ДРУГИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА РЕДУЦИРАНИТЕ УРАВНЕНИЯ НА НИЛСЕН ЗА НЕХОЛОНОМНИ МЕХАНИЧНИ СИСТЕМИ

Благовест Долапчиев

1. Една рекапитулация и някои бележки. В няколко предишни наши работи [1—6], които имаха за предмет приложението на редуцираните уравнения на Нилсен [7—8] за нехолономни механични системи, ние се позовахме главно на монографията [9] на Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, откъдето за сравнение произхождаха примерите, илюстриращи нашия метод. В тези работи посочихме, че методите и уравненията, които споменатите автори застъпват в монографията си, са:

а) методът на неопределените множители на Лагранж (λ-метод), водещ до уравненията на Раус

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}=Q_\varkappa+\sum_{\varrho=1}^{r}\lambda_\varrho A_{\varrho\lambda}\qquad \begin{matrix}(\varkappa=1,2,3,\ldots,k),\\ (\lambda=1,2,3,\ldots,l=k-r)\end{matrix}$$

при неинтегрируемите диференциални (нехолономни) връзки

$$(2)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{k}A_{\varrho\varkappa}\,dq_\varkappa+A_\varrho\,dt=0\qquad (\rho=1,2,3,\ldots,r=k-l);$$

б) методът на Чаплигин за Чаплигиновите механични системи, водещ до уравненията на Чаплигин

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\lambda}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda}+\sum_{\varrho=l+1}^{l+r}\frac{\partial T}{\partial Q_\varrho}\left[\sum_{\mu=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{\varrho\mu}}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial a_{\varrho\lambda}}{\partial q_\mu}\right)\dot{q}_\mu=Q_\lambda\right.$$
$$(\lambda=1,\ 2,\ 3,\ldots,l)$$

при нехолономните връзки, представени във вида

$$(4)\qquad \dot{q}_\varrho=\sum_{\lambda=1}^{l}a_{\varrho\lambda}\,\dot{q}_\lambda+a_\varrho\quad (\rho=l+1,\ l+2,\ldots,l+\mu),$$

където $a_\varrho=0$, а $a_{\varrho\lambda}$ не зависят от зависимите обобщени координати, което важи и за кинетичната енергия и функцията на сили;

в) методът на Апел чрез енергията на ускорението

$$(5)\qquad S=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu^2}{2}\quad (\lambda=1,2,3,\ldots,l),$$

водещ до добре познатите уравнения на Апел

(6) $$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda} = Q_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

в които са взети под внимание *линейните* връзки (4);

г) методът на Гапонов за движението на нехолономните електромеханични системи, съдържащи обемни проводници с хлъзгащи се контакти, водещи до уравненията на Гапонов

(7) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} - \frac{1}{q_j}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L^*}{\partial m_j} u_{ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

където

(8) $$\dot{q}_{m+l} = \sum_{j=1}^{m} A_{lj}(q_1, q_2, \ldots, q_m)\dot{q}_j \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

при които уравнения вместо обобщените координати, на които са функции коефициентите A_{lj}, са въведени независимите променливи u_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ и в които във функцията на Лагранж L^* са изключени обобщените скорости $\dot{q}_{m+1}$, $\dot{q}_{m+2}, \ldots$ от новия вид на връзките

(9) $$\dot{q}_{m+l} = \sum_{j=1}^{m} A_{lj}(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{mj})\dot{q}_j.$$

Тези четири метода и съответни четири форми на уравненията, описващи движенията на различни механични системи с нехолономни връзки, Неймарк — Фуфаев прилагат в различни примери, като специално уравненията (3) на Чаплигин, уравненията (6) на Апел и уравненията (8) на Гапонов те са използували за сравнително решаване на задачата за търкаляне без хлъзгане на една тежка сфера по една хоризонтална равнина. Същата задача в работата ни [3] разгледахме пък с помощта на редуцираните уравнения на Нилсен за нехолономни материални системи, за да илюстрираме чрез тях метода, въведен от Апел — Ценов, свеждащ уравненията на движение към една стационарна форма, а именно

(10) $$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{q}_\lambda} = O \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l)$$

при познатите полагания

(11) $$K_1 = (\dot{T} - 2\dot{T}_0) - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \dot{q}_\varkappa$$

и преминаване от K_1 в K_1^* чрез връзките (4), където в T_0 обобщените скорости в T до известно място са фиксирани.

В руската и съветска литература по механика наред с методите а), б), в) и г) и съответните уравнения (1), (3), (6) и (8) се срещат най-вече и уравненията на П. В. Воронец д)

$$(12)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\lambda}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda}+\sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}\left(\frac{\partial \dot{q}_\varrho}{\partial q_\lambda}-\dot{a}_{\varrho\lambda}\right)-\sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial q_\varrho}a_{\varrho\lambda}=Q_\lambda+\sum_\varrho Q_\varrho a_{\varrho\lambda}$$

при диференциалните връзки (4), а по-рядко и уравненията на Волтера е)

$$(13)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s}+(b_{rs}^{(k)}-b_{sr}^{(k)})p_k p_r-T_s=P_s \quad (s=1,2,\ldots,\nu),$$

където

$$(13)\quad b_{rs}^{(i)}=m_i\,\xi_{ik}\frac{\partial \xi_{ir}}{\partial x_j}\xi_{js} \qquad \begin{matrix}(i,j=1,2,3,\ldots,3N),\\ (k,r,s=1,2,\ldots,\nu)\end{matrix}$$

и

$$(14)\quad P_s=X_i\,\xi_{is},\quad T_s=\frac{\partial T}{\partial x_j}\,\xi_{js},$$

чрез представянето на кинетична енергия във вида

$$(15)\quad T=\frac{1}{2}\,m_i\,\xi_{is}\,\xi_{ir}\,p_r\,p_s,$$

или уравненията на Маджи ж)

$$(16)\quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)E_{jr}=E_r \qquad \begin{matrix}(j=1,2,3,\ldots,n),\\ (r=1,2,3,\ldots,m),\end{matrix}$$

