ПАРАМЕТРИЧНО АПРОКСИМИРАНЕ

Благовест Сендов

В тази работа се разглежда една задача за апроксимиране на функции, която е характерна с това, че аргументът на функцията се заменя с подходящо избрана функция от дадена съвкупност, и така получената трансформирана функция се апроксимира относно дадено разстояние. Преди да формулираме задачата в по-общ вид, да се спрем на частния случай на апроксимиране на непрекъснати функции с алгебрични полиноми.

Да означим с H_n съвкупността от алгебричните полиноми от степен, ненадминаваща n, и

$$\hat{H}_n=\{P:P\in H_n,\ P'(x)\geqq 0;\ x\in[a,\ b],\ P(a)=a,\ P(b)=b\}.$$

Всеки полином от $\hat{H}_n$ трансформира интервала $[a, b]$ в същия интервал.

Най-добро **равномерно параметрично приближение** на непрекъсната функция $f(x)$ с алгебрични полиноми в интервала $[a, b]$ ще наричаме числото

$$e(\hat{H}_m, H_n;f)=e_{m,n}(f)=\inf_{P\in\hat{H}_m,\ Q\in H_n}\ \max_{a\leqq x\leqq b}|f(P(x))-Q(x)|.$$

Очевидно $e_{1,n}(f)$ съвпада с най-доброто Чебишово приближение

$$E_n(f)=\inf_{P\in H_n}\ \max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-P(x)|.$$

Ако за двойката $P^*(x)\in\hat{H}_m$, $Q^*(x)\in H_n$ е изпълнено равенството

$$\max_{a\leqq x\leqq b}|f(P^*(x))-Q^*(x)|=e_{m,n}(f),$$

тази двойка ще наричаме **двойка полиноми на най-добро параметрично приближение** (в случая най-добро равномерно параметрично приближение) за функцията $f(x)$.

Нека отбележим, че ако е известна двойката полиноми $P(x)$, $Q(x)$, която равномерно параметрично апроксимира функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ с точност ε, то за всяко $x_0\in[a, b]$ чрез тази двойка полиноми може да се пресметне стойността на $f(x)$ в точката x_0 с грешка, ненадминаваща ε. За тази цел трябва да се намери единственият корен x_1 на уравнението $P(x)=x_0$ в интервала $[a, b]$ и да се пресметне $Q(x_1)$.

Във връзка с това, че при възстановяване на стойностите на дадена функция чрез двойка полиноми, които я апроксимират равномерно параметрично, се налага да се решава допълнително едно уравнение, този начин на апроксимиране би представлявал практически интерес, ако има някакви преимущества относно скоростта на апроксимиране. Такива преимущества действително се получават в известни случаи, тъй като трансформацията на аргумента на апроксимираната функция може да коригира някои нейни недостатъци. Типичен пример е апроксимирането на функцията $f(x)=|x|$ в интервала $[-1, 1]$. Известно е, че за най-доброто Чебишово приближение с алгебрични полиноми е в сила асимптотичното равенство [1]

$$E_n(|x|)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Голям интерес предизвика резултатът на Д. Нюман [2] за апроксимирането на функцията $|x|$ в интервала $[-1, 1]$ с рационални функции. Д. Нюман показа, че

$$E_n^R(|x|)=O\left(e^{-\sqrt{n}}\right).$$

По-долу ще покажем, че за равномерното параметрично апроксимиране на функцията $|x|$ в интервала $[-1, 1]$ е в сила асимптотичното равенство

$$e_{n,n}(|x|)\sim 4\,(1+\sqrt{2})^{-2n}.$$

Този резултат (без доказателство) и постановката на задачата за параметрично апроксимиране бяха публикувани за пръв път в [3].

