РАВНОМЕРНО ПАРАМЕТРИЧНО ПРИБЛИЖЕНИЕ НА $|x|$ С АЛГЕБРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Борислав Д. Боянов

Задачата за равномерното параметрично приближение в своя най-общ вид се поставя за пръв път в [1]. Читателят ще намери там определенията на основните понятия, свързани с този начин на апроксимиране.

Тук ще дадем решение на задачата за единственост и експлицитно изразяване на двойката полиноми, осъществяващи най-добро равномерно параметрично приближение на функцията x в $[-1, 1]$.

Да означим с $T_n(x)$ полинома на Чебишов от степен n. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ за $|x| \leq 1$. Нека H_n е множеството от всички полиноми от степен, ненадминаваща n. Определяме двойката полиноми $P^*(x)$, $Q^*(x) \in H_n$ по следния начин:

$$P^*(x) = \frac{T_n(2x+1) - T_n(-2x+1)}{2}, \quad Q^*(x) = \frac{T_n(2x+1) + T_n(-2x+1)}{2};$$

$P^*(x)$ е нечетен полином, $Q^*(x)$ — четен. Избираме числото δ така, че $\delta P^*(1) = 1$:

$$\delta = \frac{2}{T_n(3) - T_n(-1)} = \frac{2}{T_n(3) - (-1)^n}.$$

Дефинираме: $P(x) = \delta P^*(x)$, $Q(x) = \delta Q^*(x)$. Лесно се вижда, че

$$\| P(x) | - Q(x) \|_{[-1,1]} = \frac{2}{T_n(3) - (-1)^n}.$$

Да означим с $\hat{H}_n$ съвкупността от алгебричните полиноми $R(x) \in H_n$, за които $R(-1) = -1$, $R(1) = 1$, $R'(x) \geq 0$ за $|x| \leq 1$. В [1] е показано, че $P(x) \in \hat{H}_n$ и че за всяко нечетно n е изпълнено

$$e_{n,n}(|x|) = \inf_{R(\cdot) \in \hat{H}_n,\ S(\cdot) \in H_n} \| |R(x)| - S(x) \|_{[-1,1]} = \| |P(x)| - Q(x) \|_{[-1,1]}.$$

Оказва се, че това твърдение е вярно за всяко n. Нещо повече, двойката $P(x)$, $Q(x)$ е оптимална за $|x|$ дори когато $R(x)$ се изменя в един по-широк клас от полиноми.

Нека с H_n^* означим множеството от полиноми $R(x) \in H_n$, за които $R(-1)=-1$, $R(1)=1$ $R(x)$ си сменя знака само веднъж в $(-1,1)$.

Теорема. За всяко натурално число n е в сила равенството

$$e^*_{n,n}(|x|) = \inf_{R(x)\in H_n^*,\ S(x)\in H_n} \| \, |R(x)| - S(x) \, \|_{[-1,1]} = \| \, |P(x)| - Q(x) \, \|_{[-1,1]}.$$

Двойката $P(x)$, $Q(x)$ е единствената в $H_n^* \times H_n$ с това свойство.

Доказателството на теоремата се основава на следната

Лема. Нека $|\alpha| \leqq \frac{1}{3}$ и n е четно число. Тогава системата

$$(1)\qquad \begin{aligned} c_1 - c_2\, T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) &= -2, \\ c_1 T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) - c_2 &= 2 \end{aligned}$$

има едно единствено решение спрямо c_1 и c_2 и

$$\max\{c_1,\ c_2\} \geqq 2/[T_n(3)-1].$$

Доказателство. Уравненията на (1) се получават от условията $V(-1)=-1$, $V(1)=1$, където

$$V(x) = \frac{1}{2}\left[c_1 T_n\left(\frac{2}{1+\alpha}x + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - c_2\, T_n\left(\frac{2}{1-\alpha}x - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right].$$

Системата има едно единствено решение, тъй като

$$T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) - 1 \neq 0$$

при направените ограничения за α.

За c_1 и c_2 получаваме

$$c_1 = \frac{2\left[1 + T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)\right]}{T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1}, \qquad c_2 = \frac{2\left[1 + T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)\right]}{T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1}.$$

Нека разгледаме случая $\alpha \geqq 0$. При отрицателни α разсъжденията са напълно аналогични. Вижда се, че $c_1 \geqq c_2$. Неравенството

$$(2)\qquad c_1 = \frac{2\left[1 + T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)\right]}{T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1} \geqq \frac{2}{T_n(3)-1},$$

което трябва да докажем, се свежда лесно до следното:

$$T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) \geqq \frac{T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) \quad T_n(3)}{T_n(3)-T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)}.$$

Прилагайки теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)-T_n(3) < \left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-3\right) T_n'\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$T_n(3)-T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) > \left(3-\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right) T_n'\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Неравенството на Чебишов за растежа на полинома $T_n(x)$ вън от интервала $[-1, 1]$ дава

$$T_n'\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) \leqq n^2 T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Имайки пред вид горните неравенства, получаваме

$$\frac{T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)-T_n(3)}{T_n(3)-T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)} \leqq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \; \frac{n^2}{T_n'\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)} \cdot T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Лесно се изчислява, че коефициентът пред $T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)$ е по-малък от единица при направените предположения за α. Оттук следва верността на неравенството (2). Лемата е доказана.

