметрические уравнения

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \mu : \lambda\mu : 1 : \lambda^2 : \lambda, \tag{1}$$

где параметры λ и μ неоднородные. Прямолинейные образующие поверхности получаются при $\lambda = \text{const.}$, а коники на F_3^2 получаются при $\mu = k\lambda + l$ [2].

Следуя [5], мы рассмотрим алгебраические кривые на F_3^2.

Пусть на поверхности F_3^2 имеем алгебраическую кривую c_p порядка p, которая пересекает фиксированную нераспавшуюся конику k_2, лежащую на поверхности, в s точках, а фиксированную образующую m в s_1 точках. Так как k_2 и m определяют гиперплоскость [2], то $s+s_1=p$. Покажем, что любая коника l_2, лежащая на F_3^2, пересекает c_p в s точках. Рассмотрим гиперплоскость $\gamma^3=(l_2, m)$; она должна пересекать c_p в p точках. s_1 из них уже лежат на образующей m. Тогда l_2 будет пересекать c_p в $p-s_1=s$ точках. Аналогичным образом видно, что каждая образующая m персекает c_p в s_1 точках.

Доказанное дает возможность определить алгебраическую кривую c_p на поверхности F_3^2 как совокупность точек, получающихся при значениях параметров λ и μ, удовлетворяющих уравнению вида:

$$
\begin{aligned}
&(a^n_m \lambda^m + a^n_{m-1} a^{m-1} + \ldots + a_1{}^n \lambda + a_0{}^n)\mu^n + (a^{n-1}_m \lambda^m + a^{n-1}_{m-1} \lambda^{n-1} \\
(2)\qquad &+ \ldots + a^{n-1}_{1-1} \lambda + a^{n-1}_0)\mu^{n-1} + \ldots + (a^1_m \lambda^m + a^1_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots + a^1_1 \lambda \\
&+ a^1_0)(\mu + a^0_m \lambda^m + a^0_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots + a^0_1 \lambda + a^0_0) = 0 .
\end{aligned}
$$

Так как образующие поверхности $F_3{}^2$ получаются при $\lambda = \text{const}$, то из последнего уравнения следует, что каждая образующая поверхности пересекает рассматриваемую кривую в n точках. При $\mu = k\lambda + l$ мы получаем все коники на поверхности, следовательно любая коника пересекает кривую в $n+m$ точках. Если $k=0$, получаем $\mu = \text{const} = l$. Это есть коника на $F_3{}^2$, проходящая через вершину A_4 координатного симплекса $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Для A_4 $\lambda = \infty$ [2]. Тогда такая коника пересечет c_p в n различных точках и еще в точке A_4, считаемой m раз.

По доказанному выше получаем, что порядок p так определенной алгебраической кривой равен $2n+m$. Из уравнений (2) следует, что она определяется $(m+1)(n+1)-1$ независимыми параметрами.

Рассмотрим как пример уравнение

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mu^2 - (a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1)\mu + (a_2 \lambda^2 + b_2 \lambda + c_2) = 0 .$$

Предполагаем, что $a \neq 0$. В этом случае $m=2$, $n=2$ и это уравнение задает нам алгебраическую кривую шестого порядка. Она расположена так, что на каждой образующей лежат две точки, а на каждой конике на $F_3{}^2$ — четыре точки кривой.

Данные выше результаты справедливы, если $a^n_m \neq 0$. Если $a^n_m = 0$, то очевидно порядок кривой понижается. Вообще порядок p кривой при $a^n_m = 0$ зависит от суммы $s = t + v$ показателей степени для λ и μ старшего члена, содержащего произведение $\lambda^t \mu^v$ (эта сумма дает число точек, в которых коника на поверхности пересекает кривую) и от показателя степени s_1 старшего члена, содержащего μ (независимо как, самостоятельно или в произведении с λ). Именно $p = s + s_1$.