1. Обща постановка на задачата

Нека $F(\omega, R)$ е метрично пространство на функции, дефинирани върху компакта ω. Разстоянието между два елемента $f, g \in F(\omega, R)$ ще означаваме с $R(f, g)$. С Ω да означим съвкупността от еднозначните и обратими съответствия на ω в себе си. Да вземем една подсъвкупност на Ω и една подсъвкупност на $F(\omega, R)$: $H' \subset \Omega$, $H'' \subset F(\omega, R)$. Най-добро параметрично приближение на $f \in F(\omega, R)$ чрез H' и H'' ще наричаме числото

$$e(H', H''; f)=\inf_{p\in H',\, q\in H''} R(f(p), q).$$

Ако $p^* \in H'$ и $q^* \in H''$ са такива, че

$$R(f(p^*), q^*)=e(H', H''; f),$$

ще казваме, че двойката p^*, q^* е двойка на най-добро параметрично приближение на f относно разстоянието R чрез H' и H''.

Въпросът за съществуване на двойка на най-добро параметрично приближение е свързан с компактността на H' и компактността на ограничените подсъвкупности на H''. Затова формулирането на теорема за съществуване на двойка на най-добро параметрично приближение в общия случай не представлява затруднение.

Що се отнася до въпроса за единственост на двойката на най-добро параметрично приближение, отговорът не е така тривиален. Както ще видим от приведените по-долу примери, могат да съществуват безбройно много двойки на най-добро параметрично приближение.

2. Равномерно параметрично приближение с алгебрични полиноми

За простота в този параграф ще разглеждаме функции, дефинирани в интервала $[-1, 1]$. С H_n ще означаваме съвкупността от алгебричните полиноми от степен, ненадминаваща n, а с $\hat{H}_n$ ще означаваме, както по-горе, съвкупността от тези $P(x) \in H_n$, за които

$$P'(x) \geqq 0; \quad -1 \leqq x \leqq 1, \quad P(-1) = -1, \quad P(1) = 1.$$

На всяка непрекъсната в интервала $[-1, 1]$ функция $f(x)$ ще съпоставим числото

$$e_{m,n}(f) = \inf_{P \in \hat{H}_m,\, Q \in H_n} \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(P(x)) - Q(x)|,$$

което е естествено да наречем най-добро параметрично приближение на функцията $f(x)$ с алгебрични полиноми.

Ако за полиномите $P^*(x) \in \hat{H}_m$, $Q^* \in H_n$ е в сила равенството

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(P^*(x)) - Q^*(x)| = e_{m,n}(f),$$

то тези полиноми ще наричаме двойка полиноми на най-добро параметрично приближение от ред (m, n).

Теорема 1. За всяка непрекъсната функция $f(x)$ и за всяка двойка натурални числа (m, n) съществува двойка полиноми на най-добро параметрично приближение на $f(x)$ от ред (m, n).

Доказателството на тази теорема следва непосредствено от компактността на $\hat{H}_m$ и теоремата на Борел за съществуване на полином на най-добро Чебишово приближение.

Сега ще покажем, че двойката на най-добро параметрично приближение може да не бъде единствена. Действително да вземем непрекъснатата функция $g(x)$, за която съществуват $n+2$ точки $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ от интервала $[-1, 1]$, в които

$$g(x_k) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

и

$$|g(x)| \leqq 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Съгласно теоремата на Чебишов за единствеността на полинома от n-та степен на най-добро равномерно приближение константата нула ($Q(x)\equiv 0$) е полиномът от H_n, който най-добре равномерно апроксимира функцията $g(x)$. От друга страна, какъвто и полином $P(x)\in \hat{H}_m$ и да вземем (при произволно натурално m), полиномът на най-добро равномерно приближение от H_n за функцията $h(x)=g(P(x))$ ще бъде пак константата нула. Следователно $e_{m,n}(g)=1$ и двойката $P(x)$, $Q(x)\equiv 0$ при произволен полином $P(x)\in \hat{H}_m$ е двойка на най-добро равномерно параметрично приближение от ред (m, n).

От дефиницията на $e_{m,n}(f)$ следва непосредствено, че

$$\varepsilon_{m,n}(f)\leqq E_n(f)=\inf_{Q\in H_n}\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)-Q(x)|,$$

т. е. най-доброто равномерно параметрично приближение не надминава най-доброто равномерно приближение. При това от разгледания по-горе пример се вижда, че има случаи, когато тези две числа са равни.

3. Равномерно параметрично приближение на функцията $|x|$ с алгебрични полиноми

Ще разгледаме по-подробно параметричното приближение на функцията $|x|$ от ред (n, n).