където

$$(17)\quad E_r=Q_j E_{jr} \quad (r=1,2,3,\ldots,m).$$

Различните методи и уравнения на движение на нехолономни материални системи са разгледани в монографията на В. В. Добронравов [10], в която авторът изхожда от следните два критерия: първо, да се съставят уравненията на движение на нехолономните механични системи без множители; второ, да се разпространят методите на аналитичната динамика на холономните системи и върху нехолономните системи. Като се подчертава, че уравненията на движение зависят съществено от това, кога се прилагат релациите за връзките, веднага след написването на общото уравнение на динамиката или след неговото преобразуване авторът на монографията]10] разделя уравненията на движение на два типа: към първия отнася уравненията на Апел, изразени чрез енергията на ускорението (5), а към втория уравненията на Чаплигин, понеже те съдържат пак кинетичната енергия. Оттук той вади заключение, че тези два типа уравнения не са еквивалентни, факт, подлежащ на уточняване.

Другояче стоят нещата в западната литература. И до днес в почти всички курсове по аналитична механика се срещат и прилагат само два метода и уравнения, на Раус и на Апел. Почти всеки и най-съвременен курс по аналитична динамика свършва с уравненията на Апел. Като се изключат някои по-редки разглеждания на уравненията на Волтера и Маджи, от една страна, само се споменават уравненията на Болцман

$$\frac{dq_h}{dt}=P_h+\frac{\partial T}{\partial p_h}-\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i\left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_h}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_h}\right)\right]+\sum_{j=1}^{r}\mu_j\zeta_j^i, \tag{18}$$

където

$$P_h=\sum_{i=1}^{3n} x_i\xi_i^h,\quad \xi_i=\frac{\partial x_i}{\partial t},\quad \xi_i^h=\frac{\partial x_i}{\partial p_h}; \tag{19}$$

q_h са холономните, а p_h поне някои от нехолономните координати. Общите връзки са дадени чрез

$$dx_i=\xi_i\,dt+\sum_h \xi_i^h\,dp_h. \tag{20}$$

От друга страна, разглежда се методът на Георг Хамел, който държи сметка за това, кога е законно използването на комутативното съотношение

$$\delta\, d=d\,\delta, \tag{21}$$

по който въпрос полемиката продължава и досега. (Срв. „Метод кинематических характеристик в аналитической механике“ от И. З. Шаги-Султан, 1966—[11]).

У нас в областта на нехолономните материални системи досега е работил Иван Ценов [12—18], комуто се дължат множество форми на уравненията на движение на такива системи. Всички те се опират и упорито следват такова представяне на уравненията на движение на нехолономните системи, при които се касае до търсене в последна сметка на частни производни на кинетичната енергия (а не на енергията на ускорението) и на функции, произведени от нея, спрямо вторите производни на обобщените координати, т. е. спрямо обобщените ускорения $\ddot{q}_\varkappa$ — факт, дължащ се на апеловото представяне, от което Ценов е бил силно повлиян. Поради горното обстоятелство методът и уравненията на Ценов

$$\frac{\partial R_2^*}{\partial \ddot{q}_\lambda}=Q_\lambda \quad (\lambda=1,2,3,\ldots,l) \tag{22}$$

при

$$R_2=\frac{1}{2}\,(\ddot{T}-3\,\ddot{T}_0) \tag{23}$$

в основата си не са нищо друго освен уравненията на Апел (6), както това се отбелязва в повечето разглеждания, визиращи уравненията (22).

2. Двете форми на уравненията на И. Ценов. В една по-стара работа [19], озаглавена „Върху няколко нови форми на уравненията на динамиката", Ценов дава четири форми на уравненията на движение на холономните и нехолономните материални системи, от които в първите две той незабелязано преминава от частните производни на кинетичната енергия и нейните варианти, добити по предварително поставени условия спрямо първите производни на обобщените кординати $q_\varkappa$ (т. е. спрямо обобщените скорости $\dot{q}_\varkappa$), към тия спрямо вторите производни $\ddot{q}_\varkappa$ и прилага пак само втората форма на уравненията на движение, а само в забележка споменава, че би могло да се приложи и първата форма. Наистина, като минава също така през формата

$$\frac{\partial T_0'}{\partial q_s} - 2\frac{\partial T_0}{\partial q_s} = Q_s, \tag{24}$$

важаща за холономните материални системи, където $s = 1, 2, 3, \ldots,$ $k+p$ = броя на координатите на разглежданата холономна система, която форма ние нарекохме Нилсенови уравнения, за нехолономните системи той достига до формата

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T_2'}{\partial q_\alpha'} - 2\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_\alpha} = \overline{Q}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \ k = \text{степ. своб нехол. с/ма}), \tag{25}$$

където с T е означена функцията T_0 (=кинетичната енергия), като се вземат под съображения уравненията за нехолономните връзки

$$q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}\, q'_\alpha + a_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, p), \tag{26}$$

с T_2' е означена функцията T_0', считана като функция само на $[q''_{k+i}]$, които се определят от уравненията за нехолономните връзки (26); най-после с $\overline{T}_0$ е означена следната функция: ако при намиране на частните производни спрямо q_α на функцията T_0 считаме, че q_{k+i} е линейната функция на q_α, а именно

$$q_{k+1} = \sum a_{i\alpha}\, q_\alpha, \tag{27}$$

без да заместваме q_{k+i} със $\sum a_{i\alpha}\, q_\alpha$ в T_0, то като означим с $\overline{T}_0$ тази функция, за нея да имаме

$$\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \sum \frac{\partial T_0}{q_{k+i}}\, a_{i\alpha}\,; \tag{28}$$

на същото основание са въведени и обобщените сили

$$\bar{Q}_\alpha = Q_\alpha + \sum Q_{k+i}\, a_{i\alpha}. \tag{29}$$

Наред с тая форма обаче той дава и втора форма на уравненията за движение на нехолономните системи, а именно

$$2\frac{\partial T_0''}{\partial q_\alpha''} - 3\frac{\partial T_0'}{\partial q_\alpha'} + 2\frac{\partial T_\alpha''}{\partial q_\alpha''} - 3\frac{\partial T_1'}{\partial q_\alpha'} = \bar{Q}_\alpha, \tag{30}$$

където и тук T_1' е функцията T_0', считана като функция само на $[q'_{k+i}]$, а T_2'' е функцията T_0'', считана като функция само на $[q''_{k+i}]$, като q'_{k+i} в T_0' и q''_{k+i} в T_0'' се определят пак от нехолономните връзки (26).