Например, совокупность точек на $F_3{}^2$, параметры λ и μ которых удовлетворяют уравнению:

$$(a\lambda + b)\mu + (c\lambda^2 + d\lambda + e) - 0 , \tag{3}$$

есть нормкривая третьего порядка. Действительно, если $\lambda = \text{const}$, получаем из (3), что каждая образующая пересекает кривую в одной точке. Если $\mu = k\lambda + l$, получаем, что каждая коника на поверхности пересекает кривую в двух точках. В данном случае $t=1$, $v=1$, $s=2$, $s_1 = 1$ и $p=3$. Пользуясь параметрическими уравнениями (1) $F_3{}^2$ и уравнением (3), мы получаем уравнение гиперплоскости, в которой лежит рассматриваемая нормкривая третьего порядка:

$$bx_1 + ax_2 + ex_3 + cx_4 + dx_5 = 0 .$$

Из уравнений (3) следует, что две нормкривые третьего порядка на $F_3{}^2$ имеют три общие точки.

Теперь мы остановимся на кривых четвертого порядка на F_3^2, которые связаны с касательными плоскостями к поверхности.

Теорема. Касательные плоскости к F_3^2, пересекающие прямую общего положения пространства P^4, касаются F_3^2 в точках нормкривой четвертого порядка.

Доказательство. Пусть прямая $p \in P^4$ определена точками

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \text{ и } B(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5).$$

Произвольная точка L этой прямой имеет координаты относительно симплекса $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$—$x_i = a_i + \alpha b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, где α— параметр. Через L проходят две касательные плоскости к F_3^2, касающиеся поверхности в точках

$$L_1(\lambda_1, \mu_1) \text{ и } L_2(\lambda_2, \mu_2).$$

(λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) являются решениями системы уравнений

$$\lambda^2 x_3 + x_4 - 2\lambda x_5 = 0, \tag{4}$$

$$\lambda x_1 - x_2 - \mu\lambda x_3 + \mu x_5 = 0.$$

Это уравнения касательной плоскости в точке (λ, μ) на F_3^2 [2]. Подставляя значения x_i в (4) и исключая параметр α, мы получаем, что связь между параметрами λ и μ для точек касания касательных плоскостей, проведенных в точках одной прямой, имеет вид

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mu + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0, \tag{5}$$

где
$$a = a_5 b_3 - a_3 b_5, \quad b = a_3 b_4 - a_4 b_3, \quad c = a_4 b_5 - a_5 b_4,$$
$$p = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad q = (a_2 b_3 - a_3 b_2) + 2(a_1 b_5 - a_5 b_1),$$
$$r = (a_4 b_1 - a_1 b_4) + 2(a_5 b_2 - a_2 b_5), \quad s = a_2 b_4 - a_4 b_2.$$

Если уравнения (1) F_3^2 и уравнение (5) приведем к одному параметру, получаем

$$x_1 : x_2 : x_3 ; x_4 : x_5 = p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s : \lambda(p\lambda^3 + q\lambda^2 \tag{6}$$
$$+ r\lambda + s) : a\lambda^2 + b\lambda + c : \lambda^2(a\lambda^2 + b\lambda + c) : \lambda(a\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Это параметрические уравнения кривой четвертого порядка, лежащей на F_3^2. Она не лежит в одной трехмерном пространстве, так как гиперплоскости пространства P^4 пересекают поверхность по нормкривым третьего порядка. Известно, что в P^4 единственные кривые четвертого порядка суть нормкривые. Этим теорема доказана.

Полагая в уравнение (6) последовательно $\lambda = \text{const}$ и $\mu = k\lambda + l$, мы находим, что на каждой образующей F_3^2 лежит одна точка нормкривой четвертого порядка, а на каждой конике — три точки. Поэтому мы будем обозначать такие кривые на F_3^2 через $c_4^{[1,3]}$. На F_3^2 есть прямая u, пересекающая все образующие. Ее уравнения $x_3=x_4=x_5=0$. Следовательно u пересекает $c_4^{[1,3]}$ в двух точках. Кривая $c_4^{[1,3]}$ определяется двумя парами точек поверхности. Действительно, касательные плоскости к F_3^2 в точках каждой пары определяют две точки A, B в P^4. Точки касания касательных плоскостей, проведенных через точки прямой AB, определяют единственную нормкривую $c_4^{[1,3]}$ на F_3^2. Итак, через четыре точки F_3^2 проходят три нормкривые $c_4^{[1,3]}$. Две нормкривые $c_4^{[1,3]}$ имеют пять общих точек, как следует из уравнений (5). Если рассматривать вместе уравнения (3) и (5), получается, что $c_4^{[1,3]}$ имеет с нормкривой третьего порядка на F_3^2 четыре общие точки.