Лема 1. За $e_{n,n}(|x|)$ е в сила неравенството

$$e_{n,n}(|x|)\leqq\frac{2}{(-1)^{n-1}+T_n(3)},$$

където $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ е полиномът на Чебишов от n-та степен.

Доказателство. Да разгледаме полинома

$$R(x)=T_n(2x-1)=(-1)^{n-1}\{R_1(x)-R_2(x)\}, \tag{1}$$

където $R_1(x)$ съдържа само нечетни степени, а $R_2(x)$ — само четни степени. Всички коефициенти на $R_1(x)$ и $R_2(x)$ са положителни числа. Действително полиномът $T_n(2x-1)$ има само положителни, реални и различни нули, следователно съгласно теоремата на Декарт, той трябва да има n вариации на коефициентите. Но това е възможно, ако всички коефициенти на $R_1(x)$ и $R_2(x)$ имат един и същ знак. Като вземем пред вид множителя $(-1)^{n-1}$, получаваме, че всички коефициенти на $R_1(x)$ и $R_2(x)$ са положителни.

Да означим с $P(x)$ полинома

$$P(x)=\frac{R_1(x)}{R_1(1)}.$$

Тъй като полиномът $R_1(x)$ е нечетен и има положителни коефициенти, то

(2) $$P'(x)>0;\quad P(-1)=-1,\quad P(1)=1.$$

От (1) получаваме още, че за $0\leqq x\leqq 1$

$$|R_1(x)-R_2(x)|\leqq 1,$$

и следователно

(3) $$|P(x)-Q(x)|\leqq\frac{1}{R_1(1)}\qquad \text{за}\quad 0\leqq x\leqq 1,$$

където $Q(x)=R_2(x)/R_1(1)$.

Но тъй като $P(x)$ е нечетен полином, а $Q(x)$ е четен полином, то от (3) следва, че

(4) $$||P(x)|-Q(x)|\leqq\frac{1}{R_1(1)}\qquad \text{за}\quad -1\leqq x\leqq 0.$$

От (3) и (4) следва съгласно (2), че е в сила неравенството

$$||P(x)|-Q(x)|\leqq\frac{1}{R_1(1)}\qquad \text{за}\quad |x|\leqq 1;$$

при това $P(x)$ удовлетворява условията (2). Но това означава, че

$$e_{n,n}(|x|)\leqq\frac{1}{R_1(1)}=\frac{2}{(-1)^{n-1}+T_n(3)}.$$

Последното равенство се получава непосредствено от (1).

Лема 2. За всяко натурално n е в сила неравенството

$$e_{n,n}(|x|)\geqq\frac{2}{1+T_n(3)}.$$

Доказателство. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са два полинома и $P(x)\in\mathring{H}_n$, $Q(x)\in H_n$. Да означим

$$\max_{|x|\leqq 1}||P(x)|-Q(x)|=\varepsilon$$

и още

$$R_1(x)=P(x)+Q(x),$$
$$R_2(x)=P(x)-Q(x).$$

Тъй като $P(x)\in\mathring{H}_n$, то съществува точно едно число $\alpha\in(-1,1)$, за което $P(\alpha)=0$, и $P(x)\leqq 0$ за $x\in[-1,\alpha]$, $P(x)\geqq 0$ за $x\in[\alpha,1]$. Следователно ще бъдат изпълнени неравенствата

(7) $$|R_1(x)|\leqq\varepsilon\quad \text{за}\quad x\in[-1,\alpha],$$
$$|R_2(x)|\leqq\varepsilon\quad \text{за}\quad x\in[\alpha,1].$$

От неравенствата (7) и от екстремалните свойства на полинома на Чебишов следват неравенствата

$$|R_1(1)| = |1+Q(1)| \leqq \varepsilon\, T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right),$$

$$|R_2(-1)| = |1+Q(-1)| \leqq \varepsilon\, T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$|R_1(-1)| = |-1+Q(-1)| \leqq \varepsilon,$$

$$|R_2(1)| = |1-Q(1)| \leqq \varepsilon$$

или

$$\varepsilon \geqq \frac{2}{1+T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)} \quad \text{и} \quad \varepsilon \geqq \frac{2}{1+T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)},$$

т. е.

$$\varepsilon \geqq \frac{2}{1+\min\left\{T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right),\ T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)\right\}} \geqq \frac{2}{1+T_n(3)}.$$

Тъй като $P(x)$ и $Q(x)$ бяха избрани произволно от $\hat{H}_n$ и H_n, лемата е доказана.

