AFFINE UND EUKLIDISCHE KÖRPER IN HILBERTSCHEN RÄUMEN

Iwan Tschobanow

In der vorliegenden Arbeit H bedeutet einen willkürlichen nichttrivialen reellen Hilbertschen Raum, der an gewissen Stellen zu einem n-dimensionalen Euklidischen Raum E_n spezialisiert wird; E_3 wird noch durch V bezeichnet. Der H zugrundeliegende lineare, bzw. vor-Hilbertsche Raum, ist mit L, bzw. mit E bezeichnet; wenn L n-dimensional ist, wird er mit L_n bezeichnet. Wenn eine Definition oder ein Satz beispielsweise für L formuliert wird und danach auf irgendeine von den angeführten Spezialisationen von L angewandt wird, z. B. auf E oder E_n, wird die entsprechende Buchstabe anstatt L gestellt, ohne daß dies ausdrücklich erwähnt wird.

Der Einfachheit halber werden solche Dinge nicht pedantisch präzisiert, wie z. B. Definitionsgebiete von Funktionen oder manche lokalanalytische Besonderheiten: von den vorkommenden Funktionen wird einfach angenommen, daß sie definiert und genügend, sogar beliebig vielmal differentierbar sind für alle reellen Werte ihrer Argumente; es ist ganz offenbar, wie im entgegengesetzten Falle der Text abzuändern ist — das würde aber die Darstellung unnötig erschweren, ohne daß man im wesentlichen einen besonderen Fortschritt erzielt. Die grundlegende algebraische und analytische Kennzeichen von H werden als bekannt vorausgesetzt. Jedoch — um eventuelle *qui pro quo* zu vermeiden — werden an gewissen Stellen eingehendere Formulierungen gegeben, deren Anzahl aber bis zum notwendigen Minimum vermindert ist. Das gilt beispielsweise für die reziproken Reperen in E, deren Rolle in der mehrdimensionalen Kinematik in Hilbertschen Räumen wenigstens vom technischen Standpunkt aus wesentlich ist.

Df, Th, Dm ersetzen entsprechend die Wörter „Definition", „Satz", „Beweis" und R bezeichnet die Menge der reellen Zahlen; wenn das Argument eine physikalische Deutung als „Zeit" zuläßt, wird T statt R gesetzt. Die Symbole „Sgn" und „sgn:" ersetzen entsprechend die Wörter „Bezeichnung" und „bezeichnet".

1. Es sei

$$\overline{a}_\nu \in L \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Dann:

Sgn 1. $([\overline{a}_\nu]_{\nu=1}^{n}$ sgn: Ind $L)$ sgn: (1) sind linear unabhängige Elemente von L.

Sgn 2. $([\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n}$ sgn: Dpn $L)$ sgn: (1) sind linear abhängige Elemente von L.

Df 1. *Reper in* L nennt man (1) bei

$$[\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } L. \tag{2}$$

Df 2. *Reper von* L_n nennt man (1) bei

$$[\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } L_n. \tag{3}$$

Sgn 3. $L(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}$ sgn: $\{\overline{a}: [\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n}$ sgn: Ind L, $\alpha_\nu \in R$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, $\overline{a}=\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \overline{a_\nu}\}$.

Sgn 4. $G(\overline{a_\nu}, \overline{b_\nu})_{\nu=1}^{n}$ sgn:
$$\begin{vmatrix} \overline{a_1}\,\overline{b_1} & \overline{a_1}\,\overline{b_2} & \ldots & \overline{a_1}\,\overline{b_n} \\ \overline{a_2}\,\overline{b_1} & \overline{a_2}\,\overline{b_2} & \ldots & \overline{a_2}\,\overline{b_n} \\ \ldots & & & \\ \overline{a_n}\,\overline{b_1} & \overline{a_n}\,\overline{b_2} & \ldots & \overline{a_n}\,\overline{b_n} \end{vmatrix}$$
bei
$$\overline{a_\nu}, \overline{b_\nu} \in E \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Sgn 5. $G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}$ sgn: $G(\overline{a_\nu}, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}$.

Th 1. Aus
$$\overline{a_\nu} \in E \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$
folgt
$$[\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } E \tag{6}$$
genau bei
$$G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \neq 0. \tag{7}$$

Dm Klar.

Sgn. 6. $\overline{a_\mu}^{-1}$ sgn: $\dfrac{(-1)^{\mu+1}}{G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}}$
$$\begin{vmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \ldots & \overline{a_n} \\ a_1^2 & \overline{a_1}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{a_1}\,\overline{a_n} \\ \overline{a_2}\,\overline{a_1} & a_2^2 & \ldots & \overline{a_2}\,\overline{a_n} \\ \ldots & & & \\ \overline{a_{\mu-1}}\,\overline{a_1} & \overline{a_{\mu-1}}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{a_{\mu-1}}\,\overline{a_n} \\ \overline{a_{\mu+1}}\,\overline{a_1} & \overline{a_{\mu+1}}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{a_{\mu+1}}\,\overline{a_n} \\ \ldots & & & \\ \overline{a_n}\,\overline{a_1} & \overline{a_n}\,\overline{a_2} & \ldots & a_n^2 \end{vmatrix},$$
$(\mu=1, 2, \ldots, n)$ bei (6).

Th 2. Aus (6) folgt

$$\bar{a}_\mu^{-1} \in E(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

Dm. Sgn 3, Sgn 6.

Th 3. Aus (6) folgt

$$\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu^{-1} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Dm. Sgn 4 — Sgn 6.

Th 4. Aus (6) folgt

$$[\bar{a}_\nu^{-1}]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Ind } E. \tag{10}$$

Dm. Aus

$$\alpha_\nu \in R \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \bar{a}_\nu^{-1} = \bar{o}, \tag{12}$$

(9) folgt

$$\alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu^{-1} = \bar{a}_\mu \bar{o} = o \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Df 3. Den Reper $[\bar{a}_\nu^{-1}]_{\nu=1}^n$ in E nennt man *reziprok* zu dem Reper $[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^n$ in E.

Th 5. Aus (6) folgt

$$E(\bar{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = E(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n. \tag{14}$$

Dm. Sgn 3, Th 2, Th 4.

Th 6. Aus (6),

$$\bar{a} \in E(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n \tag{15}$$

folgt

$$\bar{a} = \sum_{\nu=1}^n (\bar{a} \bar{a}_\nu^{-1}) \bar{a}_\nu. \tag{16}$$

Dm. Aus (15), Sgn 3 folgt

$$\bar{a} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \bar{a}_\nu \tag{17}$$

bei (11). Aus (17), Th 3 folgt

$$\alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \bar{a}_\nu \bar{a}_\mu^{-1} = \bar{a} \bar{a}_\mu^{-1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Th 7. Aus (6), (15) folgt

$$\bar{a} = \sum_{\nu=1}^n (\bar{a} \bar{a}_\nu) \bar{a}_\nu^{-1}. \tag{19}$$

Dm. Aus (15), (14), Sgn 3 folgt

$$\overline{a}=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\,\overline{a}_\nu^{-1} \tag{20}$$

bei (11). Aus (20), Th 3 folgt

$$\alpha_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\,\overline{a}_\nu^{-1}\,\overline{a}_\mu=\overline{a}\,\overline{a}_\mu \qquad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{21}$$

Th 8. Aus (6) folgt

$$(\overline{a}_\nu^{-1})^{-1}=\overline{a}_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{22}$$

Dm. Die Vektoren $(\overline{a}_\nu^{-1})^{-1}$ $(\nu=1,\ 2,\ldots,\ n)$ sind wegen Sgn 6 Th 4, Sgn 4, Sgn 5, Th 1 definiert. Aus Th 2, Th 5, Th 6, Th 3 folgt

$$(\overline{a}_\mu^{-1})^{-1}=\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{a}_\mu^{-1})^{-1}\,\overline{a}_\nu^{-1}]\,\overline{a}_\nu=\overline{a}_\mu \qquad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{23}$$

Th 9. Aus (6), (11), (15) folgt

$$\overline{a}\,\overline{a}_\nu=\alpha_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{24}$$

genau bei

$$\overline{a}=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\,\overline{a}_\nu^{-1}. \tag{25}$$

Dm. Aus (24), Th 7 folgt (25). Aus (25), Th 3 folgt

$$\overline{a}\,\overline{a}_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\,\overline{a}_\nu^{-1}\,\overline{a}_\mu=\alpha_\mu \qquad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{26}$$

Th 10. Aus (6), (15) folgt

$$\overline{a}\,\overline{a}_\nu=o \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{27}$$

genau bei

$$\overline{a}=\overline{o}. \tag{28}$$

Dm. Th 9.

Th 11. Aus (6) folgt

$$\overline{a}_\nu^{-1}=\overline{a}_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{29}$$

genau bei

$$\overline{a}_\mu\,\overline{a}_\nu=\begin{cases}1 & (\mu=\nu)\\ 0 & (\mu\neq\nu)\end{cases} \qquad (\mu,\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{30}$$

Dm. Aus (29), Th 3 folgt

$$\overline{a}_\mu\,\overline{a}_\nu=\overline{a}_\mu\,\overline{a}_\nu^{-1}=\begin{cases}1 & (\mu=\nu)\\ 0 & (\mu\neq\nu)\end{cases} \qquad (\mu,\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{31}$$

Aus (30), Th 7 folgt

$$\overline{a_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{a_\mu}\,\overline{a_\nu})\,\overline{a_\nu}^{-1} - \overline{a_\mu}^{-1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Th 12. Aus (6),

$$\overline{p} \in E(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \tag{33}$$

folgt

$$\overline{p}\,\overline{q} = \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{p}\,\overline{a_\nu})(\overline{q}\,\overline{a_\nu}^{-1}). \tag{34}$$

Dm. Th 6, Th 7, Th 3.

Th 13. Aus (6),

$$[\overline{b_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } E, \tag{35}$$

$$E(\overline{c_\nu})_{\nu=1}^{n} = E(\overline{b_\nu})_{\nu=1}^{n}, \tag{36}$$

$$\overline{\rho} \in E \tag{37}$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{a_\nu}^{-1})\,\overline{a_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{b_\nu}^{-1})\,\overline{b_\nu}. \tag{38}$$

Dm. Aus (36), (6), Th 5, (35), Th 6 folgt

$$\overline{a_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\overline{a_\nu}\,\overline{b_\lambda}^{-1})\,\overline{b_\lambda} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

$$\overline{a_\nu}^{-1} = \sum_{\mu=1}^{n} (\overline{a_\nu}^{-1}\,\overline{b_\mu})\,\overline{b_\mu}^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Aus (39), (40), (35), Th 12, Th 3 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{a_\nu}^{-1})\,\overline{a_\nu} &= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{b_\mu}^{-1}) \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{a_\nu}\,\overline{b_\lambda}^{-1})(\overline{a_\nu}^{-1}\,\overline{b_\mu})\,\overline{b_\lambda} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{b_\mu}^{-1})\,(\overline{b_\lambda}^{-1}\,\overline{b_\mu})\,\overline{b_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{b_\lambda}^{-1})\,\overline{b_\lambda}. \end{aligned} \tag{41}$$

Th 14. Aus (6), (35)—(37) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{a_\nu})\,\overline{a_\nu}^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\rho}\,\overline{b_\nu})\,\overline{b_\nu}^{-1}. \tag{42}$$

Dm. Th 13, Th 4, Th 5, Th 8.