В двата примера, които следват по-нататък, Ценов използува и прилага докрай само втората форма (30).

В следващата точка ние ще се спрем на същите два примера, за които ще приложим редуцираната форма на уравненията на Нилсен, пригодена за нехолономните материални системи, с което и над тях ще изтъкнем тяхното предимство не само по отношение на уравненията (30), но и по отношение на уравненията с първите производни (25). За последните в работата си [1] Ценов отбелязва в една забележка на стр. 199—200, че „уравненията на движение се получават много лесно“, без да ги получава.

3. Релативно движение на сфера, търкаляща се в хоризонтална равнина, неподвижно свързана с въртящата се Земя. Първият пример, който Ценов разглежда в [19], гласи: „Да се определи движението на твърда хомогенна сфера с радиус a, принудена да остава върху хоризонтална равнина на земната повърхнина, като държим сметка само за земното въртене“ (стр. 184).

Ценов разглежда три случая: а) случай на хлъзгане и привличането е постоянна сила; б) случай на хлъзгане и тежестта е постоянна сила; с) случай на търкаляне и привличането е постоянна сила. Ние ще се спрем само на последния случай, за който важи и забележката, спомената по-горе и отнасяща се до уравненията (25).

В случая е необходимо да познаваме само кинетичната енергия, понеже потенциалната енергия на постоянното привличане, чиято резултанта е също така постоянна сила, минаваща през центъра на тежестта на сферата G и насочена по вертикалата на дадено място върху земната повърхнина, е равна на нула.

За намиране на живата сила, от една страна, прилагаме теоремата на Кьониг, а, от друга страна, теоремата за събиране на скоростите при релативното движение. Като означим с ξ, η, ζ координатите на центъра на тежестта на търкалящата се сфера с радиус R (вместо a), с λ географската ширина на точката A на допиране на хоризонталната равнина към Земята и с α разстоянието от A до земната ос, при постоянната ъглова скорост $\bar{\omega}$ на Земята, насочена на юг, ще имаме

$$T=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}=\frac{M V_G^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu'^2}{2},$$

(31)

$$=M(\overline{V}_G^a+\overline{V}_G^r)^2+A[(P+p)^2+(Q+q)^2+(R+r)^2].$$

Тъй като проекциите на земната ротация $\overline{\omega}$ върху координатните оси, свързани с въртящата се Земя, от които Ax е допирна към меридиана през A, Ay допирна към паралелата през A, а Az насочена по вертикалата, т. е. към центъра на Земята 0, са

(32) $$P=\omega\cos\lambda,\quad Q=O,\quad R=-\omega\sin\lambda$$

и за компонентите на преносната скорост на подвижната сравнителна система $Axyz$ имаме

(33) $$V_{Gx}^e=\omega\eta\sin\lambda,\quad V_{Gy}^e=-\omega(\xi\sin\lambda+R\cos\lambda)-d,\quad V_{Gz}^e=\omega\eta\cos\lambda,$$

при релативни скорости $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, 0, то за абсолютната жива сила намираме

(34)
$$2T_a=M[(\dot{\xi}+\omega\eta\sin\lambda)^2+(\dot{\eta}-\omega\xi\sin\lambda-\omega R\cos\lambda-d)^2+$$
$$+(\omega\eta\cos\lambda)^2]+A[(p+\omega\cos\lambda)^2+q^2+(r-\omega\sin\lambda)^2].$$

Тук p, q, r са познатите кинематични величини, с които са означени компонентите върху осите $Gx'\,|\,Ax$, $Gy'\,\|\,Ay$, $Gz'\,|\,Az$ на моменталната ротация $\overline{\Omega}$ на сферата около центъра на тежестта ѝ, т. е.

(35)
$$p=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,$$
$$q=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,$$
$$r=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}.$$

Като внесем стойностите (35) в (34) и положим

(36) $$a=\omega\sin\lambda,\quad b=2\omega(R\cos\lambda+d),\quad c=\omega\cos\lambda,$$

след известно преработване за кинетичната енергия окончателно намираме

(37)
$$2T=M(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)$$
$$+M(2a\eta\dot{\xi}-2a\xi\dot{\eta}-b\dot{\eta}-2ab\xi+a^2\xi^2+\omega^2\eta^2)$$
$$+2A(c\dot{\theta}\cos\psi+c\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi-a\dot{\psi}-a\dot{\varphi}\cos\theta).$$

Условието за търкаляне без хлъзгане изисква релативната скорост $\overline{V}_r^s$ на допирната точка S на сферата върху хоризонталната равнина, където координатите на S са 0, 0, $-R$, да бъде равна на нула; имаме

(38) $$\overline{v}_s=\overline{v}_G^r+\overline{\Omega}\times\overline{R}=\overline{0}$$

или

$$\dot{\xi}\,\bar{x}^0+\dot{\eta}\,\bar{y}^0=-R[\bar{z}^0\times(p\bar{x}^0+q\,\bar{y}^0+\bar{r}\,\bar{z}^0)=$$

(39)
$$=R\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0\\ 0 & 0 & R\\ p & q & r\end{vmatrix},$$

т. е.