От лема 1 и лема 2 следва непосредствено

Теорема 2.

$$e_{n,n}(|x|) \sim 4(1+\sqrt{2})^{-2n}.$$

Нещо повече, при n нечетно е в сила равенството

$$e_{n,n}(|x|) = 4(1+(1+\sqrt{2})^{-2n})^{-2}(1+\sqrt{2})^{-2n}.$$

Точната стойност на $e_{n,n}(|x|)$ при четно n не е намерена, но може да се предполага, че тя е равна на

$$4(1-(1+\sqrt{2})^{-2n})^{-2}(1+\sqrt{2})^{-2n}.$$

Остава открит въпросът и за единствеността на двойката полиноми на най-добро параметрично приближение на функцията $|x|$ от ред (n, n). Има основания да се очаква, че тази двойка е единствена, но доказателство за това все още не притежаваме. Нека отбележим още интересния и нерешен въпрос за намиране на асимптотиката на $e_{m,n}(|x|)$ като функция на m и n.

4. Равномерно параметрично приближение на някои класи от функции

По-долу ще ни бъде необходима известната теорема на Джексон [1] за най-добро равномерно приближение с алгебрични полиноми на функция $f(x)$, притежаваща производна от ред p в интервала $[a, b]$, а именно

$$E_n(f) \leqq 12\frac{(6p)^p}{p!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^p \omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right); \ p \leqq n, \tag{7}$$

където $\omega_p(\delta)$ е модулът на непрекъснатост на $f^{(p)}(x)$.

Ще се спрем най-напред на непрекъснати, частично-полиномиални функции.

Теорема 3. Ако $f(x)$ е частично полиномиална функция от вида

$$f(x)=\begin{cases} S_1(x) & \text{за} \quad -1 \leqq x \leqq 0, \\ S_2(x) & \text{за} \quad 0 < x \leqq 1, \end{cases}$$

където $S_1(x)$, $S_2(x) \in H_k$ и $S_1(0)=S_2(0)$, то

$$e_{n,n}(f)=O(e^{-\theta_k n}) \tag{8}$$

за $\theta_k=1/12\,k e^2$.

Доказателство. Нека означим

$$S_1(x)=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu x^\nu, \quad S_2(x)=\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x^\nu,$$

$$c_\nu=\max[|a_\nu|, |b_\nu|], \quad M=\max_{0\leqq\nu\leqq k} c_\nu.$$

От дефиницията на $f(x)$ следва, че функцията $\varphi(x)=f(x^{p+1})$ има непрекъсната производна от ред p за $|x|\leqq 1$ и е в сила неравенството

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{k} \nu(p+1)(\nu p+\nu-1)\ldots(\nu p+\nu-p+1)\, c_\nu x^{\nu p+\nu-p}$$

$$\leqq M(p+1)^p \sum_{\nu=0}^{k} \nu^p \leqq M(p+1)^p k^{p+1}.$$

От теоремата на Джексон (7) следва, че при $n \geqq p$ е в сила неравенството

$$E_n(\varphi) \leqq 12\frac{(6p)^p\, 2^p}{p!\; n^p} M(p+1)^p k^{p+1}$$

$$\leqq 12\,kM\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \left(\frac{12\,ekp}{n}\right)^p,$$

или

$$E_n(\varphi) \leqq 12\,ekM\left(\frac{12\,ekp}{n}\right)^p.$$

Тъй като горното неравенство е в сила за всяко $p \leqq n-1$, то

$$E_n(\varphi) \leqq 12\,ekM e^{-\frac{n}{12 e^2 k}}.$$

Но, от друга страна, при $p \leqq n-1$ имаме

$$e_{n,n}(f) \leqq E_n(\varphi),$$

с което теоремата е доказана.

