ДЕЗАРГОВИ СИСТЕМИ

Димитър Вакарелов

Понятието група е тясно свързано с геометрията и затова е естествена задачата да се търсят за него и чисто геометрични дефиниции. Една такава дефиниция може да се получи, като за основно се избере понятието успоредник, а за аксиоми се изберат някои случаи от теоремата на Дезарг, които могат да бъдат преформулирани като теореми за успоредници. Най-напред ще се спрем на една система аксиоми, от което се получава понятие, доста близко до групата, а след това чрез подходящо изменение на една от аксиомите ще се получи понятие, в известен смисъл еквивалентно на понятието група. Първото понятие ще наречем абсолютна дезаргова система, а второто — дезаргова система. Последната се оказва еквивалентна на понятието груда, разгледано от Вагнер в (1).

1. Определения. Примери

Дефиниция 1. 1. Нека ни е дадено едно непразно множество D, чиито елементи ще наричаме точки, и една четиричленна релация Par в D. Ако a, b, c, d са точки и е в сила релацията $Par\ (a, b, c, d)$, ще казваме, че точките, взети в дадения ред, образуват успоредник (паралелограм). Двойката $\{D, Par\}$ ще наричаме абсолютна дезаргова система, ако са в сила аксиомите:

Dr. Ако $Par\ (x, a, b, y)$ и $Par\ (x, c, d, y)$, то $Par\ (c, a, b, d)$.

Dl. Ако $Par\ (b, a, x, y)$ и $Par\ (d, c, x, y)$, то $Par\ (b, a, c, d)$.

D. За всяка наредена тройка точки (a, b, c) съществува точка d такава, че $Par(a, b, c, d)$.

Аксиомите Dr и Dl ще наречем съответно дясна и лява аксиома на Дезарг. В Евклидовата геометрия Dr и Dl са еквивалентни, защото от $Par(a, b, c, d)$ следва $Par(c, b, a, d)$. Тъй като това свойство на успоредниците засега няма да предполагаме, налага се аксиомата на Дезарг да въвеждаме в две нееквивалентни формулировки.

Дефиниция 1. 2. Една абсолютна дезаргова система ще наричаме само дезаргова система, ако точката d от аксиома D е единствена.

Ето някои примери за дезаргови и абсолютни дезаргови системи.

Пример 1. Евклидовата (или някаква афинна) геометрия с обичайната дефиниция за успоредник, в която са включени и някои изродени случаи. Този пример в действителност ни послужи за интуитивна база при въвеждането на горните понятия.

Пример 2. Нека G е група и положим $Par(a, b, c, d)$ точно тогава, когато $a^{-1}bc^{-1}d=1$. Лесно се проверяват Dr, Dl и D. Тъй като веднага се вижда, че точката d от аксиомата D е единствена ($d=cb^{-1}a$), това е пример за дезаргова система.

Пример 3. Нека D е някакво непразно множество, $\equiv$ е релация на еквивалентност в него, която не е равенство, и фактор-множеството $D/\equiv$ е група (такива са напр. факторгрупите). Ако $a \in D$, то с $\dot{a}$ означаваме класа, породен от a. Полагаме $Par(a, b, c, d)$ тогава и само тогава, когато $\dot{a}^{-1}\dot{b}\dot{c}^{-1}\dot{d}=1$, където 1 е единицата на $D/\equiv$. Не е трудно да се види, че това е абсолютна дезаргова система.

Пример 2 и пример 3 се явяват в известен смисъл характеристични съответно за дезарговата и абсолютната дезаргова система. Ще покажем, че във всяка дезаргова система може да се дефинира групова операция, която да поражда релацията Par по начина от пример 2. Аналогично, ако D е абсолютна дезаргова система, то в D съществува еквивалентност $\equiv$ и групова операция в $D/\equiv$, която поражда Par по начина от пример 3. Оттук ще следва, че понятието дезаргова система е еквивалентно на понятието група.

2. Абсолютна дезаргова система

В този параграф ще предполагаме, че D е абсолютна дезаргова система.

Дефиниция 2. 1. Ако a и b са точки, наредената двойка (a, b) ще наричаме свързан вектор. Два свързани вектора (a, b) и (c, d) ще наричаме еквиполентни (геометрически равни) точно тогава, когато е в сила релацията $Par(a, b, d, c)$. Бележим $(a,b)\sim(c,d)$.