Рассмотрим возможные распадения нормкривых $c_4^{[1,3]}$.

Прямая P^4 может иметь с F_3^2 0, 1, 2 общие точки или лежать на поверхности [2]. На F_3^2 имеются ∞^5 унисекант и ∞^4 бисекант. Когда обе точки пересечения одной бисеканты совпадают, она есть касательная к поверхности. В каждой касательной плоскости в точке касания имеется пучок касательных, так что к F_3^2 есть ∞^3 касательных.

Пусть l бисеканта F_3^2, пересекающая ее в точках

$$A(\mu_1,\ \lambda_1\,\mu_1,\ 1,\ \lambda_1^2,\ \lambda_1) \text{ и } B(\mu_2,\ \lambda_2\,\mu_2,\ 1,\ \lambda_2^2,\ \lambda_2).$$

Для нормкривой $c_4^{[1,3]}$, определенной l, уравнение (5), связывающее λ и μ, принимает следующий вид:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)[(\lambda_1-\lambda_2)\mu+(\mu_2-\mu_1)\lambda+(\mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_1)]=0.$$

Отсюда видно, что в данном случае $c_4^{[1,3]}$ распадается на образующие $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ поверхности F_3^2, проходящие через точки A и B и на единственную конику, проходящую через эти точки и лежащую на F_3^2. Если A и B совпадают, т. е. l есть касательная к F_3^2, $c_4^{[1,3]}$ распадается на конику через A и касающуюся в A_k прямой l и на сдвоенную образующую F_3^2, проходящую через A.

Пусть прямая l есть унисеканта F_3^2, лежащая в некоторой касательной плоскости τ^2 к поверхности в точке $(\lambda_0,\ \mu_0)$. Прямую l можно определить точкой A, в которой она пересекает образующую поверхности $\lambda=\lambda_0$, лежащую в τ^2 r^2, и произвольной точкой B. Точка A будет иметь координаты $(\mu_1,\ \mu_1\lambda_0,\ 1,\ \lambda_0^2,\ \lambda_0)$, а точка

$$B(b_1,\ \lambda_0 b_1-\mu_0\lambda_0 b_3+\mu_0 b_5,\ b_3-\lambda_0^2 b_3+2\lambda_0 b_5\ b_5).$$

Здесь мы имели ввиду уравнения (4) касательной плоскости. Тогда уравнение (5) нормкривой $c_4^{[1,3]}$ есть

$$(\lambda-\lambda_0)^2[(\lambda_0 b_3-b_5)\mu+(b_1-\mu_1 b_3)\lambda-\lambda_0 b_1+\lambda_0 b_3(\mu_0-\mu_1) \\ +b_5(2\mu_1-\mu_0)]=0,$$

т. е. она распадается на сдвоенную образующую $\lambda=\lambda_0$ и на конику.

Теперь рассмотрим унисеканту l поверхности F_3^2, не лежащую в касательной плоскости этой поверхности и пересекающую F_3^2 в точке $A(\mu_1, \lambda_1\mu_1, 1, \lambda_1^2, \lambda_1)$. Чтобы определить l, задаем еще одну ее точку $B(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$. Соответствующая этой унисеканте нормкривая $c_4^{[1,3]}$ имеет уравнение

$$(\lambda-\lambda_1)\{[(\lambda_1 b_3-b_5)\lambda+(b_4-\lambda_1 b_5)]\mu+(b_1-\mu b_3)\lambda^2$$
$$+(-\lambda_1 b_1-b_2-2\mu_1 b_5)\lambda+(\lambda_1 b_2-\mu_1 b_4)\}=0.$$

В данном случае $c_4^{[1,3]}$ распадается на образующую $\lambda=\lambda_1$, проходящую через точку A, и на нормкривую третьего порядка, проходящую также через A.