Естествено е да се потърси минималната константа θ_k, за която е вярна оценката (8). За $k=1$ от теорема 2 следва, че минималната стойност на θ_1 е 1,763 ..., а теорема 3 дава за θ_1 твърде грубата оценка 0,0112 ... .

Тук трябва да обърнем внимание върху това, че доказателството на теорема 3 се основава на обстоятелството, че вътрешният полином $P(x)$ изглажда функцията $f(x)$ в единствената точка, в която тя няма производна. Но от теорема 2 се вижда, че при двойката на най-добро параметрично приближение на функцията $|x|$ такова изглаждане не се получава, и въпреки това приближението е много по-добро.

Ще преминем към разглеждането на частично-аналитични функции. Предварително ще докажем едно помощно твърдение.

Лема 3. За всяко $r > 1$ и всяко цяло неотрицателно p е в сила неравенството

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^p}{r^\nu} \leqq \frac{p!\, r^p}{(r-1)^{p+1}}. \tag{9}$$

Доказателство. Да означим с $h_p(x)$ функцията

$$h_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^p x^\nu r^{-\nu}.$$

Ще докажем най-напред, че

$$h_p(x) = \frac{a_{0,p} x^p + a_{1,p} r x^{p-1} + \dots + a_{p,p} r^p}{(r-x)^{p+1}}, \tag{10}$$

където

$$a_{0,p} + a_{1,p} + \dots + a_{p,p} = p!$$

и

$$a_{i,p} \geqq 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Действително непосредствено се вижда, че

$$h_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu r^{-\nu} = \frac{r}{r-x},$$

и следователно твърдението е вярно при $p=0$.

От друга страна, ако допуснем, че твърдението е вярно за p, то от очевидното тъждество

$$h_{p+1}(x) = x\, h_p'(x)$$

получаваме

$$h_{p+1}(x)=(r-x)^{-p-2}\{a_{0,p}\,x^{p+1}+(2\,a_{1,p}+pa_{0,p})\,rx^p$$
$$+\ldots+(pa_{p-1,p}+2\,a_{p-2,p})\,r^{p-1}\,x^2+((p+1)\,a_{p,p}+a_{p-1,p})\,x\,r^p\}.$$

От последното се вижда, че и $h_{p+1}(x)$ има представянето (10), тъй като

$$a_{0,p}+(2\,a_{1,p}+pa_{0,p})+\ldots+(pa_{p-1,p}+2\,a_{p-2,p})+((p+1)\,a_{p,p}+a_{p-1,p})$$
$$=(p+1)\,(a_{0,p}+a_{1,p}+\ldots+a_{p,p})=(p+1)!.$$

Но от (10) следва непосредствено (9), тъй като $r>1$, с което лемата е доказана.

Теорема 4. Ако $f(x)$ е частично аналитична функция от вида

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & \text{за} \quad -1\leqq x\leqq 0,\\ \varphi_2(x) & \text{за} \quad 0\leqq x\leqq 1,\end{cases}$$

където $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ са аналитични функции в кръг с център в началото и радиус $r>1$, и $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, то за всяко натурално n е в сила съотношението

$$\varepsilon_{n,n}(f)=O\left(e^{-\varkappa_r\sqrt{n}}\right),$$

където $\varkappa_r=\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{r-1}{12\,r}}$.

Доказателство. Нека

$$\varphi_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,x^\nu,\quad \varphi_2(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu\,x^\nu,$$

и да означим с $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ функциите

$$\psi_1(x)=\varphi_1(x^{p+1}),\quad \psi_2(x)=\varphi_2(x^{p+1}).$$

За $|x|\leqq 1$ имаме

$$|\psi_1^{(p)}(x)|=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\,\nu\,(p+1)\,(\nu p+\nu-1)\ldots(\nu p+\nu-p+1)\,x^{\nu p+\nu-p}\right|$$
$$\leqq(p+1)^p\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^p\,|a_\nu|.$$

Тъй като $\varphi_1(x)$ е аналитична в кръг с радиус r, то съгласно неравенството на Коши

$$|a_\nu|\leqq\frac{M_1(r)}{r^\nu},$$

където

$$M_1(r)=\max_{|z|=r}|\varphi_1(z)|.$$

Следователно

$$\max_{|x|\leq 1} |\psi_1^{(p)}(x)| \leq M_1(r)(p+1)^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^p}{r^\nu}$$