Теорема 2. 1. За релацията $\sim$ са в сила следните свойства:

1. $(a, b)\sim(a, b)$.
2. Ако $(a, b)\sim(c, d)$, то $(c, d)\sim(a, b)$.
3. Ако $(a, b)\sim(c, d)$, $(c, d)\sim(e, f)$, то $(a, b)\sim(e, f)$.
4. $(a, a)\sim(b, b)$.
5. Ако $(a, b)\sim(c, d)$, то $(b, a)\sim(d, c)$.
6. Ако $(a, b)\sim(p, q)$, $(b, c)\sim(q, r)$, то $(a, c)\sim(p, r)$.
7. За всеки три точки a, b, c съществува точка d такава, че

$$(a, b)\sim(c, d).$$

Доказателството на теоремата се получава от дефиниция 2. 1 и следните седем леми:

Лема 1. Ако a и b са точки, то $Par(a,b, b, a)$.

Доказателство. По акс. D за точките a, b, b съществува точка c такава, че $Par(a, b, b, c)$. От $Par(a, b, b, c)$ и $Par(a, b, b, c)$ по D следва $Par(a, b, b, a)$.

Лема 2. От $Par(a, b, d, c)$ следва $Par(c, d, b, a)$.

Доказателство. От $Par(c, d, d, c)$, което имаме по лема 1, и $Par(a, b, d, c)$ по Dl следва $Par(c, d, b, a)$.

Лема 3. Ако $Par(a, b, d, c)$ и $Par(c, d, f, e)$, то $Par(a, b, f, e)$.

Доказателство. От $Par(c, d, f, e)$ по лема 2 имаме $Par(e, f, d, c)$. От $Par(a, b, d, c)$ и $Par(e, f, d, c)$ по Dl следва $Par(a, b, f, e)$.

Лема 4. $Par(a, a, b, b)$.

Доказателство. По D за точките a, a, b съществува точка c такава, че $Par(a, a, b, c)$. От $Par(a, a, b, c)$ и $Par(a, a, b, c)$ по Dr следва $Par(a, a, b, b)$.

Лема 5. От $Par(a, b, d, c)$ следва $Par(b, a, c, d)$.

Доказателство. От $Par(a, a, c, c)$ по лема 4 и $Par(a, b, d, c)$ по Dr следва $Par(b, a, c, d)$.

Лема 6. От $Par(a, b, q, p)$ и $Par(b, c, r, q)$ следва $Par(a, c, r, p)$.

Доказателство. От $Par(a, b, q, p)$ по лема 5 следва $Par(b, a, p, q)$, което заедно с $Par(b, c, r, q)$ по Dr дава $Par(a, c, r, p)$.

Лема 7. За всеки три точки a, b, c съществува точка d такава, че $Par(a, b, d, c)$.

Доказателство. По D за a, b, c имаме точка d такава, че $Par(b, a, c, d)$, откъдето по лема 5 имаме $Par(a, b, d, c)$.

С това доказателството на теоремата е завършено. Свойствата 1, 2, 3 показват, че релацията $\sim$ е релация на еквивалентност в съвкупността на свързаните вектори.

Дефиниция 2. 2. Класовете, на които се разлага съвкупността на свързаните вектори чрез релацията $\sim$, ще наричаме **свободни вектори**. Ако (a, b) е свързан вектор, свободният вектор, породен от него, ще бележим с $\overrightarrow{ab}$. Елементите на един свободен вектор се наричат негови **представители**. Свободните вектори ще бележим още така: $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ и т. н. Под сума на векторите $\bar{u}$ и $\bar{v}$ в дадения ред ще разбираме вектора $\bar{w}$, получен по следния начин. Избираме произволна точка a и по теорема 2. 1. 7 съществува точка b така, че $\bar{u}=\overrightarrow{ab}$. Аналогично намираме точка c така, че $\bar{v}=\overrightarrow{bc}$. Тогава за $\bar{w}$ полагаме $w=\overrightarrow{ac}$ бележим $\bar{w}=\bar{u}+\bar{v}$. Пункт 6 от теорема 2. 1 гарантира независимостта на w от избора на точката a. Дадената дефиниция се различава от аналогичните дефиниции в курсовете по векторна алгебра само по това, че от $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{ac}$ съвсем не следва $b=c$ поради неединствеността в аксиома D.

Теорема 2. 2. Съвкупността на свободните вектори е група по отношение операцията събиране на вектори.