Таким образом, на образующую F_3^2 и на нормкривую третьего порядка, распадается и $c_4^{[1,3]}$, соответствующая прямой l, не пересекающей F_3^2, но лежащей в соприкасающейся гиперплоскости к F_3^2. Так как соприкасающаяся гиперплоскость к F_3^2 вдоль образующей $\lambda=\lambda_0$ имеет уравнение $\lambda_0^2 x_3+x_4-2\lambda_0 x_5=0$ [2], l определится точками

$$A(a_1, a_2, a_3, 2\lambda_0 a_5-\lambda_0^2 a_3, a_5) \text{ и } B(b_1, b_2, b_3, 2\lambda_0 b_5-\lambda_0^2 b_3, b_5).$$

Тогда для $c_4^{[1,3]}$ получаем

$$(\lambda-\lambda_0)[(a_5b_3-a_3b_5)(\lambda-\lambda_0)\mu+(\lambda+\lambda_0)(a_3b_1-a_1b_3)\lambda$$
$$+(\lambda+\lambda_0)(a_2b_3-a_3b_2)+2(\lambda+\lambda_0)(a_1b_5-a_5b_1)+2(a_5b_2-a_2b_5)]=0.$$

Если в уравнение (5) $Pg\begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}=1$, коэффициенты a, b, c равны нулю. В этом случае прямая AB пересекает ребро $A_1A_2=u$ координатного тетраедра. Мы можем считать, что A лежит на прямой u, т. е. она имеет координаты $(1, a_2, 0, 0)$. Точка A лежит и на образующей $\lambda=a_2$ поверхности. Уравнение (5) дает

$$(\lambda-a_2)(b_3\lambda^2-2b_5\lambda+b_4)=0.$$

Это означает, что в кривую $c_4^{[1,3]}$ входят образующая $\lambda=a_2$ и еще две образующие поверхности, которые имеют уравнения $\lambda=x_1$, $\lambda=x_2$, где x_1 и x_2 корни уравнения $b_3\lambda^2-2b_5\lambda+b_4=0$. В кривую $c_4^{[1,3]}$ для такой унисеканты входит еще и прямая u, так как касательная плоскость в точке A есть (a_2, u) и она пересекает F_3^2 по образующей $\lambda=a_2$ и по прямой u.

Пусть прямая l лежит в касательной плоскости к F_3^2 в точке прямой u. Как известно, касательные плоскости для всех точек этой прямой совпадают с данной касательной плоскостью [2]. В этом случае соответствующая кривая $c_4^{[1,3]}$ состоит из сдвоенной коники (u, m), где m образующая F_3^2, лежащая в данной касательной плоскости.

На F_3^2 имеются нормкривые четвертого порядка и другого типа. Уравнение

$$a_{11}\lambda^2+2a_{12}\lambda\mu+a_{22}\mu^2+2a_{13}\lambda+2a_{23}\mu+a_{33}=0 \tag{7}$$

определяет алгебраическую кривую, которая пересекает каждую образующую и каждую конику на F_3^2 (включая и коники через A_4) в двух точках. Это видно, если в (7) последовательно положим $\lambda=\text{const}$, $\mu=k\lambda+l$. Поэтому кривые этого вида будем обозначать через $c_4^{[2,\,2]}$.

Известно, что из уравнения (7) можно найти параметрическое представление для λ и μ посредством одного параметра t:

$$\lambda=\frac{at^2+bt+c}{pt^2+qt+r},\qquad \mu=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{p_1t^2+q_1t+r_1}.$$

Полагая эти значения λ и μ в параметрические уравнения (1) поверхности F_3^2, мы получаем параметрические уравнения нормкривой $c_4^{[2,\,2]}$:

$$\begin{gathered} x_1:x_2:x_3:x_4:x_5=(a_1t^2+b_1t+c_1)(pt^2+qt+r):\\ (at^2+bt+c)(a_1t^2+b_1t+c_1):(pt^2+qt+r)^2:(at^2+bt+c)^2:\\ (at^2+bt+c)(pt^2+qt+r). \end{gathered}$$

Из этих уравнений и из уравнений прямой $u:x_3=x_4=x_5=0$ видно, что прямая u не пересекает кривую $c_4^{[2,\,2]}$.

Уравнение (7) нормкривой $c_4^{[2,\,2]}$ показывает, что две кривые вида $c_4^{[2,\,2]}$ на F_3^2 пересекаются в четырех точках. Уравнения (5) и (7) нормкривой четвертого порядка вида $c_4^{[1,\,3]}$ и нормкривой четвертого порядка вида $c_4^{[2,\,2]}$ дают, что кривая $c_4^{[1,\,3]}$ и кривая $c_4^{[2,\,2]}$ на F_3^2 пересекаются в шести точках.