и съгласно лема 3 получаваме

$$\max_{|x|\leq 1} |\psi_1^{(p)}(x)| \leq M_1(r) \frac{(p+1)^p p!\, r^p}{(r-1)^p}. \tag{11}$$

По същия начин получаваме, че

$$\max_{|x|\leq 1} |\psi_2^{(p)}(x)| \leq M_2(r) \frac{(p+1)^p p!\, r^p}{(r-1)^p}. \tag{12}$$

Тогава функцията $\psi(x)=f(x^{p+1})$ притежава непрекъснати производни до ред p и съгласно (11) и (12) имаме

$$\max_{|x|\leq 1} |\psi^{(p)}(x)| \leq M(r) \frac{(p+1)^p p!\, r^p}{(r-1)^p}, \tag{13}$$

където

$$M(r)=\max\,[M_1(r),\ M_2(r)].$$

Като използуваме теоремата на Джексон, (7) и (13) получаваме, че за $p\leq n$

$$E_n(\psi) \leq 12\, M(r) \frac{12^p p^p (p+1)^p r^p}{(r-1)^p n^p} \leq 12\, e\, M(r)\left(\frac{12\, p^2 r}{n(r-1)}\right)^p.$$

Тъй като последното неравенство е вярно за всяко $p\leq n$, то от него следва, че

$$E_n(\psi) \leq 12\, e\, M(r)\, e^{-\varkappa_r \sqrt{n}}, \tag{14}$$

където $\varkappa_r=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{r-1}{12r}}$, като поставим $p=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(r-1)n}{12r}}$.

Като вземем пред вид, че при $p\leq n-1$

$$e_{n,n}(f) \leq E_n(\psi),$$

то от (14) следва верността на теоремата.

Следствие 1. Ако $f(x)$ има вида

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & \text{за} \quad -1\leq x\leq 0,\\ \varphi_2(x) & \text{за} \quad 0< x\leq 1,\end{cases}$$

където $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са цели функции и $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, то

$$\varepsilon_{n,n}(f)=O\left(e^{-0{,}1\sqrt{n}}\right). \tag{15}$$

Твърдението следва непосредствено от неравенството (14).

Остава открит въпросът, дали в (15) $\sqrt{n}$ може да се замени с по-висока степен на n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функции. Москва, 1949.
2. Newman, D. I.: Rational approximation to $|x|$. Michigan Math. J. **11** (1964), 11—14.
3. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, **24**, вып. 5 (149) (1969), 141—178.

Постъпила на 20. XI. 1970 г.

PARAMETRIC APPROXIMATION

Bl. Sendov

(SUMMARY)

The author considers the following approximation problem. Let H_n be the set of algebraic polynomials of a degree $\leqq n$ and

$$\hat{H}_n = \{P : P \in H_n,\ P'(x) \geqq 0;\ |x| \leqq 1,\ P(-1) = -1,\ P(1) = 1\}.$$

For each continuous function in the interval $[-1, 1]$ is defined the best uniform parametric approximation with algebraic polynomials in the following way

$$e_{m,n}(f) = \inf_{P \in \hat{H}_m,\ Q \in H_n} \|f(P(x)) - Q(x)\|.$$

It is proved that

$$e_{n,n}(|x|) \sim 4(1+\sqrt{2})^{-2n}.$$

If $f(x)$ has the expression

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{for} \quad -1 \leqq x \leqq 0, \\ \varphi_2(x) & \text{for} \quad 0 < x \leqq 1, \end{cases}$$

where $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, then

$$e_{n,n}(f) = O(e^{-\theta_k n});\ \theta_k = 1/12\,k\,e^2,$$

when $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are algebraic polynomials of the degree $\leqq k$ and

$$e_{n,n}(f) = O(e^{-\varkappa_r \sqrt{n}});\ \varkappa_r = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{r-1}{12\,r}},$$

when $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are analytic in the circle with a center in $(0, 0)$ and a radius $r > 1$.