(40)
$$\dot{\xi}=Rq,\quad \dot{\eta}=-Rp.$$

Поради (35) за неинтегрируемите диференциални връзки получаваме

(41)
$$\dot{\xi}=R(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi),$$
$$\dot{\eta}=-R(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi).$$

Да приложим уравненията (10). Като изпуснем индекса „а“, най-напред намираме $\dot{T}$; имаме

(42)
$$\dot{T}=M(\dot{\xi}\ddot{\xi}+\dot{\eta}\ddot{\eta})+A[\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\psi}\ddot{\psi}+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+(\dot{\psi}\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}\ddot{\psi})\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta]$$
$$+M(ab\dot{\xi}+a^2\xi\dot{\xi}+\omega^2\eta\dot{\eta}+\ldots)$$
$$+A[-c\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi+c\dot{\varphi}(\dot{\theta}\sin\psi\cos\theta+\dot{\psi}\cos\psi\sin\theta)+a\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta+\ldots].$$

Съгласно приеманията определяме функцията T_0:

(43)
$$2T_0=\text{const}+M[2a(\eta\underline{\dot{\xi}}-\xi\underline{\dot{\eta}}+b\xi)+a^2\xi^2+\omega^2\eta^2]$$
$$+2A[\underline{\dot{\varphi}}\underline{\dot{\psi}}\cos\theta+c(\underline{\dot{\theta}}\cos\psi+\underline{\dot{\varphi}}\sin\theta\sin\psi)-a\underline{\dot{\varphi}}\cos\theta],$$

и нейната производна

(44)
$$\dot{T}_0=M[a(\underline{\dot{\xi}}\dot{\eta}-\underline{\dot{\eta}}\dot{\xi}+b\dot{\xi})+a^2\xi\dot{\xi}+\omega^2\eta\dot{\eta}]$$
$$+A[-\underline{\dot{\varphi}}\underline{\dot{\psi}}\dot{\theta}\sin\theta-c(\underline{\dot{\theta}}\dot{\psi}\sin\psi-\underline{\dot{\varphi}}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$-\underline{\dot{\varphi}}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi)+a\underline{\dot{\varphi}}\dot{\theta}\sin\theta].$$

От петте променливи ξ, η, ψ, φ, θ поради нехолономните връзки (41) независими са само три — ойлеровите ъгли ψ, φ, θ. Поради това пресмятаме съответните частни производни, държейки сметка, че обобщените скорости $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ са функции само на $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$, но не и на $\dot{\psi}$, т. е. имаме

(45)
$$\dot{\xi}=\dot{\xi}(\dot{\theta},\dot{\varphi}),\quad \dot{\eta}=\dot{\eta}(\dot{\theta},\dot{\varphi}).$$

За обобщената скорост $\dot{\theta}$ намираме

(46)
$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=M\left[(\ddot{\xi}+a^2\xi+ab)\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\dot{\theta}}+(\ddot{\eta}+\omega^2\eta)\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial\dot{\theta}}\right]$$
$$+A[\ddot{\theta}+\dot{\varphi}(a-\dot{\psi})\sin\theta-c(\dot{\psi}-\dot{\varphi}\cos\theta)\sin\psi].$$

Аналогично

$$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\theta}} = M\left[a(a\xi - \dot{\eta} + b)\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\theta}} + (a\dot{\xi} + \omega^2\eta)\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\theta}}\right]$$

(47)

$$+ A.\dot{\varphi}(c\cos\theta\sin\psi + a\sin\theta).$$

От (41) намираме

(48) $$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\theta}} = R\sin\psi, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\theta}} = -R\cos\psi.$$

Като внесем изразите от (48) в (46) и (47), получаваме

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\theta}} = MR[\ddot{\xi}\sin\psi - \ddot{\eta}\cos\psi + a(b + a\xi)\sin\psi - \omega^2\eta\cos\psi]$$

(49)

$$A[\ddot{\theta} + \dot{\varphi}(a - \dot{\psi})\sin\theta - c(\dot{\psi} - \dot{\varphi}\cos\theta)\sin\psi$$

и

$$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\theta}} = MR[a(a\dot{\xi} - \dot{\eta} + b)\sin\psi - (a\dot{\xi} + \omega^2\eta)\cos\psi]$$

(50)

$$+ A(c\cos\theta\sin\psi + a\sin\theta).$$

Освобождавайки се от долните чертици, за частните производни на функцията K_1^* спрямо $\dot{\theta}$ получаваме

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\theta}}\right)^* - 2\left(\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\theta}}\right)^*$$

(51) $$= MR[(\ddot{\xi} + 2a\dot{\eta} - a^2\xi - ab)\sin\psi - (\ddot{\eta} - 2a\dot{\xi} - \omega^2\eta)\cos\psi]$$

$$A[\ddot{\theta} + (\dot{\psi} - a)\dot{\varphi}\sin\theta - c(\dot{\psi} - \dot{\varphi}\cos\theta)\sin\psi] = 0.$$

По аналогичен начин постъпваме за намиране на уравненията относно обобщената скорост $\dot{\varphi}$; имаме съответно

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}} = M\left[(\ddot{\xi} - a^2\xi + ab)\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}} + (\ddot{\eta} + \omega^2\eta)\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}\right]$$

(52)

$$+ A[\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}(\dot{\psi} - a)\sin\theta + c(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi)],$$

(53) $$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\varphi}} = M\left[a(a\xi - \dot{\eta} + b)\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}} + (\omega^2\eta + a\dot{\xi})\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}\right].$$

И сега от (41) получаваме

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}} = -R \sin\theta \cos\psi, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}} = -R \sin\theta \sin\psi. \tag{54}$$

Следователно от (54) за (52) и (53) намираме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}} &= -MR \sin\theta\,[(\ddot{\xi} + a^2\xi + ab)\cos\psi + (\ddot{\eta} + \omega^2\eta)\sin\psi] \\ &+ A\,[\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}(\dot{\psi} - a)\sin\theta + c\,(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi)] \end{aligned} \tag{55}$$

и

$$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\varphi}} = -MR \sin\theta\,[a(a\xi - \dot{\eta} + b)\cos\psi + (\omega\eta^2 + a\dot{\xi})\sin\psi]. \tag{56}$$