Th 15. Aus (6), (37) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu}^{-1})\,\overline{a_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu})\,\overline{a_\nu}^{-1}. \tag{43}$$

Dm. Th 13, Th 4, Th 5, Th 8.
Th 16. Aus (6), (35)—(37) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu}^{-1})\,\overline{a_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{\rho}\,\overline{b_\nu})\,\overline{b_\nu}^{-1}. \tag{44}$$

Dm. Th 13, Th 15.
Th 17. Aus (6) folgt

$$G(\overline{a_\nu}, a_\nu^{-1})_{\nu=1}^{n}=1. \tag{45}$$

Dm. Sgn 4, Th 3.
Th 18. Aus (6),

$$\overline{p_\mu}, \overline{q_\mu} \in E(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu=1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

folgt

$$G(\overline{p_\nu}, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}\cdot G(\overline{q_\nu}, \overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^{n}=G(\overline{p_\nu}, \overline{q_\nu})_{\nu=1}^{n}. \tag{47}$$

Dm. Aus Th 12 folgt

$$\overline{p_\lambda}\,\overline{q_\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}(\overline{p_\lambda}\,\overline{a_\nu})(\overline{q_\mu}\,\overline{a_\nu}^{-1}) \qquad (\lambda, \mu=1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

Aus (48), Sgn 4 folgt

$$G(\overline{p_\nu}, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n}\; G(\overline{q_\nu}, \overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^{n} \tag{49}$$

$$=\begin{vmatrix} \overline{p_1}\,\overline{a_1} & \overline{p_1}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{p_1}\,\overline{a_n} \\ \overline{p_2}\,\overline{a_1} & \overline{p_2}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{p_2}\,\overline{a_n} \\ \ldots & & & \\ \overline{p_n}\,\overline{a_1} & \overline{p_n}\,\overline{a_2} & \ldots & \overline{p_n}\,\overline{a_n} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \overline{q_1}\,\overline{a_1}^{-1} & \overline{q_1}\,\overline{a_2}^{-1} & \ldots & \overline{q_1}\,\overline{a_n}^{-1} \\ \overline{q_2}\,\overline{a_1}^{-1} & \overline{q_2}\,\overline{a_2}^{-1} & \ldots & \overline{q_2}\,\overline{a_n}^{-1} \\ \ldots & & & \\ \overline{q_n}\,\overline{a_1}^{-1} & \overline{q_n}\,\overline{a_2}^{-1} & \ldots & \overline{q_n}\,\overline{a_n}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \overline{p_1}\,\overline{q_1} & \overline{p_1}\,\overline{q_2} & \ldots & \overline{p_1}\,\overline{q_n} \\ \overline{p_2}\,\overline{q_1} & \overline{p_2}\,\overline{q_2} & \ldots & \overline{p_2}\,\overline{q_n} \\ \ldots & & & \\ \overline{p_n}\,\overline{q_1} & \overline{p_n}\,\overline{q_2} & \ldots & \overline{p_n}\,\overline{q_n} \end{vmatrix}=G(\overline{p_\nu}, \overline{q_\nu})_{\nu=1}^{n}.$$

Th 19. Aus (6),

$$\overline{p_\mu} \in E(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu=1, 2, \ldots, n) \tag{50}$$

folgt

(51) $$G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \cdot G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = G(\overline{p}_\nu)_{\nu=1}^n .$$

Dm. Th 18, Sgn 5.

Th 20. Aus (6) folgt

(52) $$G(\overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = [G(\overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n]^{-1}.$$

Dm. Aus Sgn 5, Th 2, Th 18, Th 17 folgt

(53) $$G(\overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \cdot G(\overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = G(\overline{a}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \cdot G(\overline{a}_\nu^{-1}, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n$$
$$= G(\overline{a}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = 1.$$

Th 21. Aus (6), (46) folgt

54) $$[G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n]^2 = G(\overline{p}_\nu)_{\nu=1}^n \; G(\overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n .$$

Dm. Aus Th 18 folgt

(55) $$G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n = G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \; G(\overline{q}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n$$
$$= G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n \cdot G(\overline{q}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n .$$

Aus (55), Th 19 folgt

(56) $$[G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n]^2$$
$$= G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \; G(\overline{p}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n \; G(\overline{q}_\nu, \overline{a}_\nu)_{\nu=1}^n \; G(\overline{q}_\nu, \overline{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n$$
$$= G(\overline{p}_\nu)_{\nu=1}^n \; G(\overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n .$$

Th 22. Aus (6), (46) folgt

(57) $$G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n = 0$$

genau bei

(58) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Dpn } E$$

oder

(59) $$[\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Dpn } E.$$

Dm. Th 21, Th 1, Sgn 1, Sgn 2.

Sgn 7. $[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \uparrow\uparrow [\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n$ sgn: $G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n > 0$ bei (6), (46).

Sgn 8. $[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \uparrow\downarrow [\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n$ sgn: $G(\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu)_{\nu=1}^n < 0$ bei (6), (46).

Th 23. Aus (6), (46),

(60) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \uparrow\uparrow [\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n$$

oder

(61) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \uparrow\downarrow [\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n$$

folgt

(62) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Ind } E$$

und

(63) $$[\overline{q_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } E.$$

Dm. Sgn 7, Sgn 8, Th 22, Sgn 1, Sgn 2.

Df 4. Die Reperen $[\overline{p_\nu}]_{\nu=1}^{n}$, $[\overline{q_\nu}]_{\nu=1}^{n}$ nennt man *gleich orientiert* bei (60) und *verschieden orientiert* bei (61).

Th 24. Aus (6) folgt

(64) $$[\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n} \uparrow\uparrow [\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n}.$$

Dm. Sgn 7, Sgn 5, Th 1.

Th. 25. Aus (6), (46), (60),

(65) $$\overline{r_\mu} \in E(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

(66) $$[\overline{q_\nu}]_{\nu=1}^{n} \uparrow\uparrow [\overline{r_\nu}]_{\nu=1}^{n}$$

folgt

(67) $$[\overline{p_\nu}]_{\nu=1}^{n} \uparrow\uparrow [\overline{r_\nu}]_{\nu=1}^{n}.$$

Dm Aus (46), (65), Th 18 folgt

(68) $$G(\overline{p_\nu}, \overline{r_\nu})_{\nu=1}^{n} = G(\overline{p_\nu}, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \; G(\overline{r_\nu}, \overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^{n},$$

(69) $$G(\overline{q_\nu}, \overline{r_\nu})_{\nu=1}^{n} = G(\overline{q_\nu}, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^{n} \; G(\overline{r_\nu}, \overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^{n}.$$

Aus (68), (69), Th 18, Th 19 folgt

(70) $$G(\overline{q_\nu})_{\nu=1}^{n} \; G(\overline{p_\nu}, \overline{r_\nu})_{\nu=1}^{n} = G(\overline{p_\nu}, \overline{q_\nu})_{\nu=1}^{n} \; G(\overline{q_\nu}, \overline{r_\nu})_{\nu=1}^{n}.$$

Aus (70), (60), (66), Th 23, Th 1, Sgn 7 folgt (67).

Th 26. Aus (6), (46), (65), (60),

(71) $$[\overline{q_\nu}]_{\nu=1}^{n} \uparrow\downarrow [\overline{r_\nu}]_{\nu=1}^{n}$$

folgt

(72) $$[\overline{p_\nu}]_{\nu=1}^{n} \uparrow\downarrow [\overline{r_\nu}]_{\nu=1}^{n}.$$

Dm. Aus (70), (60), (71), Th 23, Th 1, Sgn 8 folgt (72).

Th 27. Aus

(73) $$[\overline{a_\nu}]_{\nu=1}^{n} \text{ sgn: Ind } E_n,$$

(74) $$\overline{a} \in E_n$$

folgt (16).

Dm. Th 6.

Th 28. Aus (73), (74) folgt (19).

Dm. Th 7.

Th 29. Aus (73), (74), (11) folgt (24) genau bei (25).

Dm. Th 9.

Th 30. Aus (73), (74) folgt (27) genau bei (28).

Dm. Th 10.

Th 31. Aus (73),

(75) $$\overline{p}, \overline{q} \in E_n$$

folgt (34).

Dm. Th 12.

Th 32. Aus (73),

(76) $$\overline{p}_\nu, \overline{q}_\nu \in E_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt (47).

Dm. Th 18.

Th 33. Aus (73),

(77) $$\overline{p}_\nu \in E_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt (51).

Dm. Th 19.

Th 34. Aus (76) folgt (54).

Dm. Th 21.

Th 35. Aus (76) folgt (57) genau bei

(78) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Dpn } E_n$$

oder

(79) $$[\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Dpn } E_n.$$

Dm. Th 22.

Th 36. Aus (76), (60) oder (61) folgt

(80) $$[\overline{p}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Ind } E_n$$

oder

(81) $$[\overline{q}_\nu]_{\nu=1}^n \text{ sgn: Ind } E_n.$$

Dm. Th 23.

Th 37. Aus (76),

(82) $$\overline{r}_\nu \in E_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(60), (66) folgt (67).

Dm. Th 25.

Th 38. Aus (76), (82), (60), (71) folgt (72).

Dm. Th 26.