Доказателство. Асоциативният закон се получава така: Нека

$u=\overrightarrow{ab}$, $\bar{v}=\overrightarrow{bc}$, $\bar{w}=\overrightarrow{cd}$. Тогава $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=(\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc})+\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{ad}$,

$$\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=\overrightarrow{ab}+(\overrightarrow{bc}+\overrightarrow{cd})=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bd}=\overrightarrow{ad}=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}.$$

За нулев елемент избираме вектора $0=\overrightarrow{aa}$. По теорема 21. 4 $\overrightarrow{aa}=\overrightarrow{bb}$. От това обаче не следва, че всички представители на нулевия вектор имат вида (x, x). Имаме $\bar{u}+\bar{0}=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bb}=\overrightarrow{ab}=\bar{u}$. За обратен елемент на $\bar{u}=\overrightarrow{ab}$ избираме вектора $-\bar{u}=\overrightarrow{ba}$. По теорема 2. 1. 5 се получава, че ако още $\bar{u}=\overrightarrow{cd}$, то $-\bar{u}=\overrightarrow{dc}$. Имаме $\bar{u}+(-\bar{u})=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ba}=\overrightarrow{aa}=\bar{0}$. Въпреки че сме възприели обичайния адитивен запис за сумата на векторите, от това още не следва, че тя е комутативна.

Теорема 2. 3. За да бъде събирането на вектори комутативно, необходимо и достатъчно е от $Par(a, b, c, d)$ да следва $Par(c, b, a, d)$.

Доказателство. Нека събирането е комутативно и положим $\bar{u}=\overrightarrow{ab}$, $\bar{v}=\overrightarrow{bd}$. Тогава $\bar{u}+\bar{v}=\overrightarrow{ad}$. От $Par(a, b, c, d)$ следва $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{dc}$. Тогава $\bar{v}+\bar{u}=\overrightarrow{bd}+\overrightarrow{dc}=\overrightarrow{bc}$. Поради $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$ имаме $\overrightarrow{ad}=\overrightarrow{bc}$, което дава $Par(a, d, c, b)$. От него по лема 5 имаме $Par(d, a, b, c)$, а по лема 2 — $Par(c, b, a, d)$. Нека за произволни a, b, c, d от $Par(a, b, c, d)$ следва $Par(c, b, a, d)$. Нека $\bar{u}=\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{dc}$, $\bar{v}=\overrightarrow{bd}$. Тогава $\bar{u}+\bar{v}=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bd}=\overrightarrow{ad}$, $\bar{v}+\bar{u}=\overrightarrow{bd}+\overrightarrow{dc}=\overrightarrow{bc}$. От $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{dc}$ имаме $Par(a, b, c, d)$, откъдето получаваме $Par(c, b, a, d)$; по условие и $Par(b, c, d, a)$, $Par(a, d, c, b)$ съответно по лема 5 и лема 2. Но $Par(a, d, c, b)$ означава $\overrightarrow{ad}=\overrightarrow{bc}$, т. е. $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$.

Теорема 2. 4. Нека p е произволна точка. Необходимото и достатъчно условие да имаме $Par(a, b, c, d)$ е $-\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{pb}-\overrightarrow{pc}+\overrightarrow{pd}=\bar{0}$.

Доказателство. $Par(a, b, c, d)$ е еквивалентно по дефиниция 2. 1 на еквивалентността $(a, b)\sim(d, c)$, откъдето $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{dc}$. Последното равенство е равносилно на $\overrightarrow{ap}+\overrightarrow{pb}=\overrightarrow{dp}+\overrightarrow{pc}$. По теорема 2. 2 имаме

$$-\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{pb}-\overrightarrow{pc}+\overrightarrow{pd}=\bar{0},$$

с което теоремата е доказана.

Теорема 2. 5. За да бъде събирането на вектори комутативно, необходимо и достатъчно е от $Par(a_1, a_2, a_4, a_5)$ и $Par(a_2, a_3, a_5, a_6)$ да следва $Par(a_3, a_4, a_6, a_1)$ (теорема на Паскал).

Доказателство. Нека е в сила теоремата на Паскал. Тогава от $Par(a, b, c, d)$ и $Par(b, b, d, d)$ по теоремата на Паскал имаме $Par(c, b, a, d)$, което по теорема 2. 3 дава комутативност на събирането.