3. Полюсы и полярные прямые относительно поверхности F_3^2.

Пусть дана точка P пространства P^4 такая, что через нее проходят две различные касательные плоскости к поверхности F_3^2. Прямую, соединяющую точки M_i и M_j касания этих касательных плоскостей, назовем **полярой** точки P относительно F_3^2. Эта прямая есть поляра точки P относительно единственной коники на F_3^2, лежащей в одной плоскости с точкой P.

Если даны две точки M_1 и M_2, лежащие на разных образующих, **полюсом** прямой M_1M_2 назовем точку M, в которой пересекаются касательные плоскости к F_3^2, проведенные в точках M_1 и M_2. Пусть точки M_1 и M_2 получаются при значении параметров соответственно $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$ и $\lambda=\lambda_2$, $\mu=\mu_2$, т. е. они имеют координаты

$$M_1(\mu_1,\ \lambda_1\mu_1,\ 1,\ \lambda_1^2,\ \lambda_1)\ \text{и}\ M_2(\mu_2,\ \lambda_2\mu_2,\ 1,\ \lambda_2^2,\ \lambda^2).$$

Касательные плоскости в точках M_1 и M_2 имеют уравнения

$$\tau^2_{M_1}\begin{cases}\lambda_1^2x_3+x_4-2\lambda_1x_5=0,\\ \lambda_1x_1-x_2-\mu_1\lambda_1x_3+\mu_1x_5=0;\end{cases}$$

$$c^2_{\mu_2}\begin{cases}\lambda_2^2 x_3 + x_4 - 2\lambda_2 x_5 = 0\,,\\ \lambda_2 x_1 - x_2 - \mu_2 \lambda_2 x_3 + \mu_2 x_5 = 0\,.\end{cases}$$

Из этих уравнений мы находим координаты полюса M прямой $M_1 M_2$:

$$\begin{aligned} k x_1 &= \mu_1 + \mu_2\,,\\ k x_2 &= \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1\,,\\ k x_3 &= 2\,,\\ k x_4 &= 2\lambda_1 \lambda_2\,,\\ k x_5 &= \lambda_1 + \lambda_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Если в этих уравнениях фиксируем параметры λ_1 и μ_1, т. е. точку M_1, а λ_2 и μ_2 переменные, мы получим все точки касательной плоскости в M_1. Следовательно, эти уравнения дают параметрическое задание касательных плоскостей F_3^2.

Если в уравнениях (8) μ_1 и λ_1 связаны зависимостью вида $\mu_1 = f(\lambda_1)$, т. е. когда точка (λ_1, μ_1) пробегает некоторую алгебраическую кривую $c_k^{[1,\,n]}$ на F_3^2 ($c_k^{[1,\,n]}$ означает, что кривая k — того порядка пересекает любую образующую один раз, а любую конику на F_3^2 — n раза, т. е. $k = n+1$), то мы получаем параметрические уравнения (параметры $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, k$) гиперповерхности, образованной касательными плоскостями в точках кривой $c_k^{[1,\,n]}$.

Теперь мы найдем уравнение поляры p точки $P(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$. Если через точку P возьмем произвольную бисеканту F_3^2, пересекающую ее в точках M_k, M_l, то для точки $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ пересечения бисеканты с полярой p выполнено $(P X M_k M_l) = -1$. Бисеканта PX имеет параметрическое задание $s_i = x_i + q p_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Выражаем условие, что она пересекает поверхность:

$$\frac{x_1 + q p_1}{\mu} = \frac{x_2 + q p_2}{\lambda \mu} = \frac{x_3 + q p_3}{1} = \frac{x_4 + q p_4}{\lambda^2} = \frac{x_5 + q p_5}{\lambda}\,.$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered} (p_1 p_5 - p_2 p_3) q^2 + (p_1 x_5 + p_5 x_1 - p_2 x_3 - p_3 x_2) q + (x_1 x_5 - x_2 x_3) = 0\,,\\ (p_2 p_5 - p_1 p_4) q^2 + (p_2 x_5 + p_5 x_2 - p_1 x_4 - p_4 x_1) q + (x_2 x_5 - x_1 x_4) = 0\,,\\ (p_3 p_4 - p_5^2) q^2 + (p_3 x_4 + p_4 x_3 - 2 p_5 x_5) q + (x_3 x_4 - x_5^2) = 0\,. \end{gathered}$$