За частните производни на K_1^* спрямо $\dot{\varphi}$ получаваме изрази, които приравняваме на нула:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right)^* - 2\left(\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\varphi}}\right)^* \\ &\equiv -MR \sin\theta\,[(\ddot{\xi} + 2a\dot{\eta} - a^2\xi - ab) + (\ddot{\eta} - 2a\dot{\xi} - \omega^2\eta)\sin\psi] \\ &+ A\,[\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - (\dot{\psi} - a)\,\dot{\theta}\sin\theta + c(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi)] = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Намерените уравнения на движение (51) — за параметъра θ — и (57) — за параметъра φ — ще опростим, като към тях присъединим и уравнението за параметъра ψ. Но докато при първите две уравнения бе отразена нехолономността на движението, за третото уравнение тя е без отражение, тъй като, както отбелязахме вече, нито $\dot{\xi}$, нито $\dot{\eta}$ зависят от $\dot{\psi}$. Ето защо сега ще приложим формата на уравнения за холономните системи. Ние ще изберем за целта тая на Нилсен (24).

Имаме от (42)

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\psi}} = A\,[\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta - c\,(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)], \tag{58}$$

а от (37)

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = A\,c(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi). \tag{59}$$

Оттук

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\psi}} - 2\frac{\partial T}{\partial \psi} \\ &\equiv A\,[\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta + c(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + 2\dot{\theta}\sin\psi \\ &\qquad - 2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)] = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Следователно търсеното уравнение гласи

$$\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta=-c\,(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi). \tag{61}$$

Като извършим еднократно диференциране спрямо t на израза, за r от (35) получаваме

$$\dot{r}=\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta. \tag{62}$$

Като вземем под внимание, че изразът в скобите от дясната страна на (61) е равен на q, окончателно намираме

$$\dot{r}=-c\,.\,q, \tag{63}$$

съвпадащо с уравнението (38) от цитираната работа на Ценов [19].

Над уравненията (51) и (57) ще извършим следните преобразования: най-напред елиминираме $\ddot{\xi}$, за която цел уравнение (51) умножаваме със $\sin\theta\cos\psi$, а уравнение (57) със $\sin\psi$, след което събираме получените резултати; получаваме

$$\begin{aligned} &MR(-\ddot{\eta}+2\,a\,\dot{\xi}+\omega^2\eta)+A\sin\theta\,(\ddot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\sin\theta \\ &-c\,\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi\cos\psi-a\,\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\psi \\ &+a\,\dot{\theta}\sin\psi)+A\,(\ddot{\varphi}\sin\psi+\ddot{\psi}\cos\theta\sin\psi+c\,\dot{\theta}\cos\theta\sin^2\psi)=0. \end{aligned} \tag{64}$$

С прибавянето и изваждането на членовете $\ddot{\varphi}\sin^2\theta\sin\psi$ и $\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\psi$ (64) става

$$\begin{aligned} &MR\sin\theta\,(-\ddot{\eta}+2\,a\,\xi+\omega^2\eta)+A\sin\theta\,[(\ddot{\theta}\cos\psi-\dot{\theta}\,\dot{\psi}\sin\psi \\ &+\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi)+a(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ &+\dot{\theta}\sin\psi)]+A\,[-\ddot{\varphi}\sin\psi+\cos\theta\sin\psi\,(\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\psi}) \\ &+c(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi)\cos\theta\sin\psi+\ddot{\varphi}\sin\psi]=0. \end{aligned} \tag{65}$$

Като вземем под внимание изразите за $\dot{p}$, q, $\dot{r}$, горното уравнение приема простия вид

$$\begin{aligned} &MR\sin\theta(-\ddot{\eta}+2\,a\,\dot{\xi}+\omega^2\eta)+A\sin\theta\,(\dot{p}+aq) \\ &+A\,(\dot{r}+cq)\cos\theta\sin\psi=0. \end{aligned} \tag{66}$$

Но от (63) и от изразите за $\dot{p}$ и q в (40) следва

$$MR(-\ddot{\eta}+2\,a\,\dot{\xi}+\omega^2\eta)+A\left(-\frac{\ddot{\eta}}{R}+a\frac{\dot{\xi}}{R}\right)=0. \tag{67}$$

Като вземем под внимание и полаганията (36), окончателно намираме

$$(A+MR^2)\,\ddot{\eta}=(A+2\,MR^2)\,\omega\sin\lambda\,\dot{\xi}+MR^2\eta; \tag{68}$$

това уравнение на движението на сферата съвпада с уравнението (55′) на работата [19].

Като умножим, от друга страна, уравнение (51) със $\sin\theta \sin\psi$, а уравнение (57) с $\cos\psi$ и така получените резултати извадим (втория от първия), ще елиминираме $\ddot{\eta}$; намираме

$$
\begin{aligned}
&MR\sin\theta(\ddot{\xi}+2a\dot{\eta}-a^2\xi-ab)+A\sin\theta(\ddot{\theta}\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\\
&\quad -c\dot{\psi}\sin^2\psi-c\dot{\varphi}\cos\theta\sin^2\psi-a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\psi\\
(69)\qquad &\quad -c\dot{\psi}\cos^2\psi-a\dot{\theta}\cos\psi)\\
&\quad +A(-\ddot{\varphi}\cos\psi-\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi-c\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi\cos\psi)=0.
\end{aligned}
$$

От (63) и (40) имаме след интегриране, че

$$
(70)\qquad r=-\frac{c}{R}\xi+C.
$$

Следователно, като се върнем отново на старите означения, получаваме окончателно третото уравнение на движение на сферата, а именно

$$
\begin{aligned}
&(A+MR^2)\ddot{\xi}=-(A+2MR^2)\,\omega\sin\lambda\,\dot{\eta}-A\,\omega^2\cos^2\lambda\,.\,\xi\\
(71)\qquad &+A\,\omega\,C\cos\lambda+MR^2\sin^2\lambda\,.\,\xi+MR^2\,\omega^2\sin\lambda\,(d+R\cos\lambda),
\end{aligned}
$$

съвпадащо с уравнение (56′) на [19].