Bei

(83) $$\overline{a}_\nu \in V \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

(84) $$\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 \neq 0,$$

(85) $$\overline{a}_{\nu+3} = \overline{a}_\nu \qquad (\nu = 1, 2),$$

es sei

(86) $$\tilde{a}_\nu = \frac{\overline{a}_{\nu+1} \times \overline{a}_{\nu+2}}{\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3} \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Th 39. Aus (83) — (86) folgt

(87) $$\bar{a}_\mu \tilde{a}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

Dm. Klar
Th. 40. Aus (83) — (85) folgt

(88) $$\bar{a}_\nu^{-1} = \frac{\bar{a}_{\nu+1} \times \bar{a}_{\nu+2}}{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{a}_3} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

Dm. Th 39, Th 3, Th 29.
Th 41. Aus (83),

(89) $$\bar{b}_\nu \in V \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

folgt

(90) $$G(\bar{a}_\nu, \bar{b}_\nu)_{\nu=1}^3 = (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{a}_3)(\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 . \bar{b}_3).$$

Dm. Aus

(91) $$\bar{a}, \ \bar{b}, \ \bar{c}, \ \bar{d} \in V$$

folgt

(92) $$(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \times \bar{b} . \bar{d})\bar{c} - (\bar{a} \times \bar{b} . \bar{c})\bar{d}$$
$$= (\bar{a} . \bar{c} \times \bar{d})\bar{b} - (\bar{b} . \bar{c} \times \bar{d})\bar{a} .$$

Aus (92) folgt

(93) $$(\bar{a} \times \bar{b} . \bar{c})\bar{d} = (\bar{b} \times \bar{c} . \bar{d})\bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a} . \bar{d})\bar{b} + (\bar{a} \times \bar{b} . \bar{d})\bar{c} .$$

Aus (83), (89), (93) folgt

(94) $$(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{a}_3)\bar{b}_1 \times \bar{b}_2$$
$$= (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3 . \bar{b}_1 \times \bar{b}_2)\bar{a}_1 + (\bar{a}_3 \times \bar{a}_1 . \bar{b}_1 \times \bar{b}_2)\bar{a}_2 + (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{b}_1 \times \bar{b}_2)\bar{a}_3$$
$$= \begin{vmatrix} \bar{a}_2 \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \bar{b}_2 \\ \bar{a}_3 \bar{b}_1 & \bar{a}_3 \bar{b}_2 \end{vmatrix} \bar{a}_1 + \begin{vmatrix} \bar{a}_3 \bar{b}_1 & \bar{a}_3 \bar{b}_2 \\ \bar{a}_1 \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \bar{b}_2 \end{vmatrix} \bar{a}_2 + \begin{vmatrix} \bar{a}_1 \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \bar{b}_2 \\ \bar{a}_2 \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \bar{b}_2 \end{vmatrix} \bar{a}_3 .$$

Aus (94), Sgn 4 folgt (90).
Th 42. Aus (83) folgt

(95) $$G(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^3 = (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 . \bar{a}_3)^2.$$

Dm. Th 41, Sgn 5.
Th 43. Aus (84) folgt

(96) $$[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^3 \ \text{sgn} : \text{Ind}\ V.$$

Dm. Th 42, Th 1.
Th 44. Aus (83), (89) folgt

(97) $$[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^3 \uparrow\uparrow [\bar{b}_\nu]_{\nu=1}^3$$

genau bei

(98) $$(\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 . \overline{a}_3)(\overline{b}_1 \times \overline{b}_2 . \overline{b}_3) > 0 .$$

Dm. Sgn 7, Th 41.

Th 45. Aus (83), (89) folgt

(99) $$[\overline{a}_\nu]_{\nu=1}^{n} \uparrow\downarrow [\overline{b}_\nu]_{\nu=1}^{3}$$

genau bei

(100) $$(\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 . \overline{a}_3)(\overline{b}_1 \times \overline{b}_2 . \overline{b}_3) < 0 .$$

Dm. Sgn 8, Th 41.

Th 46. Aus (83), (84),

(101) $$\overline{r} \in V$$

folgt

(102) $$\overline{r} = \sum_{\nu=1}^{3} (\overline{r}\ \overline{a}_\nu^{-1})\, \overline{a}_\nu .$$

Dm. Th 27, Th 43.

Th 47. Aus (83), (84), (101) folgt

(103) $$\overline{r} = \sum_{\nu=1}^{3} (\overline{r}\ \overline{a}_\nu)\, \overline{a}_\nu^{-1}$$

Dm. Th 28, Th 43.

Th 48. Aus (83), (84), (101),

(104) $$\alpha_\nu \in R \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

folgt

(105) $$\overline{r}\ \overline{a}_\nu = \alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

genau bei

(106) $$\overline{r} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \overline{a}_\nu^{-1} ,$$

Dm. Th 29, Th 43.

Th 49. Aus (83), (84), (101) folgt

(107) $$\overline{r}\ \overline{a}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

genau bei

(108) $$\overline{r} = 0 .$$

Dm. Th 30, Th 43.

Th 50. Aus

(109) $$\overline{a}_\nu \in V \qquad (\nu = 1, 2),$$

(110) $$\overline{b}_\nu \in V \qquad (\nu = 1, 2)$$

folgt: die Bedingung

(111) $$\overline{a}_\mu \overline{b}_\nu + \overline{a}_\nu \overline{b}_\mu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2)$$

ist notwendig, damit das System Vektorgleichungen

(112) $$\bar{r}\times\bar{a}_\nu=\bar{b}_\nu \qquad (\nu=1,2)$$

eine Lösung (101) hat.

Dm. Aus (112) folgt

(113) $$\bar{a}_\mu\bar{b}_\nu+\bar{a}_\nu\bar{b}_\mu=\bar{r}\times\bar{a}_\nu\,.\,\bar{a}_\mu+\bar{r}\times\bar{a}_\mu\,.\,\bar{a}_\nu=\bar{r}\,.\,\bar{a}_\nu\times\bar{a}_\mu+\bar{r}\,.\,\bar{a}_\mu\times\bar{a}_\nu$$

$$=\bar{r}\,.\,(\bar{a}_\nu\times\bar{a}_\mu+\bar{a}_\mu\times\bar{a}_\nu)=\bar{r}\,.\,\bar{o}=0 \qquad (\mu,\nu=1,2).$$

Th 51. Aus (83), (89) folgt: die Bedingung

(114) $$\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu+\bar{a}_\nu\,\bar{b}_\mu=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3)$$

ist notwendig, damit das System Vektorgleichungen

(115) $$\bar{r}\times\bar{a}_\nu=\bar{b}_\nu \qquad (\nu=1,2,3)$$

eine Lösung (101) hat.

Dm. Th 50.

Th 52. Aus (83), (84), (89), (114) folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (115) ist

(116) $$\bar{r}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\bar{b}_\nu\,.$$

Dm. Aus (116), (114), Th 3, Th 47 folgt

(117) $$\bar{r}\times\bar{a}_\mu=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\nu^{-1}\times\bar{b}_\nu)\times\bar{a}_\mu=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\nu^{-1}\,\bar{a}_\mu)\,\bar{b}_\nu$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}_\nu\bar{a}_\mu)\,\bar{a}_\nu^{-1}=\frac{1}{2}\bar{b}_\mu+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{b}_\mu\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\bar{b}_\mu+\frac{1}{2}\bar{b}_\mu=\bar{b}_\mu \qquad (\mu=1,2\ 3).$$

Aus (115), Th 3, Th 46 folgt

(118) $$\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times\bar{b}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu^{-1}\times(\bar{r}\times\bar{a}_\nu)=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\nu^{-1}\,\bar{a}_\nu)\,\bar{r}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\nu^{-1}\,\bar{r})\,\bar{a}_\nu=3\bar{r}-\bar{r}=2\bar{r}.$$

Aus (118) folgt (116).

Th. 53. Aus (83), (84), (89), (114) folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (115) ist

(119) $$\bar{r}=\frac{1}{\bar{a}_1\times\bar{a}_2\,.\,\bar{a}_3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_{\nu+2}\,\bar{b}_{\nu+1})\,\bar{a}_\nu$$

bei (85) und

(120) $$\vec{b}_{\nu+3}=\vec{b}_\nu \qquad (\nu=1,2).$$

Dm. Th 52 und: aus (115), Th 46, Th 40 folgt

(121) $$\bar{r}=\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\bar{r}\cdot\bar{a}_{\nu+1}\times\bar{a}_{\nu+2}}{\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3}\,\bar{a}_\nu$$

$$=\frac{1}{\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{r}\times\bar{a}_{\nu+1}\cdot\bar{a}_{\nu+2})\,\bar{a}_\nu$$

$$=\frac{1}{\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_{\nu+2}\,\bar{b}_{\nu+1})\,\bar{a}_\nu.$$

Th 54. Aus (109) — (111),

(122) $$\bar{a}_1\times\bar{a}_2\neq\bar{o}$$

folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (112) ist) (116) bei

(123) $$\bar{a}_3=\bar{a}_1\times\bar{a}_2,$$

(124) $$\bar{b}_3=\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{b}_1\times\bar{a}_2.$$

Dm. Aus (111), (123), (124) folgt

(125) $$\bar{a}_\nu\,\bar{b}_3+\bar{a}_3\,\bar{b}_\nu=\bar{a}_\nu(\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{b}_1\times\bar{a}_2)+\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot\bar{b}_\nu=0 \qquad (\nu=1,2)$$

(126) $$\bar{a}_3\,\bar{b}_3=\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot(\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{b}_1\times\bar{a}_2)=a_1^2(\bar{a}_2\,\bar{b}_2)-(\bar{a}_1\,\bar{a}_2)(\bar{a}_1\,\bar{b}_2)$$

$$+a_2^2(\bar{a}_1\,\bar{b}_1)-(\bar{a}_1\,\bar{a}_2)(\bar{a}_2\,\bar{b}_1)=-(\bar{a}_1\,\bar{a}_2)(\bar{a}_1\,\bar{b}_2+\bar{a}_2\,\bar{b}_1)=0,$$

d. h. (114).

Aus (122), (123) folgt

(127) $$\bar{a}_1\times\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3=(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)^2\neq 0.$$

Aus (127) (111), (125), (126), Th 52 folgt: (116) mit (123), (124) ist eine Lösung des Systems Vektorgleichungen (115) mit (123), (124), d. h. es ist eine Lösung des Systems (112).

Aus

(128) $$\bar{r}_\mu\times\bar{a}_\nu=\bar{b}_\nu \qquad (\mu,\ \nu=1,2),$$

(129) $$\bar{\rho}=\bar{r}_1-\bar{r}_2$$

folgt

(130) $$\bar{\rho}\times\bar{a}_\nu=\bar{0} \qquad (\nu=1,2).$$

Aus (130), (122) folgt $\bar{\rho}=\bar{0}$, d. h. $\bar{r}_1=\bar{r}_2$ wegen (129); also (116) mit (123), (124) ist die einzige Lösung des Systems (112).

Th 55. Aus (109) — (111), (122) folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (112) ist

$$\bar{r}=\frac{1}{(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)^2}\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_{\nu+2}\,\bar{b}_{\nu+1})\,\bar{a}_\nu \tag{131}$$

bei (123), (124), (85), (120).

Dm. Th 54, Th 53.

Th 56. Aus (109) — (111), (122) folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (112) ist

$$\bar{r}=\frac{1}{(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)^2}[(\bar{a}_1\times\bar{a}_2\,.\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1+(\bar{a}_2\times\bar{a}_1\,.\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_2-(\bar{a}_2\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2]. \tag{132}$$

Dm. Th 55, (123), (124).