Эти три квадратные уравнения относительно параметра q должны иметь одинаковые корни q_1 и q_2 — значения параметра, при которых получаются точки M_k и M_l пересечения прямой PX с F_3^2. Из гармонической четверки $(P X M_k M_l)$ имеем $q_1 + q_2 = 0$. Отсюда следует:

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
p_5x_1-p_3x_2-p_2x_3+p_1x_5&=0\,,\\
p_4x_1-p_5x_2+p_1x_4-p_2x_5&=0\,,\\
p_4x_3+p_3x_4-2p_5x_5&=0\,.
\end{aligned}
$$

Равенства обеих корней трех квадратных уравнений дают еще три связи второй степени между x_i:

$$
\begin{aligned}
(p_2p_5-p_1p_4)(x_1x_5-x_2x_3)&=(p_1p_5-p_2p_3)(x_2x_5-x_1x_4)\\
(p_2p_4-p_5^2)(x_2x_5-x_1x_4)&=(p_2p_5-p_1p_4)(x_3x_4-x_5^2)\\
(p_2p_4-p_5^2)(x_1x_5-x_2x_3)&=(p_1p_5-p_2p_3)(x_3x_4-x_5^2)\,.
\end{aligned}
$$

Можно проверить, что если x_i удовлетворяют уравнениям (9), то они удовлетворяют и этим трем уравнениям.

Уравнения (9) являются уравнениями трех гиперплоскостей и они пересекаются по искомой поляре p. Последние три уравнения — это уравнения трех гиперконусов и прямая u лежит на всех гиперконусах.

Мы проверим, что прямая p есть поляра точки P, используя уравнения (8) для полюса прямой p. Пусть прямая p пересекает F_3^2 в точках $M_i(\mu_i,\ \lambda_i\mu_i,\ 1,\ \lambda_i^2,\ \lambda_i)$ и $M_j(\mu_j,\ \lambda_j\mu_j,\ 1,\ \lambda_j^2,\ \lambda_j)$. Тогда прямая $p=M_iM_j$ имеет параметрические уравнения

$$
\begin{aligned}
x_1&=\mu_i+\rho\mu_j\,,\\
x_2&=\lambda_i\mu_i+\rho\lambda_j\mu_j\,,\\
x_3&=1+\rho\,,\\
x_4&=\lambda_i^2+\rho\lambda_j^2\,,\\
x_5&=\lambda_i+\rho\lambda_j\,.
\end{aligned}
$$

По формулам (8) точка P имеет координаты

$$
p_1=\mu_i+\mu_j\,,\quad p_2=\lambda_i\mu_j+\lambda_j\mu_i\,,\quad p_3=2\,,\quad p_4=2\lambda_i\lambda_j\,,\quad p_5=\lambda_i+\lambda_j\,.
$$

Подставляя эти значения x_i и $p_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ в уравнения (**9**), мы получаем, что они тождественно удовлетворяются.

В [2] мы получили уравнения F_3^2 как пересечение трех гиперконусоз (уравнения 8). Если составим уравнения полярных гиперплоскостей точки P относительно этих гиперконусов, то полученные три уравнения совпадают с уравнениями (9) поляры p точки P относительно F_3^2. Следовательно, полярные гиперплоскости точки P относительно трех гиперконусов, пересекающихся на F_3^2, пересекаются на поляре p точки P относительно F_3^2. Тогда прямая p пересекает эти три гиперконуса в одних и тех же точках (лежащих на F_3^2).

Т е о р е м а. Поляры точек одной прямой общего положения относительно F_3^2 образуют также двумерную поверхность третьего порядка F_3^2.

Доказательство. Пусть дана прямая $p \in P^4$, не пересекающая F_3^2. Как мы видели, точки касания касательных плоскостей к F_3^2, проведенных в точках прямой p, определяют на F_3^2 нераспавшуюся кривую четвертого порядка $c_4^{[1,3]}$. Точки касания касательных плоскостей, проходящих через одну точку, индуцируют на $c_4^{[1,3]}$ инволюцию. Поляры точек прямой p относительно F_3^2 соединяют пары соответственных точек в этой инволюции. Поверхность, образованная этими полярами, лежит в P^4, так как $c_4^{[1,3]}$ лежит в P^4. Это есть двумерная линейчатая поверхность $\overline{F}_k^2$.