Нека събирането е комутативно. От $Par(a_1, a_2, a_4, a_5)$ и $Par(a_2, a_3, a_5, a_6)$ по теорема 2. 4 имаме $-\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{pa_2}-\overrightarrow{pa_4}+\overrightarrow{pa_5}=\bar{0}$, $-\overrightarrow{pa_2}+\overrightarrow{pa_3}-\overrightarrow{pa_5}+\overrightarrow{pa_6}=\bar{0}$. Ако съберем почленно тези равенства, получаваме

$$-\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{pa_6}-\overrightarrow{pa_4}+\overrightarrow{pa_3}=\bar{0},$$

откъдето $-\overrightarrow{pa_3}+\overrightarrow{pa_4}-\overrightarrow{pa_6}+\overrightarrow{pa_1}=\bar{0}$, което по теорема 2. 4 дава

$$Par(a_3, a_4, a_6, a_1).$$

Дефиниция 2. 3. Ще казваме, че $a\equiv b$ (точката a е конгруентна с b) точно тогава, когато $\overrightarrow{ab}=\bar{0}$.

Теорема 2. 6. Релацията $\equiv$ е релация на еквивалентност. Ако $a\equiv a'$, $b\equiv b'$, $c\equiv c'$, $d\equiv d'$, то $Par(a, b, c, d)$ имаме точно тогава, когато $Par(a', b', c', d')$.

Доказателство. Ще трябва да покажем, че са в сила

1) $a\equiv a$;
2) ако $a\equiv b$, то $b\equiv a$;
3) ако $a\equiv b$, $b\equiv c$, то $a\equiv c$.

От $\bar{0}=\overrightarrow{aa}$ следва, че $a\equiv a$. Нека $a\equiv b$; тогава $\bar{0}=\overrightarrow{ab}$,

$$\overrightarrow{ba}=-\bar{0}=\bar{0},$$

което дава $b\equiv a$. Нека $\overrightarrow{ab}=\bar{0}$, $\overrightarrow{bc}=\bar{0}$; тогава $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}=\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$, т. е. $a\equiv c$. Преди да докажем втората част на теоремата, ще покажем, че $x\equiv y$ точно тогава, когато за произволна точка p имаме $\overrightarrow{px}=\overrightarrow{py}$. От $\overrightarrow{px}=\overrightarrow{py}$ следва $\bar{0}=-\overrightarrow{px}+\overrightarrow{py}=\overrightarrow{xp}+\overrightarrow{py}=\overrightarrow{xy}$. Ако $\overrightarrow{xy}=\bar{0}$, имаме

$$\overrightarrow{xp}+\overrightarrow{py}=\bar{0},$$

което дава $\overrightarrow{py}=-\overrightarrow{xp}=\overrightarrow{px}$.

Нека сега имаме $a\equiv a'$, $b\equiv b'$, $c\equiv c'$, $d\equiv d'$ и $Par(a, b, c, d)$. Тогава по теорема 2. 4 имаме $-\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{pb}-\overrightarrow{pc}+\overrightarrow{pd}=\bar{0}$. Но от по-горното имаме $\overrightarrow{pa}=\overrightarrow{pa'}$, $\overrightarrow{pb}=\overrightarrow{pb'}$, $\overrightarrow{pc}=\overrightarrow{pc'}$, $\overrightarrow{pd}=\overrightarrow{pd'}$, откъдето получаваме $Par(a', b', c', d')$.

Дефиниция 2. 4. Множеството от класовете, на които се разлага D от релацията $\equiv$, означаваме с $D/\equiv$. Ако $x\in D$, то класът, на който принадлежи x, означаваме с $\dot{x}$. За елементите на $D/\equiv$ дефи-

ниране релация Par по следния начин: $Par(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d})$ тогава и само тогава, когато $Par(a, b, c, d)$. Коректността на дефиницията се гарантира от втората част на теорема 2. 6. Тогава в $D/\equiv$ може да се дефинират свободни вектори и събиране на свободни вектори. Лесно се съобразява, че за всеки три елемента $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ на $D/\equiv$ съществува точно един елемент $\dot{d} \in D/\equiv$ такъв, че $Par(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d})$. Оттук следва, че $D/\equiv$ е дезаргова система. Тогава от $\overrightarrow{\dot{p}\dot{a}} = \overrightarrow{\dot{p}\dot{b}}$ ще следва $\dot{a} = \dot{b}$. Ако събирането на вектори в $D/\equiv$ означим с $\dot{+}$, имаме

Теорема 2. 7. За произволни точки p, a, b, c, d е в сила $Par(a, b, c, d)$ тогава и само тогава, когато $-\overrightarrow{\dot{p}\dot{a}} \dot{+} \overrightarrow{\dot{p}\dot{b}} \dot{-} \overrightarrow{\dot{p}\dot{c}} \dot{+} \overrightarrow{\dot{p}\dot{d}} = \dot{\bar{0}}$.