4. Класическата задача за движението на обръча. Като последно приложение, което ще направим на редуцираните уравнения на Нилсен, нека разгледаме класическата задача за търкалянето без хлъзгане на тежък обръч в хоризонтална равнина. На тази задача се спира и Ценов в работата си [19], пример II, но и за нея той прилага не уравнения (25), а уравненията (30).

Както се знае, движението на обръча се привежда почти във всеки курс по аналитична динамика като характерен пример за нехолономна система, за чиито уравнения на движение се използва формата на Апел (6). Този пример е забележителен и с това, че на него Апел показа, че може да съществува и друг род движение, например търкалянето на кръгов диск със същия радиус също по хоризонтална равнина, чийто център е принуден да се движи по вертикална полуокръжност с център в равнината; това движение на диска има кинетична енергия T, равна на кинетичната енергия T на диска, който подобно на обръча извършва казаното търкаляне свободно. Наистина, както лесно се установява, при втория случай се касае до холономна система, докато при първия случай на обръч или диск системата е нехолономна. Едва от енергията на ускорението S (5), пресметната за двете механични системи, се вижда, че движенията са различни. С това Апел [20] подчерта факта, че кинетичната енергия единствено, т. е. използването на уравненията на Лагранж от втори род, не е доста-

тъчна за третиране на нехолономните системи. С това той утвърди своята нова форма на уравнения на движение (6), която наред с тая на Лагранж за холономните системи стана класическа.

С въвеждане на функцията T_0 с фиксирани временно обобщени скорости — една твърде остроумна идея, принадлежаща на Ценов, последният автор наистина се освободи от енергията на ускорение, но запази вторите производни на обобщените координати, с което в същност попадна отново на апеловата форма.

Видоизменението на лагранжовите уравнения от втори род чрез въвеждане на същата функция T_0, което се извърши по пътя, показан от Ценов и Апел, както многократно посочихме, ни води също до решаване на ония нехолономни задачи, които най-често са срещани в практиката. Такава е и задачата за търкалянето на обръча.

Лесно се установява, че шестте параметъра, от които зависи във всеки момент положението на обръча — трите координати ξ, η, ζ на центъра на тежестта му и трите ойлерови ъгъла ψ, φ, θ, са свързани, от една страна, с очевидната крайна връзка

$$\zeta = a \sin\theta \qquad (a = \text{радиуса на обръча}), \tag{72}$$

а, от друга, с неинтегрируемите диференциални връзки

$$\dot{\xi} = a(\sin\psi \sin\theta\, \dot{\theta} - \cos\psi \cos\theta\, \dot{\psi} - \cos\psi\, \dot{\varphi}), \tag{73}$$

$$\dot{\eta} = -a(\cos\psi \sin\theta\, \dot{\theta} + \sin\psi \cos\theta\, \dot{\psi} + \sin\psi\, \dot{\varphi}), \tag{74}$$

така че по един естествен начин са отделени зависимите координати ξ и η.

За кинетичната енергия се намира

$$2T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + a^2 \cos^2\theta\, p^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2, \tag{75}$$

където A и C са главните (осни) инерчни моменти на окръжността-обръч, съответно спрямо произволен неин диаметър и спрямо перпендикуляра към равнината ѝ.

Компонентите p, q, r на моменталната ъглова скорост на обръча, както е известно, имат значения

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi} \sin\theta, \quad r = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \tag{76}$$

Най-после за функцията на сили имаме

$$U = -ag \sin\theta. \tag{77}$$

Като вземем под внимание релациите (76), изразът (75) за T приема още вида

$$2T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + C(\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi})^2. \tag{75'}$$

И сега пресмятаме

$$\dot{T}=\dot{\xi}\ddot{\xi}+\dot{\eta}\ddot{\eta}+a^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\cos^2\theta-a^2\dot{\theta}^3\sin\theta\cos\theta$$

(78) $$+A(\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\psi}\ddot{\psi}\sin^2\theta+\dot{\psi}^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)$$

$$+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi}).$$

За функцията T_0 имаме

(79) $$2T_0=a^2\underline{\dot{\theta}}^2\cos\theta+A\underline{\dot{\psi}}\sin^2\theta+C(\underline{\dot{\psi}}\cos\theta+\underline{\dot{\varphi}})^2,$$

откъдето намираме

$$\dot{T}_0=-a^2\underline{\dot{\theta}}^2\theta\sin\theta\cos\theta+A\underline{\dot{\psi}}^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

(80) $$-C(\underline{\dot{\psi}}\cos\theta+\underline{\dot{\varphi}})\underline{\dot{\psi}}\dot{\theta}\sin\theta.$$

Най-напред ще потърсим диференциалните уравнения за движението на обръча за параметъра θ, т. е. неговото нутационно движение. Имаме

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=\ddot{\xi}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\dot{\theta}}+\ddot{\eta}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial\dot{\theta}}+a^2\ddot{\theta}\cos^2\theta-3a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

(81) $$+A(\ddot{\theta}+\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)-C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})$$

и

$$\frac{\partial\dot{T}_0}{\partial\dot{\theta}}=-a^2\underline{\dot{\theta}}^2\sin\theta\cos\theta+A\underline{\dot{\psi}}^2\sin\theta\cos\theta$$

(82) $$-C\dot{\psi}\sin\theta(\underline{\dot{\psi}}\cos\theta+\underline{\dot{\varphi}}).$$

Тъй като силата не зависи от обобщените скорости, т. е. имаме съгласно (77) за обобщената сила, съответствуваща на параметъра, израза

(83) $$Q_\theta=\frac{\partial U}{\partial\theta}=-ag\cos\theta,$$

то търсеното уравнение сега ще бъде

(84) $$\frac{\partial R_1^*}{\partial\dot{\theta}}=Q_\theta.$$

За преобразуване на (81) определяме

(85) $$\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\dot{\theta}}=a\sin\theta\sin\psi,$$