Чтобы определить порядок k, мы рассмотрим ее пересечение с произвольной касательной плоскостью $\tau^2_{M_1}$ и F_3^2 в точке M_1 на образующей m_1. Поверхность $\overline{F}_k^2$ может пересекать $\tau^2_{M_1}$ в точках, лежащих на прямой m_1, или в точках, не лежащих на m_1. Соприкасающаяся гиперплоскость вдоль образующей m_1 пересекает прямую p в некоторой точке A. Одна из касательных плоскостей к F_3^2 в точке A касается поверхностью в точке M_1' на прямой m_1 и прямая AM_1' есть касательная к F_3^2. Через точку M_1' проходит пучок коник, лежащих на F_3^2. Одна из этих коник c_2^A касается AM_1'. Тогда точка M_2, в которой вторая касательная плоскость из A к F_3^2 касается F_3^2, тоже будет лежать на c_2^A. Прямая $M_1'M_2$ есть образующая поверхности $\overline{F}_k^2$, пересекающая $\tau^2_{M_1}$. На прямой m_1 не могут лежать другие точки рассматриваемой поверхности, так как p вообще не лежит в соприкасающейся гиперплоскости вдоль m_1 (всегда можно так выбрать $\tau^2_{M_1}$).

Плоскости, проходящие через точку M_1 и пересекающие F_3^2 по коникам, образуют гиперконус второго порядка [4]. Он пересекает прямую p в двух точках B и C. Плоскость каждой коники, проходящей через M_1 и лежащей на F_3^2, пересекает $\tau^2_{M_1}$ по прямой, именно по касательной к этой конике. Тогда, если через точку B проведем единственную плоскость, пересекающую F_3^2 по конике c_2^B, то прямая $M_3 M_4$, соединяющая точки касания касательных из B к c_2^B, лежит на $\overline{F}_k^2$. Коника c_2^B проходит через M_1 и следовательно прямая $M_3 M_4$ пересекает $\tau^2_{M_1}$. Аналогичным образом получается, что и прямая $M_5 M_6$, соединяющая точки касания касательных плоскостей к F_3^2 из C, тоже пересекает плоскость $\tau^2_{M_1}$.

Наконец мы покажем, что никакие другие образующие поверхности $\overline{F}_k^2$ не пересекают $\tau^2_{M_1}$ в точках, не лежащих на прямой m_1. Для этого мы докажем, что если бисеканта $M_3 M_4$ пересекает касательную плоскость $\tau^2_{M_1}$, то коника, проходящая через M_3 и M_4 и лежащая на F_3^2, проходит через точку касания M_1.

Действительно, плоскость $(M_1 M_3 M_4)$ пересекает плоскость $\tau^2_{M_1}$ по прямой t_1, проходящей через M_1. Тогда прямая t_1 есть касательная к

F_3^2 в точке M_1. Плоскость $(M_1 M_3 M_4)$ пересекает F_3^2 в точке M_1, считаемой два раза и в точках M_3 и M_4. Следовательно, точки M_1, M_3 и M_4 лежат на одной конике на F_3^2.

Отсюда видно, что только образующие $M_3 M_4$ и $M_5 M_6$ поверхности $\overline{F}_k^2$ могут пересекать $\tau_{M_1}^2$ в точках, не лежащих на образующей m_1.

Итак, три и только три образующие поверхности $\overline{F}_k^2$ пересекают плоскость $\tau_{M_1}^2$. Следовательно, порядок k этой поверхности равен трем, что доказывает теорему.