Th 57. Aus (109) — (111), (122) folgt: die einzige Lösung (101) des Systems Vektorgleichungen (112) ist

$$\bar{r}=\bar{a}_1^{-1}\times\bar{b}_1+\bar{a}_2^{-1}\times\bar{b}_2+(\bar{a}_1\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_3^{-1}. \tag{133}$$

bei (123).

Dm. Th 56 und: aus

$$\begin{aligned}(\bar{a}_1\times\bar{a}_2\,.\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1&\mp(\bar{a}_2\times\bar{a}_1\,.\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_2+(\bar{a}_2\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2\\&=[(\bar{a}_2\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2-(\bar{a}_1\times\bar{a}_2\,.\,\bar{b}_1)\,\bar{a}_2]+[(\bar{a}_1\times\bar{a}_2\,.\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1-(\bar{a}_1\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2]\\&\quad+(\bar{a}_1\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2=[\bar{a}_2\times(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)]\times\bar{b}_1+[(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)\times\bar{a}_1]\times\bar{b}_2\\&\quad+(\bar{a}_1\,\bar{b}_2)\,\bar{a}_1\times\bar{a}_2,\end{aligned} \tag{134}$$

(123), (88), (132) folgt (133).

2. Wenn $r\in H$ eine Funktion von t ist, definiert und beliebig vielmal differentierbar für jeden reellen Wert von t werden wir schreiben:

$$\bar{r}=r(t)\in H. \qquad (t\in T) \tag{135}$$

Insbesondere ist es klar was z. B.

$$\bar{r}=\bar{r}(t)\in E_n \qquad (t\in T) \tag{136}$$

bedeutet.

Es sei

$$\alpha=\{\bar{a},[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{n}\}, \tag{137}$$

wobei

$$\bar{a}=\bar{a}(t)\in H \qquad (t\in T), \tag{138}$$

$$\bar{a}_\nu=\bar{a}_\nu(t)\in H \qquad (\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T), \tag{139}$$

$$[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{n}\ \text{sgn: Ind}\ H \qquad (t\in T). \tag{140}$$

Dann:

Sgn 9. S_n sgn: $\{\alpha : (137) - (140)\}$.

Df 5. Die Elemente von S_n nennt man *n-dimensionale affine Koordinatensysteme* im Hilbertschen Raum H.

Sgn 10. α^{-1} sgn: $\{\bar{a}, [\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^n\}$ bei (137).

Th 58. Aus (137),

(141) $$\alpha \in S_n$$

folgt

(142) $$\alpha^{-1} \in S_n.$$

Dm. Sgn. 9, Sgn 10, Sgn 4 — Sgn 6, Th 4.

Df 6. α^{-1} nennt man *reziprok* zu α.

Sgn 11. $\bar{r} \mathrel{Z} \alpha$ sgn: (135), (137), (141),

(143) $$r - \bar{a} \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (t \in T);$$

(144) $$\frac{d}{dt}[(r-a)\bar{a}_\nu^{-1}] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n; t \in T).$$

Df 7. Bei (135), (141), $\bar{r} \mathrel{Z} \alpha$ sagt man, daß $\bar{r}$ mit α *inzident* ist.

Th 59. Aus (137), (141) folgt

(145) $$\bar{a} \mathrel{Z} \alpha,$$

(146) $$\bar{a}_\nu + \bar{a} \mathrel{Z} \alpha \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dm. Sgn 11, Sgn 3, Th 3.

Sgn 12, $\alpha \sim \beta$ sgn: (137), (141),

(147) $$\beta \in S_n,$$

(148) $$\bar{a} \mathrel{Z} \beta,$$

(149) $$\bar{a}_\nu + \bar{a} \mathrel{Z} \beta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Df 8. Das affine Koordinatensystem α nennt man dem affinen Koordinatensystem β *äquivalent* genau bei (141), (147),

Th 60. Aus (141) folgt

(150) $$\alpha \sim \alpha.$$

Dm. Sgn 12, Th 59.

Th 61. Aus (137), (141)

(151) $$\beta = \{\bar{b}, [\bar{b}_\nu]_{\nu=1}^n\}$$

(147) folgt:

(152) $$\alpha \sim \beta$$

genau bei

(153) $$\bar{a} - \bar{b} \in H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (t \in T),$$

$$\frac{d}{dt}[(\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T), \tag{154}$$

$$\bar{a}_\mu \in H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu=1,2,\ldots,n;\ t\in T), \tag{155}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1})=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{156}$$

Dm. Wegen Sgn 11, Sgn 12 die Definitionsbedingungen für (152) sind (153), (154) und

$$\bar{a}_\mu+\bar{a}-\bar{b}\in H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu=1,2,\ldots,n;\ t\in T), \tag{157}$$

$$\frac{d}{dt}[(\bar{a}_\mu+\bar{a}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{158}$$

Aus (153), Sgn 3 folgt die Äquivalenz von (155), (157); aus (154), Sgn 3 folgt die Äquivalenz von (156), (158).

Th 62. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}=H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t\in T) \tag{159}$$

Dm. Sgn 3, (155), (140).

Th 63. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$\bar{b}-\bar{a}\in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t\in T). \tag{160}$$

Dm. (153), Th 62, Sgn 3.

Th 64. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$\bar{b}_\mu \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{161}$$

Dm. Th 62, Sgn 3.

Th 65. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$\frac{d}{dt}(\bar{b}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1})=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{162}$$

Dm. Aus Th 62, Th 5, Th 12 folgt

$$\bar{a}_\lambda^{-1}\bar{a}_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{a}_\lambda^{-1}\bar{b}_\nu)(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1}) \qquad (\lambda,\mu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{163}$$

Aus (163), Th 3, (156) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{a}_\mu\,\bar{b}_\nu^{-1})\frac{d}{dt}(\bar{a}_\lambda^{-1}\bar{b}_\nu)=0 \qquad (\lambda,\mu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{164}$$

Bei fixiertem $\lambda=1,2,\ldots,n$ stellen die Gleichungen (164) ein lineares homogenes Gleichungssystem dar in bezug auf die Ableitungen

(165) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\lambda^{-1}\bar{b}_\nu) \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T)$$

mit der Determinante

(166) $$G(\bar{a}_\nu, \bar{b}_\nu^{-1})_{\nu=1}^{n} \neq 0 \qquad (t \in T)$$

wegen (140), Th 5, Th 62, Th 22. Daraus folgt (162).

Th 66. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

(167) $$\frac{d}{dt}[(\bar{b}-\bar{a})\bar{a}_\nu^{-1}] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T).$$

Dm. Aus (153), Th 5, Th 62, Th 12 folgt

(168) $$(\bar{b}-\bar{a})\bar{a}_\mu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\bar{b}_\nu^{-1}](\bar{a}_\mu^{-1}\bar{b}_\nu) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T).$$

Aus (168), (154), (162) folgt (167).

Th 67. Aus (141), (147), (152) folgt

(169) $$\beta \sim \alpha.$$

Dm. Th 61, Th 63 — Th 66.

Th 68. Aus (137), (141), (151), (147), (152),

(170) $$\gamma = \{\bar{c},\ [\bar{c}_\nu]_{\nu=1}^{n}\},$$

(171) $$\gamma \in S_n,$$

(172) $$\beta \sim \gamma$$

folgt

(173) $$\bar{a}-\bar{c} \in H(\bar{c}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T).$$

Dm. Aus (151), (147), (170) — (172), Th 62 folgt

(174) $$H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} = H(\bar{c}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T).$$

Aus (137), (141), (151), (147), (152), Th 61 folgt (153). Aus (151), (147)' (170)—(172), Th 61 folgt

(175) $$\bar{b}-\bar{c} \in H(\bar{c}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T).$$

Aus (153), (174), (175),

(176) $$\bar{a}-\bar{c} = (\bar{a}-\bar{b}) + (\bar{b}-\bar{c})$$

Sgn 3 folgt (173).

Th 69. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (170)—(172) folgt

(177) $$\bar{a}_\mu \in H(\bar{c}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T).$$

Dm. Aus (137), (141), (151), (147), (152), Th 61 folgt (155). Aus (155), (174) folgt (177).

Th 70. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (170)—(172) folgt

$$\frac{d}{dt}(\overline{a}_\mu \overline{c}_\nu^{-1}) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n; t \in T). \tag{178}$$

Dm. Aus Th 62, (174), Th 5, Th 12 folgt

$$\overline{a}_\lambda \overline{c}_\mu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{a}_\lambda \overline{b}_\nu^{-1})(\overline{c}_\mu^{-1} \overline{b}_\nu) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n; t \in T). \tag{179}$$

Aus (172), Th 61 folgt

$$\frac{d}{dt}(\overline{b}_\nu \overline{c}_\mu^{-1}) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n; t \in T). \tag{180}$$

Aus (179), (156), (180) folgt (178).

Th 71. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (170)—(172) folgt

$$\frac{d}{dt}[(\overline{a} - \overline{c})\,\overline{c}_\nu^{-1}] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T). \tag{181}$$

Dm. Aus Th 61 folgt (153). Aus (174), (175) folgt

$$\overline{b} - \overline{c} \in H(\overline{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T). \tag{182}$$

Aus (153), (182), (176) folgt

$$a - c \in H(\overline{b}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T). \tag{183}$$

Aus (183), (174), Th 12, (176) folgt

$$(a - \overline{c})\,\overline{c}_\mu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} [(\overline{a} - \overline{c})\overline{b}_\nu^{-1}](\overline{c}_\mu^{-1}\overline{b}_\nu) \tag{184}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [(a-b)\,b_\nu^{-1}]\,(\overline{c}_\mu^{-1}\,b_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} [(\overline{b} - c)\,\overline{b}_\nu^{-1}]\,(\overline{c}_\mu^{-1}\,b_\nu)$$

$(\mu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T)$. Aus (172), Th 67 folgt

$$\gamma \sim \beta. \tag{185}$$

Aus (185), (151), (147), (170), (171), Th 61 folgt

$$\frac{d}{dt}[(c-b)\,b_\nu^{-1}] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T). \tag{186}$$

Aus (184), (154), (186), (180) folgt (181).

Th 72. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (170)—(172) folgt

(187) $$\alpha \sim \gamma.$$

Dm. Th. 61, Th 68, Th 71.

Th 73. Die Relation, definiert durch Sgn 12, ist eine Äquivalenzrelation in S_n.

Dm. Th 60, Th 67, Th 72.

3. Es seien P_n, Q_n $(n=1, 2,...)$ Primärmengen, die den folgenden Axiomen genügen:

Ax 1. $P_n \subset S_n \times Q_n$.