Дефиниция 2. 5. Нека e е произволен елемент на $D/\equiv$. Дефинираме операцията e по следния начин: ако $x, y, z \in D/\equiv$, полагаме $x\,e\,y = z$ точно тогава, когато $\overrightarrow{ex} \dot{+} \overrightarrow{ey} = \overrightarrow{ez}$. Веднага се вижда, че $D/\equiv$ е група с единица e по отношение на операцията e. Тогава теорема 2. 7 може да се преформулира така:

Теорема 2. 8. За произволни точки e, a, b, c, d на D имаме $Par(a, b, c, d)$ тогава и само тогава, когато

$$\dot{a}^{-1}\,\dot{e}\,\dot{b}\,\dot{e}\,\dot{c}^{-1}\,\dot{e}\,\dot{d} = \dot{e}.$$

Теорема 2. 9. Групите от дефиниция 2. 5 са изоморфни.

Доказателство. Нека имаме операциите e и e_1, където

$$e \text{ и } e_1 \in D/\equiv.$$

Тогава за всяко $x \in D/\equiv$ съществува точно едно $y \in D/\equiv$ такова, че $\overrightarrow{ex} = \overrightarrow{e_1 y}$. Полагаме $y = \varphi(x)$. Ще докажем, че φ е изоморфизъм на e върху e_1. Нека имаме $a\,e\,b = c$. Това означава, че $\overrightarrow{ea} \dot{+} \overrightarrow{eb} = \overrightarrow{ec}$. Но $\overrightarrow{ea} = \overrightarrow{e_1 \varphi(a)}$, $\overrightarrow{eb} = \overrightarrow{e_1 \varphi(b)}$, $\overrightarrow{ec} = \overrightarrow{e_1 \varphi(c)}$, откъдето имаме

$$\overrightarrow{e_1 \varphi(a)} \dot{+} \overrightarrow{e_1 \varphi(b)} = \overrightarrow{e_1 \varphi(c)}.$$

Това дава $\varphi(a)\,e_1\,\varphi(b) = \varphi(c)$.

Теоремите 2. 8, 2. 9 и пример 3 от § 1 характеризират напълно понятието абсолютна дезаргова система.

§ 3. Дезаргови системи

Теорема 3. 1. Нека D е непразно множество и Par е четиричленна релация в него. За да бъде D дезаргова система, необходимо и достатъчно е да бъдат в сила аксиомите Dr, Dl и следната аксиома

D_0. За всеки три точки a, b, c съществува точка d такава, че $Par(a, b, c, d)$, и ако $a = b$, то $c = d$.

Доказателство. Нека D е дезаргова система. Тогава по лема 4 имаме $Par(a, a, c, c)$, което доказва D_0.

Нека сега са изпълнени условията на теоремата. Ще докажем, че за всяка от трите точки a, b, c съществува единствена точка d такава, че да е в сила $Par(a, b, c, d)$. Нека имаме $Par(a, b, c, d)$ и $Par(a, b, c, d')$. По лема 5 (която следва от Dr, Dl и D_0) имаме

$$Par(b, a, d, c) \text{ и } Par(b, a, d', c),$$

откъдето по Dr имаме $Par(a, a, d', d)$, по D_0 $d'=d$.

Теорията на дезарговите системи може да се развие по аналогия с теорията на абсолютните дезаргови системи. Специално релацията $\equiv$ от дефиниция 2. 3 сега ще бъде тъждество, откъдето $D/\equiv$ ще съвпада с D. Тогава от дефиниция 2. 5, теореми 2. 8 и 2. 9 ще следва следната

Теорема 3. 2. Ако D е дезаргова система, то за всеки елемент e на D ще съществува групова операция e в D с единица e такава, че релацията $Par(a, b, c, d)$ да е в сила точно тогава, когато $a^{-1}ebec^{-1}ed=e$. Всички така дефинирани групи са изоморфни.

Теорема 3. 2 и пример 2 от § 1 показват, че понятието дезаргова система е еквивалентно на понятието група. Аксиомите ще бъдат Dr, Dl и D_0. За да бъде групата абелева, достатъчни са например Dl, D_0 и условието: ако $Par(a, b, c, d)$, то $Par(c, b, a, d)$.

За дезаговите системи са възможни и други формулировки.

Дефиниция 3. 1. В D въвеждаме навсякъде дефинирана тернарна операция по следния начин: ако a, b, c са три елемента на D, то еднозначно съществуващия елемент d, за който е в сила $Par(a, b, c, d)$, бележим $d=[a, b, c]$.