(86) $$\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial\dot{\theta}}=-a\sin\theta\cos\psi.$$

Предстои ни пресмятането на вторите производни на зависимите обобщени координати ξ и η. Релациите (73) и (74) написваме още във формата

$$\dot{\xi} = -a\left(\dot{\varphi}\cos\psi + \frac{d}{dt}\sin\psi\cos\theta\right), \tag{73'}$$

$$\dot{\eta} = -a\left(\dot{\varphi}\sin\psi - \frac{d}{dt}\cos\psi\cos\theta\right). \tag{74'}$$

Така намираме

$$\ddot{\xi} = -a\left(\ddot{\varphi}\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi + \frac{d^2}{dt^2}\sin\psi\cos\theta\right), \tag{87}$$

$$\ddot{\eta} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi - \frac{d^2}{dt^2}\cos\psi\cos\theta\right). \tag{88}$$

Въз основа на (85), (86) и (87), (88) за първите две събираеми в (81) имаме

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial\dot{\theta}} + \ddot{\eta}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial\dot{\theta}} &= a(\ddot{\xi}\sin\psi - \ddot{\eta}\cos\psi)\sin\theta \\ &= -a^2\left(-\dot{\varphi}\dot{\psi} + \sin\psi\frac{d^2}{dt^2}\sin\psi\cos\theta + \cos\psi\frac{d^2}{dt^2}\cos\psi\cos\theta\right)\sin\theta. \end{aligned} \tag{89}$$

За улеснение на пресмятанията да означим временно

$$u = \sin\psi, \quad v = \cos\psi, \quad w = \cos\theta. \tag{90}$$

За второто и третото събираемо в скобите на (89) имаме

$$\begin{aligned} &u(uw)^{\cdot\cdot} + v(vw)^{\cdot\cdot} \\ &= u(\dot{\psi}v\dot{w} + \dot{\theta}u\dot{w})^{\cdot} + v(-\dot{\psi}uw + \dot{\theta}v\dot{w})^{\cdot} \\ &= -(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta + \dot{\psi}^2\cos\theta). \end{aligned} \tag{91}$$

Следователно (89) става

$$\begin{aligned} &a(\ddot{\xi}\sin\psi - \ddot{\eta}\cos\psi)\sin\theta \\ &= a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta + \ddot{\theta}\sin^2\theta + \theta^2\sin\theta\cos\theta + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{89'}$$

Оттук за (81) намираме

$$\begin{aligned} \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}} &= a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta + a^2\ddot{\theta} - 2a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + a^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ &+ A\ddot{\theta} + A\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta - C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta - C\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ &= (a^2 + A)\ddot{\theta} + (a^2 - C)\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta - 2a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta \\ &+ (-C + a^2 + A)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{92}$$

За уравнението (84) сега получаваме

$$(93)\qquad (a^2+A)\ddot{\theta}+(a^2+C)\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+(a^2-A-C)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta=0.$$

За да напишем окончателния вид на уравнение (93), от една страна, означаваме

$$(94)\qquad R=\dot{\psi}\cos\theta,\ \text{следователно}\quad \dot{\varphi}=r-R,$$

а, от друга, се връщаме към компонентите p, q и r; имаме

$$(95)\qquad (A+a^2)\dot{p}-ARq+(C+a^2)qr\quad -ag\cos\theta.$$

Това уравнение е получил Апел в [20] в § 467, стр. 339, прилагайки своите уравнения; то съвпада с първото уравнение от групата от три уравнения в края на този параграф. Същото уравнение в работата [19] има номер (74).

Сега ще потърсим диференциалното уравнение на движение за параметъра φ, т. е. ще намерим закона на собственото въртене на обръча.

От частното диференциране на (78) спрямо $\dot{\varphi}$ получаваме

$$(96)\qquad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}}=\ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}}+\ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}+C(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-\ddot{\varphi}).$$

Същото за (80) ни дава

$$(97)\qquad \frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\varphi}}=0.$$

Най-после имаме

$$(98)\qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}}=0.$$

И сега от (73) и (74) пресмятаме производните

$$(99)\qquad \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}}=-a\cos\psi,\quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}=-a\sin\psi.$$

С означенията (90) прочее намираме

$$\ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}}+\ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}=-a(\ddot{\xi}\cos\psi+\ddot{\eta}\sin\psi)=a^2\left(\ddot{\varphi}+v\frac{d^2}{dt^2}uw-u\frac{d^2}{dt^2}vw\right)$$

$$(100)\qquad =a^2[\ddot{\varphi}+v(\dot{\psi}vw+\dot{\theta}u\dot{w})^{\cdot}-u(-\dot{\psi}uw+\dot{\theta}v\dot{w})^{\cdot}]$$

$$=a^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta).$$

Въз основа на (96), (97), (98) и (100) намираме за търсеното уравнение за φ

$$(101)\qquad a^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)+C(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi})=0.$$

Като вземем под внимание стойността $\dot{r}$ от (62), окончателно това уравнение приема вида

$$(a^2+C)\dot{r}-a^2pq=0, \tag{102}$$

съвпадащо с третото уравнение в [20], стр. 341, и с уравнение (75) на [19], стр. 202.