Доказателство на теоремата. Да допуснем, че има двойка полиноми $R(x) \in H_n^*$ и $S(x) \in H_n$, различни от $P(x)$ и $Q(x)$ и такива, че $R(\alpha)=0$ и

$$\| R(x) | - S(x) \|_{[-1,1]} \leqq \frac{2}{T_n(3)-(-1)^n}.$$

За удобство ще въведем означенията

$$E = \| \, | R(x) | - S(x) \, \|_{[-1,1]}, \quad E_1 = 2/[T_n(3)-(-1)^n].$$

Нека n е четно число. В [1] е доказано следното твърдение:
За всяко натурално n е в сила неравенството

$$e_{n,n}(| x) \geqq 2/[T_n(3)+1].$$

При проследяване на доказателството се вижда, че в действителност е доказано твърдението

$$e^*_{\alpha,n}(|x|) \geqq 2/[T_n(3)+1],$$

тъй като са използвани само следните предположения:

Ако един полином $R(x) \in \hat{H}_n$, то $R(1)=1$, $R(-1)=-1$ и може да се намери точка $\alpha \in (-1, 1)$ такава, че $R(x) \geqq 0$ за $x \in [\alpha, 1]$ и $R(x) \leqq 0$ за $x \in [-1, \alpha]$.

Но елементите на H_n^* притежават горните свойства. Следователно теоремата е вярна, когато n е нечетно число.

Нека n е четно число. Тъй като $R(\alpha)=0$ и $R(x) \in H_n^*$, то

$$R(x)-S(x)\,|_{[\alpha,1]}=E,$$

$$-R(x)-S(x)\,|_{[-1,\alpha]}=E.$$

Означаваме $-R(x)+S(x)=W_1(x)$, $R(x)+S(x)=W_2(x)$. Нека $\alpha \geqq 0$. При отрицателно α разсъжденията са аналогични. Да изразим полинома $R(x)$ чрез W_1 и W_2:

$$R(x)=\frac{W_2(x)-W_1(x)}{2}.$$

От $R(1)=1$, $E \leqq E_1$, $W_1(1) \leqq E$ и

$$E\,T_n\left(\frac{2}{1+\alpha}x+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \geqq W_2(x)$$ при $x \geqq \alpha$ получаваме последователно

$$W_2(1)-W_1(1)=2,$$

$$W_2(1) \geqq 2-E_1,$$

$$2 \geqq T_n(3)-T_n\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)=\frac{2\alpha}{1+\alpha}\,T_n'(\xi),$$

където $\xi \in \left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}, 3\right)$. От горе веднага следва

$$\frac{1}{T_n'(1)-1}>\alpha, \quad \frac{1}{n^2-1}>\alpha.$$

Тъй като n е четно, то $n \geqq 2$. От горното неравенство се вижда, че $\alpha<\frac{1}{3}$.

Нека $W_2(-1)=a$ и $W_1(1)=b$. Избираме полиномите $\tau_1(x)$, $\tau_2(x) \in H_n$ така, че

$\tau_2(-1)=a$, $\tau_1(1)=b$, $\tau_1(\alpha)=\tau_2(\alpha)=E$,

$\tau_1(x)$ монотонен в интервалите $(-\infty, -1)$ и (α, ∞),

$\tau_2(x)$ монотонен в интервалите $(-\infty, \alpha)$ и $(1, \infty)$.

За $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ да съществуват по n точки

$-1 \leqq \xi_n < \xi_{n-1} < \ldots < \xi_1 = \alpha, \quad \alpha = \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n \leqq 1$ такива, че $\tau_2(\xi_k) = (-1)^{k-1} E, \quad \tau_1(\eta_k) = (-1)^{k-1} E \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

За определените по този начин полиноми $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ са изпълнени неравенствата

$$\tau_2(x) \geqq W_2(x) \quad \text{за} \quad x \geqq \alpha,$$

$$\tau_1(x) \geqq W_1(x) \quad \text{за} \quad x \leqq \alpha.$$

Ще докажем първото неравенство. Доказателството на второто е напълно аналогично.

Полиномът $\tau_2(x) - W_2(x)$ се анулира за $x = -1$ и по веднъж в интервалите $[\xi_n, \xi_{n-1}], [\xi_{n-1}, \xi_{n-2}], \ldots, [\xi_2, \xi_1]$. Да забележим, че ако една нула принадлежи на два от горните интервали, то тя е двукратна. Тъй като полиномът е от степен n и има n нули в интервала $[-1, \alpha]$, то $\tau_2(x) - W_2(x)$ е монотонна функция за $x \geqq \alpha$. Ако $E > W_2(\alpha)$, то за всяко $x \geqq \alpha$ ще имаме $\tau_2(x) > W_2(x)$.