Ax 2. Aus $s \in S_n$ folgt: es existiert ein $q \in Q_n$ mit $(s, q) \in R_n$.

Ax 3. Aus $(s_\nu, q_\nu) \in R_n$ $(\nu=1, 2)$, $s_1 \sim s_2$ folgt $q_1 = q_2$.

Ax 4. Aus $q \in Q_n$ folgt: es existiert ein $s \in S_n$ mit $(s, q) \in R_n$.

Ax 5. Aus $(s_\nu, q) \in R_n$ $(\nu=1, 2)$ folgt $s_1 \sim s_2$.

$S_n \times Q_n$ in Ax 1 bezeichnet das Descartessche Produkt von S_n, Q_n.

Df 9. Die Elemente der Menge Q_n nennt man *n-dimensionale affine Körper* im Hilbertschen Raum H.

Die mathematische Theorie, welche auf Grund der Axiomen Ax 1 – Ax 5 aufgebaut wird, ist die Kinematik der n-dimensionalen affinen Körper im Hilbertschen Raum H. Der Prozeß ihres Aufbaus besteht in dem Feststellen der Invarianzeigenschaften der Äquivalenzrelation $\sim$ in der Menge S_n.

4. Th 74. Aus (141), (147), (152), (135),

(188) $$\bar{r} \not\sim \bar{\alpha}$$

folgt

(189) $$\bar{r} \not\sim \bar{\beta}.$$

Dm. Bei (137) aus (188) folgt (143), (144). Bei (151) ist die Relation (189) äquivalent mit

(190) $$\bar{r} - \bar{b} \in H(\bar{b}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (t \in T).$$

(191) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\nu=1, 2,.., n;\ t \in T).$$

Aus (143), Th 63, Th 62,

(192) $$\bar{r}-\bar{b}=(\bar{r}-\bar{a})+(\bar{a}-\bar{b}),$$

Sgn 3 folgt (190). Aus (190), Th 62 folgt

(193) $$\bar{r}-\bar{b} \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (t \in T),$$

Aus (193), Th 5, Th 62, (192) folgt

(194) $$(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\mu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} [(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{a}_\nu^{-1}](\bar{b}_\mu^{-1}\,\bar{a}_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}](\bar{b}_\mu^{-1}\,\bar{a}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} [(\bar{a}-\bar{b})\,\bar{a}_\nu^{-1}](\bar{b}_\mu^{-1}\,\bar{a}_\nu)$$

($\mu = 1, 2, \ldots, n$; $t \in T$). Aus (194), (144), Th 67, Th 61 folgt (191).

Th 75. Aus (141), (147), (135),

(195) aus $\bar{r} Z \alpha$ folgt $\bar{r} Z \beta$

folgt (152).

Dm. Bei (137) aus (195), Th 59 folgt (148), (149). Dann folgt (152) aus Sgn 12.

Aus (141), (147), (152),

(196) $(\alpha, q) \in R_n$

nach Ax 2 folgt

(197) $(\beta, q) \in R_n$

nach Ax 3. Aus

(198) $q \in Q_n$,

(196), (197) nach Ax 4 folgt (152) nach Ax. 5. Th 74, Th 75 geben Anlaß zu:

Sgn 13. $\bar{r} Z q$ sgn: (198), (135), (196), (188).

Df 10. Bei (198), (135),

(199) $\bar{r} Z q$,

$\bar{r}$ nennt man einen *Punkt* von q.

Th 76. Aus (198), (196), (137) folgt

(200) $\bar{a} Z q$,

(201) $\bar{a}_\nu + \bar{a} Z q$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Dm. Sgn 13, Th 59.

Th 77. Aus (141), (135), $m \leqq n$,

(202) $\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu(t) \in H$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m;\ t \in T)$,

(203) $\bar{r}_\nu Z \alpha$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$,

(204) $\bar{\rho}_\nu = \bar{r}_\nu - \bar{r}_0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m;\ t \in T)$,

(205) $[\bar{\rho}_\nu]_{\nu=1}^m$ sgn: Ind H $(t \in T)$,

(206) $\rho = \{\bar{r}_0, [\bar{\rho}_\nu]_{\nu=1}^m\}$ $(t \in T)$,

(207) $\bar{r} Z \rho$

folgt

(208) $\bar{r} Z \alpha$.

Dm. Aus (206), (202), (204), (205), Sgn 9 folgt

(209) $\rho \in S_m$.

Bei (137) aus (141), (202), (203), Sgn 11 folgt

(210) $$\bar{r}_\mu - \bar{a} \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m;\ t \in T),$$

(211) $$\frac{d}{dt}\,[(\bar{r}_\mu - \bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}] = 0$$

$(\mu = 0, 1, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T)$.

Aus (206), (209), (135), (207), Sgn 11 folgt

(212) $$\bar{r} - \bar{r}_0 \in H(\bar{\rho}_\nu)_{\nu=1}^{m} \qquad (t \in T),$$

(213) $$\frac{d}{dt}\,[(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\rho}_\mu^{-1}] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ t \in T).$$

Aus (210), (204), Sgn 3 folgt

(214) $$\bar{\rho}_\mu \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ t \in T),$$

(215) $$\frac{d}{dt}\,(\bar{\rho}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1}) = 0$$

$(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T)$.

Aus (212), (214), Sgn 3 folgt

(216) $$\bar{r} - \bar{r}_0 \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t \in T).$$

Aus

(217) $$\bar{r} - \bar{a} = (\bar{r} - \bar{r}_0) + (\bar{r}_0 - \bar{a})$$

(210) (216), Sgn 3 folgt (143). Aus (214), Th 6 folgt

(218) $$\bar{\rho}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}{}' (\bar{\rho}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ t \in T).$$

Aus (212), Th 6 folgt

(219) $$\bar{r} - \bar{r}_0 = \sum_{\mu=1}^{m} [(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\rho}_\mu^{-1}]\,\bar{\rho}_\mu \qquad (t \in T).$$

Aus (218), (219) folgt

(220) $$\bar{r} - \bar{r}_0 = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} [(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\rho}_\mu^{-1}]\,(\bar{\rho}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu \qquad (t \in T).$$

Aus (220), Th 3 folgt

(221) $$(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{a}_\nu^{-1} = \sum_{\mu=1}^{n} [(\bar{r} - \bar{r}_0)\,\bar{\rho}_\mu^{-1}]\,(\bar{\rho}_\mu\,\bar{a}_\nu^{-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T).$$

Aus (221), (217), (211), (213), (215) folgt (144). Aus (143), (144), Sgn 11 folgt (208).

Th 78. Aus (141), $m = n$, (202)—(206) folgt $\rho \sim \alpha$.

Dm. Th 77, Th 75.

5. Th 79. Aus (137), (141), (151), (147), (152),

(222) $$\bar{\rho} = \bar{\rho}(t) \in H \qquad (t \in T)$$

folgt

(223) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^i} \frac{d^k a_\nu}{dt^k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\nu^{-1})}{dt^i} \frac{d^k b_\nu}{dt^k}$$

$(i, k = 0, 1, \ldots; t \in T)$.

Dm. Aus Sgn 9, Th 62, Th 13 folgt (39), (40). Aus (39), (40), (152), Th 67, Th 61 folgt

(224) $$\frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^i} = \sum_{\mu=1}^{n} (\bar{a}_\nu^{-1} b_\mu) \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\mu^{-1})}{dt^i},$$

(225) $$\frac{d^k a_\nu}{dt^k} = \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\nu b_\lambda^{-1}) \frac{d^k b_\lambda}{dt^k}$$

$(i, k = 0, 1, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots, n; t \in T)$. Aus (224), (225), Th 67, Th 61, Th 12, Th 3 folgt

(226) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^i} \frac{d^k a_\nu}{dt^k}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\mu^{-1})}{dt^i} \frac{d^k b_\lambda}{dt^k} \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{a}_\nu^{-1} b_\mu)(\bar{a}_\nu b_\lambda^{-1})$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{d^i(\rho\, b_\mu^{-1})}{dt^i} \frac{d^k b_\lambda}{dt^k} (\bar{b}_\mu \bar{b}_\lambda^{-1}) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{d^i(\rho\, b_\lambda^{-1})}{dt^i} \frac{d^k b_\lambda}{dt^k}.$$

$(i, k = 0, 1, \ldots; t \in T)$.

Th 80. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (222) folgt

(227) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\rho\, a_\nu)}{dt^i} \frac{d^k a_\nu^{-1}}{dt^k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\rho\, b_\nu)}{dt^i} \frac{d^k b_\nu^{-1}}{dt^k}.$$

$(i, k = 0, 1, \ldots; t \in T)$.

Dm. Aus Sgn 9, Th 62, Th 13 folgt (39), (40). Aus (39), (40), (152), Th 67, Th 61 folgt

(228) $$\frac{d^i(\bar{\rho}\, a_\nu)}{dt^i} = \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\nu b_\lambda^{-1}) \frac{d^i(\rho\, b_\lambda)}{dt^i},$$

(229) $$\frac{d^k a_\nu^{-1}}{dt^k} = \sum_{\mu=1}^{n} (a_\nu^{-1} b_\mu) \frac{d^k b_\mu^{-1}}{dt^k}$$

$(i, k=0, 1,\ldots;\ \nu=1, 2,\ldots, n;\ t \in T)$. Aus (228), (229), Th 67, Th 61, Th 12, Th 3 folgt

$$(230)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu)}{dt^i}\,\frac{d^k \bar{a}_\nu^{-1}}{dt^k}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\lambda)}{dt^i}\,\frac{d^k \bar{b}_\mu^{-1}}{dt^k} \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{a}_\nu \bar{b}_\lambda^{-1})\,(\bar{a}_\nu^{-1} b_\mu)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\lambda)}{dt^i}\,\frac{d^k \bar{b}_\mu^{-1}}{dt^k}\,(\bar{b}_\lambda^{-1} b_\mu) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{d^i(\bar{\rho}\,\bar{b}_\lambda)}{dt^i}\,\frac{d^k \bar{b}_\lambda^{-1}}{dt^k}$$

$(i, k=0, 1,\ldots;\ t \in T)$.

Sgn 14. $\left(\frac{\delta^m \bar{\rho}}{\delta t^m}\right)_q$ sgn: $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^m(\rho\, a_\nu^{-1})}{dt^m}\, a_\nu$

bei (137), (141), (198), (196), (222), $m=0, 1,\ldots;\ t \in T$.

Df 11. $\left(\frac{\delta^m \bar{\rho}}{\delta t^m}\right)_q$ nennt man *m-te Lokalableitung* von ρ in bezug auf q.

Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreibt man $\frac{\delta^m \bar{\rho}}{\delta t^m}$ anstatt $\left(\frac{\delta^m \bar{\rho}}{\delta t^m}\right)_q$.

Th 81. Aus (222) (198), folgt

$$(231)\qquad \left(\frac{\delta^{m+1} \bar{\rho}}{\delta t^{m+1}}\right)_q = \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta^m \rho}{\delta t^m}\right)_q\right]_q \qquad (m=1, 2,\ldots,\ ;\ t \in T).$$

Dm. Sgn 14.

6. Th 82. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (135), (188) folgt

$$(232)\qquad \bar{a} + \sum_{\nu=1}^{n} [(r-a)\, a_\nu^{-1}]\, \bar{a}_\nu$$

$$= b + \sum_{\nu=1}^{n} [(r-b)\, b_\nu^{-1}]\, b_\nu \qquad (t \in T).$$

Dm. Bei

$$(233)\qquad \rho = \bar{r} - a$$

aus

$$(234)\qquad r-a = (r-b) + (b-a).$$

Th 13 folgt

(235) $$\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu^{-1}]\,\bar{b}_\nu$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu^{-1}]\,\bar{b}_\nu \qquad (t\in T).$$

Aus (152), Th 61, Sgn 3, Th 6 folgt

(236) $$\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu^{-1}]\,\bar{b}_\nu=\bar{b}-\bar{a} \qquad (t\in T).$$

Aus (235), (236) folgt (232).

Th 83. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (135), (188) folgt

(237) $$\bar{a}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu]\,\bar{a}_\nu^{-1}$$

$$=\bar{b}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1} \qquad (t\in T).$$

Dm. Bei (233) aus (234), Th 14 folgt

(238) $$\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu]\,\bar{a}_\nu^{-1}=\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1} \qquad (t\in T).$$

Aus (152), Th 61, Th 5, Sgn 3, Th 7 folgt

(239) $$\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1}=\bar{b}-\bar{a} \qquad (t\in T).$$

Aus (238), (239) folgt (237).

Th 84. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (135), (188) folgt

(240) $$\bar{a}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu$$

$$=\bar{b}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1} \qquad (t\in T).$$

Dm. Bei (233) aus (234), Th 16 folgt

$$(241)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{b})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{b}-\bar{a})\,\bar{b}_\nu]\,\bar{b}_\nu^{-1}\qquad(t\in T).$$

Aus (152), Th 61, Th 5, Sgn 3, Th 7 folgt (239). Aus (241), (234) folgt (240).

Th 85. Aus (137), (141), (151), (147), (152), (135), (188) folgt

$$(242)\qquad \frac{d^m\bar{a}}{dt^m}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\frac{d^m\bar{a}_\nu}{dt^m}$$

$$=\frac{d^m\bar{b}}{dt^m}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\frac{d^m\bar{b}_\nu}{dt^m}\qquad(m=1,2,\ldots;\ t\in T).$$

Dm. Th 82, Sgn 11.

Th 86. Aus (137), (141), (135), (188) folgt

$$(243)\qquad \frac{d^m\bar{r}}{dt^m}=\frac{d^m\bar{a}}{dt^m}+\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\frac{d^m\bar{a}_\nu}{dt^m}$$

$(m=1,\ 2,\ldots;\ t\in T)$.

Dm. Aus (137), (188), Sgn 11 folgt (143), (144). Aus (143), Th 6 folgt

$$(244)\qquad \bar{r}-\bar{a}=\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu\qquad(t\in T).$$

Aus (244), (144) folgt (243).

Df 12. Die Funktion (243) nennt man *m-te Geschwindigkeit* von $\bar{r}$ bei (137), (141), (135), (188).

Df 13. Die Funktion (243) bei $m=1$ nennt man *Geschwindigkeit* von $\bar{r}$ bei (137), (141), (135), (188).

Df 14. Die Funktion (243) bei $m=2$ nennt man *Beschleunigung* von $\bar{r}$ bei (137), (141), (135), (188).

Th 87. Aus (135), (137), (141), (198), (196) folgt (199) genau bei (143) und

$$(245)\qquad \left[\frac{\delta(\bar{r}-\bar{a})}{\delta t}\right]=0\qquad(t\in T).$$

Dm. Aus (135), (137), (141), (198), (196), Sgn 14 folgt

$$(246)\qquad \left[\frac{\delta(\bar{r}-\bar{a})}{\delta t}\right]_q=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]}{dt}\,\bar{a}_\nu\qquad(t\in T)$$

Aus (246), (137), (141), Sgn 9 folgt (245) genau bei (144). Dann Sgn 11, Sgn 13.

Th 88. Aus (141), (135), $m \leqq n$, (202)—(207),

$$\frac{d r_\nu}{dt} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m;\ t = \tau) \tag{247}$$

folgt

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad (t = \tau). \tag{248}$$

Dm Aus (141), (135), $m \leqq n$, (202)—(207), Th 77 folgt (213), (219). Aus (247), (204) folgt

$$\frac{d \varrho_\nu}{dt} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m;\ t = \tau) \tag{249}$$

Aus (219), (213), (247), (249) folgt (248).

Th 89. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$\frac{d}{dt} G(\overline{a_\nu}, b_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = \frac{d}{dt} G(b_\nu, \overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^n = 0 \qquad (t \in T). \tag{250}$$

Dm Sgn 4, Th 61, Th 65.

Th 90. Aus (137), (141), (151), (147), (152) folgt

$$\frac{dG(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^n}{dt} = \frac{G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^n}{G(\overline{b_\nu})_{\nu=1}^n} \frac{dG(b_\nu)_{\nu=1}^n}{dt} \qquad (t \in T). \tag{251}$$

Dm. Aus Th 62, Th 19 folgt

$$G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^n = G(a_\nu, b_\nu)_{\nu=1}^n\ G(a_\nu, b_\nu^{-1})_{\nu=1}^n \qquad (t \in T), \tag{252}$$

$$G(\overline{b_\nu})_{\nu=1}^n = G(b_\nu, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^n\ G(b_\nu, a_\nu^{-1})_{\nu=1}^n \qquad (t \in T). \tag{253}$$

Aus Sgn 4 folgt

$$G(a_\nu, b_\nu)_{\nu=1}^n = G(b_\nu, \overline{a_\nu})_{\nu=1}^n \qquad (t \in T). \tag{254}$$

Aus (252)—(254) folgt

$$\frac{G(\overline{a_\nu})_{\nu=1}^n}{G(\overline{b_\nu})_{\nu=1}^n} = \frac{G(\overline{a_\nu}, b_\nu^{-1})_{\nu=1}^n}{G(b_\nu, a_\nu^{-1})_{\nu=1}^n} \qquad (t \in T). \tag{255}$$

Aus (255), Th 89 folgt (251).

7. Th 91. Aus (137), (141), (151), (147), (152),

$$\frac{d}{dt} (a_\mu, a_\nu)_{\nu=1}^n = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ t \in T) \tag{256}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(b_\mu b_\nu)_{\nu=1}^{n}=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{257}$$

Dm. Aus (137), (141), Sgn 9, (151), (147), (152), Th **62**, Th 6 folgt

$$b_\varkappa=\sum_{\mu=1}^{n}(b_\varkappa a_\mu^{-1})\,a_\mu \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n;\ t\in T), \tag{258}$$

$$b_\varkappa=\sum_{\nu=1}^{n}(b_\lambda a_\nu^{-1})\,a_\nu \qquad (\lambda=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{259}$$

Aus (258), (259) folgt

$$b_\varkappa b_\lambda=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(b_\varkappa a_\mu^{-1})(b_\lambda a_\nu^{-1})(a_\mu a_\nu) \tag{260}$$

($\varkappa,\lambda=1,2,\ldots,n;\ t\in T$). Aus (259), Th 62, Th 61, (256) folgt (257).

Sgn 15. $\sum_n$ sgn: $\{\alpha$: (137)—(141), (256)$\}$.

Df 15. Die Elemente von $\sum_n$ nennt man *n-dimensionale Euklidische Koordinatensysteme* im Hilbertschen Raum H.

Df 16. Die n-dimensionale affine Körper im Hilbertschen Raum H, die den n-dimensionalen Euklidischen Koordinatensystemen in H entsprechen, nennt man *n-dimensionale Euklidische Körper* im Hilbertschen Raum H.

Sgn 16. K_n sgn: Q_n bei (198), (196), (137), (141), (256).

Th **92**. Aus

$$\alpha\in\sum_n, \tag{261}$$

$$\bar{r}_\nu\,Z\,\alpha \qquad (\nu=1,2) \tag{262}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(r_1-r_2)^2=0 \qquad (t\in T). \tag{263}$$

Dm Bei (137) aus (261), (262), Sgn 14, Sgn 11, Th **6** folgt

$$r_\mu-\bar{a}=\sum_{\nu=1}^{n}[(r_\mu-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu \qquad (\mu=1,2;\ t\in T) \tag{264}$$

mit

$$\frac{d}{dt}[(\bar{r}_\mu-\bar{a})\,\bar{a}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\mu=1,2;\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{265}$$

Aus (264) folgt

$$r_1-r_2=\sum_{\nu=1}^{n}[(r_1-r_2)\,\bar{a}_\nu^{-1}]\,\bar{a}_\nu \qquad (t\in T). \tag{266}$$

Aus (265) folgt

$$\frac{d}{dt}[(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\,\bar{a}_\nu^{-1}]=0 \qquad (\nu=1,\,2,\ldots,\,n;\ t\in T). \tag{267}$$

Aus (266) folgt

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_2)^2=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}[(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\,\bar{a}_\mu^{-1}]\,[(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\,\bar{a}_\nu^{-1}](\bar{a}_\mu\,\bar{a}_\nu). \tag{268}$$

($t\in T$). Aus (261), Sgn 15 folgt (256). Aus (268), (267), (256) folgt (263).

Th 93. Aus (139), (256) folgt

$$\frac{d}{dt}\,G(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}=0 \qquad (t\in T). \tag{269}$$

Dm. Sgn 4, Sgn 5.