Аксиомите на дезаргова система тогава добиват вида:

Dr. Ако $[xab]=[xcd]$, то $d=[cab]$.

Dl. Ако $[bax]=[dcx]$, то $d=[bac]$.

В сила е следната

Теорема 3. 3. Нека D е непразно множество с навсякъде дефинирана тернарна операция $[a\ b\ c]$. За да бъде D дезаргова система, необходимо и достатъчно е да са в сила аксиомите

1) $[ab[bcd]]=[acd]$;
2) $[aab]=b$;
3) $[[abc]cd]=[abd]$;
4) $[abb]=a$.

Доказателство. Аксиомите 1 и 3 следват непосредствено от Dr и Dl, а 2 и 4 са съответно лема 4 и лема 1.

От 1, 2, 3 и 4 лесно следват Dr и Dl. Нека имаме $[xab]=[xcd]$. Тогава $d=[ccd]=[cx[xcd]]=[cx[xab]]=[cab]$. Аналогично от $[bax]=[dcx]$ получаваме $d=[bac]$.

За операцията $[a\ b\ c]$ теорема 3. 2 дава $[abc]=d$ точно тогава, когато $a^{-1}bc^{-1}d=1$, като тук груповата операция сме отбелязали с

„.“. Оттук $d=cb^{-1}a$, т. е. $[abc]=cb^{-1}a$. Като използуваме това представяне на тернарната операция, можем лесно да докажем следната

Теорема 3. 4. Във всяка дезаргова система е в сила тъждеството

$$A.\,[[abc]de]=[a[dcb]e]=[ab[cde]].$$

В. В. Вагнер в (1) множества с тернарни операции, удовлетворяващи $A.$, нарича полугруди, а ако допълнително са в сила

$$[a\ a\ b]=[b\ a\ a]=b$$

— груди. От теорема 3. 4 следва, че всяка дезаргова система е груда. От аксиомата $\dot{A}$ и $[aab]=[baa]=b$ лесно следват аксиомите 1, 2, 3, 4 и теорема 3. 3, от което получаваме следната

Теорема 3. 5. Понятието дезаргова система е еквивалентно на понятието груда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер, В. В.: Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Мат. сб. (н. с.), 32 (1953), 545—632.

Постъпила на 17. XI. 1970 г.

DESARGUESSCHE SYSTEME

D. Wakarelow

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es sei D eine nicht leere Menge. Die Elemente von D nennen wir Punkte; Par sei eine viergliedrige Relation in D. Wir sagen, daß der geordnete Quadrupel (a, b, c, d) von Punkten ein Parallelogramm ist, wenn $Par(a, b, c, d)$. Die Menge D zusammen mit der Relation Par nennen wir ein Desarguessches System, wenn die folgenden Axiome gelten:

Dr. Wenn $Par(pabq)$ und $Par(pcdq)$, dann $Par(cabd)$.

De. Wenn $Par(bapq)$ und $Par(dcpq)$, dann $Par(bacd)$.

D.: Zu je drei Punkten a, b, c existiert genau ein Punkt d, so daß $Par(abcd)$, und aus $a=b$ folgt $c=d$.

Wir beweisen den folgenden grundgelegenden Satz:

I. Wenn G eine Gruppe ist und $Par(abcd)$ bedeutet $ab^{-1}cd^{-1}=1$, dann ist G ein Desarguessches System.

II. Zu jedem Element l von D existiert eine Operation e in D, so daß das Paar $\{D, e\}$ eine Gruppe mit Einheitselement e ist. Die Relation Par in dieser Gruppe wird wie in I erzeugt.

III. Je zwei Gruppen von II sind isomorph.

Daraus folgt, daß der Begriff eines Desarguesschen Systems mit dem Begriff der Gruppe äquivalent ist. Es wird bewiesen, daß die Gruppe genau dann eine abelsche Gruppe ist, wenn *par* (*abcd*) induziert. Wir bringen auch andere geometrische Kriterien zu diesen Problemen, z. B. den Satz von Pascal.

Mit der Hilfe des obigen Satzes zeigen wir, daß der Begriff des Desarguesschen Systems mit dem Begriff einer Grude [1] äquivalent ist.

In der Arbeit wird auch der Begriff eines absoluten Desarguesschen Systems betrachtet. Dabei gelten die Axiome: *Dr*, *De* und *D*. Zu je drei Punkten *a*, *b*, *c* existiert ein Punkł *d*, so daß *Par*(*a b c d*).