Определение поляры и рассмотренные нами распадения кривой $c_4^{[1,3]}$ дают, что поляры точек одной унисеканты поверхности F_3^2 образуют гиперболоид (они являются прямыми, соединяющими пары соответственных точек в инволюции на нормкривой третьего порядка). Поляры точек одной бисеканты образуют пучок прямых в плоскости единственной коники, лежащей на F_3^2 и проходящей через точки пересечения бисеканты с поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bertini, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien, 1921, 333—381.
2. Енева, Г., Скопец, З.: Построение плоской модели четырехмерного проективного пространства изотропным проектированием нормповерхности третьего порядка. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967—68), 243—260.
3. Котий, О. А., Потоскуев, Е. В.: О кубической нормповерхности четырехмерного проективного пространства. Уч. зап. Ярославского пединст., 64 (1970), Геометрия, ч. I, 87—98.
4. Скопец, З. А.: Отображение четырехмерного пространства на двумерную плоскость посредствам нормповерхностей. Уч. зап. К. Б. Универс., 30 (1966), 251—288.
5. Clebsch, A., Lindemann, F.: Vorlesungen über Geometrie. Leipzig, 1891, 414—422.

Постъпила на 16. XI. 1970 г.

EINIGE FRAGEN DER THEORIE DER NORMFLÄCHEN DRITTER ORDNUNG IM VIERDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

G. Enewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

1. Projektive Äquivalenz der Normflächen dritter Ordnung in P^4.

Eine zweidimensionale Fläche dritter Ordnung F_3^2 in P^4 wird als eine Fläche bestimmt, die folgende Eigenschaft hat: der Durschnitt dieser Fläche mit jeder Hyperebene ist eine Normkurve dritter Ordnung und

darauf existiert mindestens eine nichtentartete Kurve zweiter Ordnung. Es wird gezeigt, daß eine solche Fläche eine Linienfläche ist; sie läßt sich erhalten als die Menge aller Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bei einer Projektivität zwischen einer Kurve zweiter Ordnung und einer Geraden, die nicht in einer Hyperebene liegen.

2. Algebraische Kurven auf F_3^2.

Bezüglich eines speziellen Koordinatensystems hat F_3^2 die folgenden parametrischen Gleichungen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \mu : \lambda\mu : 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

$\lambda =$ const. gibt die Erzeugenden der Fläche F_3^2, $\mu = k\lambda + l$ — die Kurven zweiter Ordnung auf F_3^2. Wenn eine bestimmte nichtentartete Kurve zweiter Ordnung auf F_3^2 eine Kurve c_p der Ordnung p auf F_3^2 in s Punkten schneidet, dann schneidet jede Kurve zweiter Ordnung auf F_3^2 c_p auch in s Punkten. Dasselbe gilt auch für die Erzeugenden von F_3^2. Nach einer Idee von Clebsch und Lindemann kann man jede algebraische Kurve c_p auf F_3^2 erhalten als Menge derjenigen Punkte, dessen Parameter λ, μ folgender Gleichungen genügen:

$$(a_m^n \lambda^m + a_{m-1}^n \lambda^{m-1} + \ldots + a_1^n \lambda + a_0^n)\mu^n + (a_m^{n-1} \lambda^m + a_{m-1}^{n-1} \lambda^{m-1}$$

$$+ \ldots a_1^{n-1} \lambda + a_0^{n-1})\mu^{n-1} + \ldots + (a_m^1 \lambda^m + a_{m-1}^1 \lambda^{m-1} + \ldots + a_1^1 \lambda$$

$$+ a_0^1)\mu + (a_m^0 \lambda^m + a_{m-1}^0 \lambda^{m-1} + \ldots a_1^0 \lambda + a_0^0) = 0$$

Die Ordnung p von c_p ist $2n+m$. Als Beispiel sind die Kurven dritter, vierter und sechster Ordnung auf F_3^2 betrachtet. Der folgende Satz wird bewiesen: die Tangentialebenen von F_3^2, die eine Gerade in allgemeiner Lage schneiden, berühren F_3^2 in den Punkten einer Normkurve vierter Ordnung.

3. Polarität bezüglich F_3^2.

Sei $P \overline{\in} F_3^2$ ein Punkt und seien τ_{M_i}, τ_{M_j} zwei verschiedene Tangentialebenen von F_3^2 in M_i, M_j, so dass $P \in \tau_{M_i}$, τ_{M_j}. Die Gerade $M_i M_j$ wird als Polare von P bezeichnet. Der folgende Satz wird bewiesen: die Polaren der Punkte einer Geraden, die F_3^2 nicht schneidet, bilden eine zweidimensionale Fläche dritter Ordnung.