Нека $E = W_2(\alpha)$, което дава $\tau_2(\alpha) = W_2(\alpha)$. Тогава имаме следните възможности:

ξ_2 е двоен корен за уравнението $\tau_2(x) - W_2(x) = 0$, $\tau_2(\xi) - W_2(\xi) = 0$ за $\xi_2 < \xi < \xi_1$.

Коренът ξ_1 е двоен.

$\tau_2(x) \geqq W_2(x)$ за $x \geqq 1$.

Първите три случая водят до $\tau_2(x) \equiv W_2(x)$. Твърдението е доказано.

Нека A и B са най-големите по абсолютна стойност числа, за които

$$\| \tau_2(x) \|_{[A, \alpha]} = \| \tau_1(x) \|_{[\alpha, B]} = E.$$

Да означим с $\tau_1^*(x)$ и $\tau_2^*(x)$ полиномите, получени от $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ чрез трансформиране на интервала $[\alpha, B]$ в $[\alpha, 1]$ и $[A, \alpha]$ в $[-1, \alpha]$ съответно. От конструкцията се вижда, че

$$\tau_2^*(x) = ET_n\left(\frac{2}{1+\alpha} x + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right),$$

$$\tau_1^*(x) = ET_n\left(\frac{2}{1-\alpha} x - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$$

и $\tau_2^*(1) \geqq W_2(1)$, $\tau_1^*(-1) \geqq W_1(-1)$. Следователно

$$\tau_2^*(1) - E \geqq 2,$$

$$-\tau_1^*(-1) + E \leqq -2$$

или

$$ET_n\left(\frac{3+\alpha}{1+\alpha}\right) - E \geqq 2,$$

$$-E\,T_n\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)+E\leqq -2.$$

Оттук заключаваме, че $E\geqq\max\{c_1, c_2\}$, където c_1 и c_2 са решения на (1). Тъй като $\alpha<\frac{1}{3}$, от доказаната лема следва

$$\max\{c_1, c_2\}\geqq E_1\,.$$

Това неравенство и условията на теоремата дават

$$E_1\leqq E\leqq E_1\,. \tag{3}$$

Проследявайки доказателството, виждаме, че в $E_1\leqq E$ може да има знак равенство само когато $W_1(x)=\tau_1^*(x)$, $W_2(x)=\tau_2^*(x)$ и $\alpha=0$. Но тогава $R(x)$ и $S(x)$ ще съвпадат с $P(x)$ и $Q(x)$, което противоречи на условията на теоремата. Значи в (3) първото от неравенствата е строго. Противоречието доказва теоремата.

И така полиномите

$$P(x)=\frac{T_n(2x+1)-T_n(-2x+1)}{T_n(3)-(-1)^n}, \qquad Q(x)=\frac{T_n(2x+1)+T_n(-2x+1)}{T_n(3)-(-1)^n}$$

са двойка полиноми на най-добро равномерно параметрично приближение на функцията $|x$ в интервала $[-1, 1]$ всред елементите на $H_n^*\times H_n$ и

$$\|P(x)-Q(x)\|_{[-1,1]}=\frac{2}{T_n(3)-(-1)^n}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Параметрично приближение. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 64 (1969/70).

Постъпила на 24. XI. 1970 г.

UNIFORM PARAMETRIC APPROXIMATION TO $|X$ BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS

B. Boyanov

(SUMMARY)

Let $T_n(x)$ be the Chebyshev polynomial of degree n. $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ for $|x|\leqq 1$.

Let H_n be the set of the algebraic polynomials of degree not greater than n. We define the couple $P(x)$ and $Q(x)$ by

$$P(x)=\frac{\delta[T_n(2x+1)-T_n(-2x+1)]}{2},\quad Q(x)=\frac{\delta[T_n(2x+1)-T_n(-2x+1)]}{2}$$

where $\delta=2/[T_n(3)-(-1)^n]$.

Note that $\|P(x)-Q(x)\|_{[-1,1]}=2/[T_n(3)-(-1)^n]$.

Let H_n^* be the set of the polynomials $R(x)$ such that $R(x)\in H_n$, $R(1)=1$, $R(-1)=-1$ and $R(x)$ has only one change of its sign in $(-1, 1)$.

It is easy to see that $P(x)\in H_n^*$ since $P'(x)\geq 0$ for $|x|\leq 1$.

The following is proved:

Theorem. The equality

$$e^*_{n,n}(x)=\inf_{R(x)\in H_n^*,\ S(x)\in H_n}\|R(x)-S(x)\|_{[-1,1]}=\|P(x)-Q(x)\|_{[-1,1]}$$

holds for every natural n. The element $(P(x), Q(x))$ is unique in the set $H_n^*\times H_n$.