Th 94. Aus (139), (140), (256) folgt

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu^{-1}\,\bar{a}_\nu^{-1})=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,n;\ t\in T). \tag{270}$$

Dm. Aus Sgn 6 folgt

$$\bar{a}_\mu^{-1}\,\bar{a}_\nu^{-1}=\frac{(-1)^{\mu+1}}{G(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}}\begin{vmatrix} \bar{a}_1\,\bar{a}_\nu^{-1} & \bar{a}_2\,\bar{a}_\nu^{-1} & \ldots & \bar{a}_n\,\bar{a}_\nu^{-1}\\ a_1^2 & \bar{a}_1\,\bar{a}_2 & \ldots & \bar{a}_1\,\bar{a}_n\\ \bar{a}_2\,\bar{a}_1 & a_2^2 & \ldots & \bar{a}_2\,\bar{a}_n\\ \ldots & & & \\ \bar{a}_{\mu-1}\,\bar{a}_1 & \bar{a}_{\mu-1}\,\bar{a}_2 & \ldots & \bar{a}_{\mu-1}\,\bar{a}_n\\ \bar{a}_{\mu+1}\,\bar{a}_1 & \bar{a}_{\mu+1}\,\bar{a}_2 & \ldots & \bar{a}_{\mu+1}\,\bar{a}_n\\ \ldots & & & \\ \bar{a}_n\,\bar{a}_1 & \bar{a}_n\,\bar{a}_2 & \ldots & a_n^2 \end{vmatrix} \tag{271}$$

($\mu,\ \nu=1,\,2,\ldots,\,n;\ t\in T$). Aus (271), Th 93, Th 3, (256) folgt (270).

Th 95. Aus (261) folgt

$$\alpha^{-1}\in\sum_n. \tag{272}$$

Dm. Th 4, Th 94, Sgn 10.

Th 96. Aus (261) folgt

$$\alpha^{-1}\sim\alpha. \tag{273}$$

Dm. Th 61, Th 5, Th 94.

Th 97. Aus (261), (196) folgt

$$(\alpha^{-1},\ q)\in P_n. \tag{274}$$

Dm. Th 96, Ax 3.
Th **98.** Aus (137), (261) folgt (145),

$$\overline{a_\nu}^{-1} + a \mathrel{Z} \alpha \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{275}$$

Dm. Th 95, Th 96, Th 67, Sgn 12, Sgn 15.
Th **99.** Aus (137), (261) folgt (145),

$$\overline{a_\nu} + \overline{a} \mathrel{Z} \alpha^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{276}$$

Dm. Th 95, Th 96, Sgn 12, Sgn 15.
Th 100. Aus (141), (135), (188) folgt

$$r \mathrel{Z} \alpha^{-1}. \tag{277}$$

Dm. Th 95, Th **96**, Th 74.
Th 101. Aus

$$q \in K_n \tag{278}$$

(196), (137) folgt (200),

$$\overline{a_\nu}^{-1} + \overline{a} \mathrel{Z} q \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{279}$$

Dm. Sgn 13, Th **98.**
Th 102. Aus (137), (261), (222) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu}^{-1})}{dt^i} \frac{d^k \overline{a_\nu}}{dt^k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^i(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu})}{dt^i} \frac{d^k \overline{a_\nu}^{-1}}{dt^k} \tag{280}$$

($i, k = 0, 1, \ldots; t \in T$).
Dm. Sgn 10, Th 95, Th 96, Th 79.
Th 103. Aus (137), (261), (278), (196), (222) folgt

$$\left(\frac{\partial^m \overline{\rho}}{\partial t^m}\right)_q = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^m(\overline{\rho}\,\overline{a_\nu})}{dt^m} \overline{a_\nu}^{-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots; t \in T). \tag{281}$$

Dm. Sgn 14, Th 102.
Th 104. Aus (137), (261), (135), (188) folgt

$$\frac{d^m \overline{r}}{dt^m} = \frac{d^m \overline{a}}{dt^m} + \sum_{\nu=1}^{n} [(\overline{r} - \overline{a})\,\overline{a_\nu}] \frac{d^m \overline{a_\nu}^{-1}}{dt^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots; t \in T). \tag{282}$$

Dm Th 86, Th 101.
Th 105. Aus (139), (256) folgt

$$\frac{d}{dt} G(\overline{a_\nu}^{-1})_{\nu=1}^{n} = 0 \qquad (t \in T). \tag{283}$$

Dm. Th 20, Th **93.**

8. Th 106. Aus

(284) $$\bar{\rho}_\nu=\bar{\rho}_\nu(t)\in H \qquad (\nu=1,\ 2;\ t\in T)$$

(198) folgt

(285) $$\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q=\left(\frac{\delta^m\bar{\rho}_1}{\delta t^m}\right)_q+\left(\frac{\delta^m\bar{\rho}_2}{\delta t^m}\right)_q \quad (m=1,\ 2,\ldots;\ t\in T).$$

Dm. Bei (137), (141), (198) aus Sgn 14 folgt

(286) $$\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^m}{dt^m}\left[(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)\,\bar{a}_\nu^{-1}\right]\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^m}{dt^m}\left(\bar{\rho}_1\,\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^m}{dt^m}\left(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

$$=\left(\frac{\delta^m\bar{\rho}_1}{\delta t^m}\right)_q+\left(\frac{\delta^m\bar{\rho}_2}{\delta t^m}\right)_q \qquad (m=1,\ 2,\ldots;\ t\in T).$$

Es sei

(287) $$\lambda=\lambda(t) \qquad (t\in T)$$

eine unendlich oftmal differenzierbare skalare Funktion des reellen Argumentes t. Dann:

Sgn 17. $\left(\frac{\delta^m\lambda}{\delta t^m}\right)_q$ sgn: $\frac{d^m\lambda}{dt^m}$ $(m=0,\ 1,\ldots;\ t\in T)$ bei (287), (198).

Th 107. Aus (137), (141), (198), (196), (287) (222)

(288) $$\bar{\rho}\in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (t\in T)$$

folgt

(289) $$\left[\frac{\delta^m(\lambda\bar{\rho})}{\delta t^m}\right]_q=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\lambda}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^\mu\bar{\rho}}{\delta t^\mu}\right)_q$$

$(m=1,\ 2,\ldots;\ t\in T)$.

Dm. Aus (288), Th 6 folgt

(290) $$\bar{\rho}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu \qquad (t\in T).$$

Aus Sgn 14, Sgn 15, (290) folgt

(291) $$\left[\frac{\delta^m(\lambda\bar{\rho})}{\delta t^m}\right]_q=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^m}{dt^m}\left[(\lambda\bar{\rho})\,\bar{a}_\nu^{-1}\right]\bar{a}_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^m}{dt^m}\left[\lambda(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})\right]\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{n}\binom{m}{\mu}\left[\frac{d^{m-\mu}\lambda}{dt^{m-\mu}}\,\frac{d^\mu(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^\mu}\right]\bar{a}_\nu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \frac{d^{m-\mu}\lambda}{dt^{m-\mu}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d^{\mu}(\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{\mu}}\,\bar{a}_\nu = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\delta^{m-\mu}\lambda}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q \left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}}{\delta t^{\mu}}\right)_a$$

$(m = 1, 2, \ldots;\ t \in T)$.

Th 108. Aus (137), (261), (198), (196),

$$\rho_\nu \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n} \qquad (\nu = 1, 2;\ t \in T) \tag{292}$$

folgt

$$\left[\frac{\delta(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{\delta t}\right]_q = \left(\frac{\delta\bar{\rho}_1}{\delta t}\right)_q \rho_2 + \bar{\rho}_1 \left(\frac{\delta\rho_2}{\delta t}\right)_q \qquad (t \in T). \tag{293}$$

Dm. Aus Sgn 17, (292), Th 12, Th 102, Sgn 14 folgt

$$\left[\frac{\delta(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{\delta t}\right]_q = \frac{d(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{\rho}_1 a_\nu)(\rho_2 a_\nu^{-1}) \tag{294}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_1\bar{a}_\nu)\,\bar{a}_\nu^{-1}\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt}(\rho_2 a_\nu^{-1})\,a_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_1\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu\bar{\rho}_2 + \rho_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dt}(\rho_2\bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu$$

$$= \left(\frac{\delta\bar{\rho}_1}{\delta t}\right)_q \rho_2 + \bar{\rho}_1 \left(\frac{\delta\bar{\rho}_2}{\delta t}\right)_q \qquad (t \in T).$$

Th 109. Aus (137), (261), (198), (196), (292) folgt

$$\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q \left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q \tag{295}$$

$(m = 1, 2, \ldots;\ t \in T)$.

Dm. Bei $m = 1$ Th 108. Aus Sgn 17, (295), Sgn 14, (261), Sgn 16 folgt

$$\left[\frac{\delta^{m+1}(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{\delta t^{m+1}}\right]_q = \frac{d^{m+1}(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{dt^{m+1}} = \frac{d}{dt}\frac{d^m(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{dt^m} \tag{296}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q = \frac{d}{dt}\sum_{\mu=0}^{n}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q + \left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q\right]$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{m-\mu}(\bar{\rho}_1\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{m-\mu}}\,\bar{a}_\nu\right]\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{dt^{\mu}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{\mu}(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{\mu}}\,\bar{a}_\nu\right]$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{m+1-\mu}(\bar{\rho}_1\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{m+1-\mu}}\,\bar{a}_\nu\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{m-\mu}(\bar{\rho}_1\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{m-\mu}}\,\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{\mu+1}(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{\mu+1}}\,\bar{a}_\nu$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{\mu}(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{\mu}}\,\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m+1-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu+1}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu+1}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{d^{m-\mu}(\bar{\rho}_1\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{m-\mu}}\,\frac{d^{\mu}(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\lambda^{-1})}{dt^{\mu}}\left(\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}\,\bar{a}_\lambda\right)$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{m-\mu}(\bar{\rho}_1\,\bar{a}_\lambda^{-1})}{dt^{m-\mu}}\,\frac{d^{\mu}(\bar{\rho}_2\,\bar{a}_\nu^{-1})}{dt^{\mu}}\left(\bar{a}_\lambda\,\frac{d\bar{a}_\nu}{dt}\right)$$

$$=\left(\frac{\delta^{m+1}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1}}\right)_q+\sum_{\mu=1}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m+1-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q$$

$$+\sum_{\mu=1}^{n}\binom{m}{\mu-1}\left(\frac{\delta^{m+1-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)_q+\left(\frac{\delta^{m+1}\bar{\rho}_2}{\delta t^{m+1}}\right)_q$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m+1}\binom{m+1}{\mu}\left(\frac{\delta^{m+1-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}}\right)_q\left(\frac{\delta^{\mu}\bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}}\right)\qquad(t\in T).$$

Th 110. Aus (139), (140),

(297) $$\frac{d\bar{a}_\mu}{dt}\in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}\qquad(\mu=1,\,2,\ldots,\,n;\;t\in T)$$

folgt

(298) $$\frac{d\bar{a}_\mu^{-1}}{dt} \in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^n \qquad (\mu=1, 2,\ldots, n;\ t \in T).$$

Dm. Sgn 6.