Най-после да потърсим диференциалното уравнение за параметъра ψ, т. е. да намерим прецесионното движение на обръча. От частното диференциране на (78) относно ψ получаваме

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\psi}} &= \ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\psi}}+\ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\psi}}+A(\ddot{\psi}\sin^2\theta+2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)\\ &+C[\cos\theta(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi})-\dot{\theta}\sin\theta\,(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})].\end{aligned} \tag{103}$$

Също за (80) и (77) имаме

$$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{\psi}}=0, \tag{104}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\psi}}=0. \tag{105}$$

Производните относно $\dot{\psi}$ на (73) и (74) са

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\psi}}=-a\cos\psi\cos\theta,\quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\psi}}=-a\sin\psi\cos\theta. \tag{106}$$

Поради израза в (100) и сега написваме

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\psi}}+\ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\psi}}\\ &=-a(\ddot{\xi}\cos\psi+\ddot{\eta}\sin\psi)\cos\theta=a^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\cos\theta.\end{aligned} \tag{107}$$

Въз основа на (103), (104) и (105), прибавяйки и (106), и с оглед на полагането (94) и формулите (76) написваме

$$\begin{aligned}&a^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\cos\theta+A(\ddot{\psi}\sin^2\theta+2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)\\ &+C(\ddot{\psi}\cos^2\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)=0.\end{aligned} \tag{108}$$

Поради (101) за (108) намираме

$$A(\ddot{\psi}\sin\theta+2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)-C(\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta+\dot{\theta}\dot{\varphi})=0. \tag{109}$$

С връщане на компонентите на ъгловата скорост окончателно намираме

$$A\dot{q}+(AR-Cr)p=0, \tag{110}$$

което съвпада с второто от уравненията, цитирани в курса на Апел [20], и с уравнение (76) в работата на Ценов [19].

Забележка. Горното решение на класическата задача за обръча бе предоставено на дипломантката Нина Шаранкова, която го разгледа в своята дипломна работа и сравни с решението ѝ чрез формата на уравненията, дадени от А. В. Гапонов (7), тъй като тази задача се отнася до една чаплигинова механична система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dolaptchiev, Bl.: Exemple d'application des équations de Nielsen à des systèmes mécaniques non holonomes. C. R. Acad. Sc. Paris, **267** (1968), 394—396. Nouvel exemple d'application des équations de Nielsen à des systèmes mécaniques non holonomes. ebd, 422—424.
2. Dolaptschiew, Bl.: Verwendung der einfachsten Gleichungen Tzenoffschen Typs (Nielsenschen Gleichungen) in der nicht-holonomen Dynamik. ZAMM, **49** (1969), 179—184.
3. Dolaptschiew, Bl.: Anwendung der „reduzierten" Gleichungen von Nielsen im Falle der nicht-tschaplyginschen nichtholonomen mechanischen Systeme. Acta mechanica.
4. Долапчиев, Бл.: Примери за приложения на редуцираните уравнения на Нилсен върху нехолономни механични системи. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 87—110.
5. Долапчиев, Бл.: Извеждане уравненията на Келдиш при „шими" на самолетното и автомобилно шаси чрез редуцираната форма на Нилсен за нехолономни системи. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **63** (1968/69), 187—197.
6. Долапчиев, Бл.: Приложение на редуцираните уравнения на Нилсен за нехолономни системи в рху проблема на А. Ю. Ишлински. Изв. Мат. инст. БАН,
7. Dolaptschiew, Bl.: Über die Nielsensche Form der Gleichungen von Lagrange und deren Zusammenhang mit dem Prinzip von Jourdain und mit den nichtholonomen mechanischen Systemen. ZAMM, **46** (1966), 351—355.
8. Долапчиев, Бл.: Об уравнениях Нильзена-Ценова и их примененении к неголономчым системам с нелинейными связями. Докл. АН СССР, **171** (1966), 820—822.
9. Неймарк, Ю. И. и Фуфаев, Н. А.: Динамика неголономных систем. Москва, 1967.
10. Добронравов В. В.: Об основных положениях механики неголономных систем. Сб. статей МВТУ, вып. **50**. М, Оборонгиз, 1960.
11. Шаги-Султан, И. З.: Метод кинематических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата, 1966.
12. Ценов, Ив.: Върху общите уравнения на движението на нехолономни материални системи. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **15—16** (1921), 1—19.
13. Tzenoff, I.: Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes. Math. Ann., **91** (1924), 161—168.
14. Ценов, Ив.: Нови форми на общите уравнения на движението на материалните системи. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **45** (1), (1949), 239—261.
15. Ценов, Ив.: Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. Докл. АН СССР, **89** (1953), 21—24.
16. Ценов, Ив.: Върху една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тия уравнения. Изв. Мат. инст. БАН, **1** (1954), 91—134.
17. Ценов, Ив.: Приложение на новите уравнения на аналитичната динамика в релативното движение на твърдите тела. Изв. Мат. инст. БАН, **4** (1960), 81—137.

18. Ценов, Ив.: Върху интегралните вариационни принципи на аналитичната динамика. Год. на Соф. унив., Маг. фак., 57 (1964), 221—253.
19. Ценов, Ив.: Върху няколко нови форми на уравненията на динамиката. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 28 (1932), 177—234.
20. Аппель, П. Теоретическая механика. II. 1960, Москва.

Постъпила на 24. XI. 1970 г.

WEITERE BEISPIELE ZUR ANWENDUNG DER REDUZIERTEN GLEICHUNGEN VON NIELSEN FÜR NICHT-HOLONOME MECHANISCHE SYSTEME

Bl. Dolaptschiew

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es werden zuerst eine Rekapitulation und einige Bemerkungen gemacht, welche die verschiedenen Formen der Gleichungen der nichtholonomen mechanischen Systeme behandeln und gewisse strittigen Momente in der nichtholonomen Dynamik betreffen. Speziell werden die Tzenoffschen Verfahren dargelegt, die sich ständig und zielstrebig auf die zweiten Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten der Punkte der materiellen Systeme beziehen, genau so wie die Sache bei der Appellschen Form der Gleichungen bei nichtholonomen Bindungen steht. Im Zusammenhang mit diesen allgemeinen Betrachtungen werden zwei Beispiele hinzugefügt zum Vergleich des von uns vorgeschlagenen Verfahrens mit demjenigen von Appell-Tzenoff. Diese Beispiele betreffen: I. Rollen ohne Gleiten einer Kugel auf einer horizontalen Ebene, die mit der sich drehenden Erde verbunden ist; und II. Rollen ohne Gleiten eines Reifens auf einer horizontalen Ebene; diese Aufgabe ist schon klassisch geworden.