Th 111. Aus (139), (140), (222), (256), (297) folgt

(299) $$\sum_{\nu=1}^n \left(\bar{\rho}\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu)\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \bar{o} \qquad (t \in T).$$

Dm. Aus (297), Th 110, Th 6 folgt

(300) $$\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\bar{a}_\mu^{-1}\right)\bar{a}_\mu \qquad (\nu=1, 2,\ldots, ;\ t \in T).$$

Aus (300), Th 94 folgt

(301) $$\sum_{\nu=1}^n \left(\bar{\rho}\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu)\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\mu)\left(\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\bar{a}_\mu^{-1}\right)\bar{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\nu)\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\bar{a}_\mu^{-1}\Big)\bar{a}_\mu$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\mu)\left(\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\bar{a}_\mu^{-1}\right)\bar{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\mu)\left(\frac{d\bar{a}_\mu^{-1}}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\bar{\rho}\,\bar{a}_\mu)\left(\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\bar{a}_\mu^{-1} + \bar{a}_\nu^{-1}\frac{d\bar{a}_\mu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu = \bar{o} \qquad (t \in T).$$

Th 112. Aus (139), (140), (256) folgt

(302) $$\sum_{\nu=1}^n \bar{a}_\nu \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = o \qquad (t \in T).$$

Dm. Aus Th 5, Th 6 folgt

(303) $$\bar{a}_\nu^{-1} = \sum_{\mu=1}^n (\bar{a}_\nu^{-1}\bar{a}_\mu^{-1})\,\bar{a}_\mu \qquad (\nu=1, 2,\ldots, n;\ t \in T).$$

Aus (303), Th 94 folgt

(304) $$\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \sum_{\mu=1}^n (\bar{a}_\nu^{-1}\bar{a}_\mu^{-1})\frac{d\bar{a}_\mu}{dt} \qquad (\nu=1, 2,\ldots, n;\ t \in T).$$

Aus (304), (256) folgt

(305)
$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} (\bar{a}_\nu^{-1}\bar{a}_\mu^{-1})\left(\bar{a}_\nu \frac{d\bar{a}_\mu}{dt}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{a}_\nu^{-1})^2\left(\bar{a}_\nu \frac{d\bar{a}_\nu}{dt}\right) + 2\sum_{\nu=2}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (\bar{a}_\nu^{-1}\bar{a}_\mu^{-1})\left(\bar{a}_\nu \frac{d\bar{a}_\mu}{dt} + \bar{a}_\mu \frac{d\bar{a}_\nu}{dt}\right) = 0$$

($t \in T$).

Th 113. Aus (139), (140), (256) folgt

(306)
$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu^{-1} \frac{d\bar{a}_\nu}{dt} = o \qquad (t \in T).$$

Dm. Th 3, Th 112.

Th 114. Aus

(307)
$$\bar{\rho}_\nu = \bar{\rho}_\nu(t) \in V \qquad (\nu = 1, 2;\ t \in T)$$

(278) folgt

(308)
$$\left[\frac{\delta(\rho_1 \times \rho_2)}{\delta t}\right]_q = \left(\frac{\delta \rho_1}{\delta t}\right)_q \times \rho_2 + \rho_1 \times \left(\frac{\delta \rho_2}{\delta t}\right)_q \qquad (t \in T).$$

Dm. Bei

(309)
$$\alpha = \{\bar{a},\ [\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{3}\}$$

(196) aus Sgn 14 — Sgn 16, Sgn 9, Th 46 folgt

(310)
$$\left[\frac{\delta(\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2)}{\delta t}\right]_q = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_1 \times \rho_2 \cdot \bar{a}_\nu^{-1})a_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}(\bar{\rho}_1 \times \rho_2) \cdot \bar{a}_\nu^{-1}\right]a_\nu + \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1 \times \rho_2 \cdot \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$= \frac{d\rho_1}{dt} \times \rho_2 + \rho_1 \times \frac{d\rho_2}{dt} + \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2 \cdot \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{\rho}_1}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu \times \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1 \times \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\bar{\rho}_2}{dt}\bar{a}_\nu^{-1}\right)\bar{a}_\nu$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2 \cdot \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_1 \bar{a}_\nu^{-1})\,\bar{a}_\nu \times \bar{\rho}_2$$

$$+ \bar{\rho}_1 \times \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d}{dt}(\bar{\rho}_2 \bar{a}_\nu^{-1})\bar{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2 \cdot \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$- \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1 \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu \times \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1 \times \sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_2 \frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$

$$=\left(\frac{\delta\bar{\rho}_1}{\delta t}\right)_q\times\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\times\left(\frac{\delta\bar{\rho}_2}{\delta t}\right)_q+A \qquad (t\in T)$$

bei

(311)
$$A=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2\cdot\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1\cdot\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu\times\bar{\rho}_2$$
$$-\bar{\rho}_1\times\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_2\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2\cdot\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu$$
$$-\sum_{\nu=1}^{3}\bar{a}_\nu\times\left[(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2)\times\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right] \qquad (t\in T).$$

Aus (11), Th 111, Th 112 folgt

(312)
$$A=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2\cdot\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{a}_\nu-\sum_{\nu=1}^{3}\left(\bar{a}_\nu\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}\right)\bar{\rho}_1\times\rho_2$$
$$+\sum_{\nu=1}^{3}(\bar{a}_\nu\cdot\rho_1\times\bar{\rho}_2)\frac{d\bar{a}_\nu^{-1}}{dt}=0 \qquad (t\in T).$$

Aus (312), (310) folgt (308).

Th 116. Aus (307), (278) folgt

(313)
$$\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\rho_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\times\left(\frac{\delta^\mu\bar{\rho}_2}{\delta t^\mu}\right)_q$$

$(m=1, 2,\ldots;\ t\in T)$.

Dm. Bei $m=1$ Th 115. Aus Th 81, (313), Th 114 folgt

(314)
$$\left[\frac{\delta^{m+1}(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2)}{\delta t^{m+1}}\right]_q=\left\{\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta^m(\bar{\rho}_1\times\bar{\rho}_2)}{\delta t^m}\right]_q\right\}_q$$
$$=\left[\frac{\delta}{\delta t}\sum_{\mu=0}^{n}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\times\left(\frac{\delta^\mu\bar{\rho}_2}{\delta t^\mu}\right)_q\right]_q$$
$$=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\right]_q\times\left(\frac{\delta^\mu\bar{\rho}_2}{\delta t^\mu}\right)_q$$
$$+\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\left(\frac{\delta^{m-\mu}\bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}}\right)_q\times\left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta^\mu\bar{\rho}_2}{\delta t^\mu}\right)_q\right]_q$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\delta^{m+1-\mu} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}} \right)_q \times \left(\frac{\delta^{\mu} \bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}} \right)_q$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\delta^{m-\mu} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m-\mu}} \right)_q \times \left(\frac{\delta^{\mu+1} \bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu+1}} \right)_q$$

$$= \left(\frac{\delta^{m+1} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1}} \right)_q \times \bar{\rho}_2 + \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\delta^{m+1-\mu} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}} \right)_q \times \left(\frac{\delta^{\mu} \bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}} \right)_q$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu-1} \left(\frac{\delta^{m+1-\mu} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}} \right)_q \times \left(\frac{\delta^{\mu} \bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}} \right)_q + \bar{\rho}_1 \times \frac{\delta^{m+1} \bar{\rho}_2}{\delta t^{m+1}}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m+1} \binom{m+1}{\mu} \left(\frac{\delta^{m+1-\mu} \bar{\rho}_1}{\delta t^{m+1-\mu}} \right)_q \times \left(\frac{\delta^{\mu} \bar{\rho}_2}{\delta t^{\mu}} \right) \qquad (t \in T).$$

LITERATUR

1. Чобанов, Ив.: Моделно-аксиоматизационна схема. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/1968), 157—159.

Постъпила на 24. XI. 1970 г.

АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫЕ ТЕЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ив. Чобанов

(РЕЗЮМЕ)

Пусть H произвольное нетривиальное гильбертово пространство, а S_n — совокупность всех

(1) $$\alpha = \{\bar{a}, [\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{n}\},$$

где

(2) $$\bar{a} = \bar{a}(t) \in H,$$

(3) $$\bar{a}_\nu = \bar{a}_\nu(t) \in H \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

— произвольное число раз дифференцируемые функции переменного t, причем векторы (3) линейно независимы. Элементы множества S_n называются n-мерными аффинными координатными системами в гильбертовом пространстве H.

При

(4) $$\bar{r}=\bar{r}(t)\in H.$$

(5) $$\alpha\in S_n$$

будем писать

(6) $$\bar{r}\,\bar{\subset}\,\alpha$$

когда

(7) $$\bar{r}-\bar{a}\in H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}$$

(8) $$\frac{d}{dt}[(\bar{r}-\bar{a})\,\bar{a}_\nu]=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

для каждого t, где $H(\bar{a}_\nu)_{\nu=1}^{n}$ обозначает n-мерное линейное пространство, порожденное векторами (3), а

(9) $$\bar{a}_\nu^{-1} \qquad (\nu=1,2,\ldots,\ n)$$

обозначает репер Гиббса для репера (3).

При

(10) $$\beta=\{b,\ [b_\nu]_{\nu=1}^{n}\}$$

будем писать

(11) $$\alpha\sim\beta,$$

когда

(12) $$\bar{a}\,\bar{\subset}\,\beta,$$

(13) $$a_\nu+\bar{a}\,\bar{\subset}\,\beta. \qquad (\nu=1,2,\ldots,\ n)$$

Доказывается, что реляция (11) является реляцией эквивалентности в множестве S_n.

Пусть P_n, Q_n — первичные совокупности, определенные следующей системой аксиом:

Ах 1. $P_n\subset S_n\times Q_n$.
Ах 2. Из $s\in S_n$ следует: существует $q\in Q_n$ с $(s,\ q)\in P_n$.
Ах 3. Из $(s_\nu,\ q_\nu)\in P_n$ $(\nu=1,\ 2)$, $s_1\sim s_2$ следует $q_1=q_2$.
Ах 4. Из $q\in Q_n$ следует: существует $s\in S_n$ с $(s,\ q)\in P_n$.
Ах 5. Из $(s_\nu,\ q)\in P_n$ $(\nu=1,\ 2)$, следует $q_1=q_2$.

Элементы множества Q_n называются n-мерными аффинными телами в гильбертовом пространстве H. Элементы α подмножества $\sum_n$ совокупности S_n, для которых

(14) $$\frac{d}{dt}(\bar{a}_\mu\,a_\nu)=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

для каждого t называются n-мерными евклидовыми координатными системами в гильбертовом пространстве H, а соответствующие им согласно Ах 1 — Ах 5 элементы совокупности Q_n — n-мерными евклидовыми телами в H.

В настоящей работе излагается аксиоматически кинематика n-мерных аффинных и евклидовых тел в гилбертовом пространстве. Доказывается, что система аксиом Ах 1 — Ах 5 совместима и категорична.