О ТЕОРЕМЕ ГУРЕВИЧА

Генчо С. Скордев

В [11] Гуревичем была доказана следующая теорема:

Теорема Н. Если f конечнократное* замкнутое** отображение сепарабельного метрического пространства X на сепарабельное метрическое пространство Y и $\dim Y \geqq \dim X + k$, то $\mu\ (y, f)$ принимает по крайней мере $k+1$ различных значений.

Здесь $\mu(y,f) = \operatorname{card} Q(f^{-1}y)$, а $Q(f^{-1}y)$ — пространство квазикомпонент пространства $f^{-1}y$.

После того как была развита теория размерности в категории метризуемых пространств, теорему Н можно было доказывать, следуя рассуждения Гуревича в предположениях, что X и Y метризуемы. Это было сделано Кизлингом [12].

В настоящей заметке обобщается и усиливается теорема Н и кроме того предлагается доказательство, которое не использует развитую теорию размерности метризуемых пространств.

Размерностноповышающие конечнократные отображения изучались Вайнштейном и Кажданом (см. [1], [2], [3]). После результатов [6] нетрудно доказать, что утверждения Вайнштейна и Каждана справедливы в категории метризуемых пространств. Этим мы здесь заниматься не будем.

Пусть M — подмножество нормального конечномерного пространства T.*** Следуя П. С. Александрову (см. [8]), относительной размерностью $\operatorname{rd}_T M$ множества M в пространстве T назовем $\max \dim F$ по всем F, замкнутым в T и содержащимся в M. Отметим, что если пространство M нормально и является подмножеством типа F_σ в T, то из теоремы о размерности счетной суммы замкнутых подмножеств нормального пространства [10] получаем $\dim M = \operatorname{rd}_T M$. Если M_1 и M_2 — подмножества пространства T и M_1 содержится в M_2, то $\operatorname{rd}_T M_1 \leqq \operatorname{rd}_T M_2$. Последнее замечание будет важным ниже.

Пусть f отображение пространства X на пространство Y. Через $Y_t(f)$ обозначим следующее множество точек в Y: $y \in Y_t(f)$ тогда и только

*Отображение называется конечнократным, если прообраз любой точки при этом отображении — конечное множество.

** Отображение называется замкнутым, если переводит замкнутое множество в замкнутое множество.

*** Ниже будем предполагать, что размерность всех пространств конечна. Размерность — в смысле Лебега.

тогда, когда $\operatorname{card} f^{-1} y \geqq t$. Нас будут интересовать множества $M_q(f) = \{y \in Y / \dim f^{-1} y \geqq q\}$. Отметим, что $Y_2(t), \geqq M_q(f)$, если $q > 0$. Через $d_q(f)$ обозначим относительную размерность множества $M_q(f)$ в пространстве Y. Для удобства будем считать, что $d_q(f) = -\infty$, если $M_q(f) = \varnothing$.

Будем говорить, что пространство X принадлежит классу H (или X есть класса H) и будем писать $X \in H$, если:

1) X — нормальное пространство

2) X обладает счетную систему замкнутых локально-конечных покрытий $F_i = \{F^i_\alpha, \alpha \in A_i\}$, которая разделяет точки, т. е. для любого конечного числа точек $x_1, \ldots, x_s \in X$ существует такое i, что в покрытии F_i имеются $F^i_{\alpha_j}$, для которых: $x_j \in F^i_{\alpha_j}$ и $F^i_{\alpha_j} \cap F^i_{\alpha_k} = \varnothing$ для $i \neq k$.

Все нормальные пространства, которые уплотняются* на метрические пространства, принадлежат классу H.**

Будем говорит, что отображение $f: X \to Y$ есть отображение конечного типа, если $\mu(y, f) < \infty$ для всякой точки $y \in Y$.

Предложение 1. Пусть X — паракомпактное пространство класса H и f совершенное*** отображение конечного типа пространства X на пространства Y. Если $\dim Y \geqq \dim X + k$ и $\max\limits_{q>0} (d_q(f) + q) < \dim X$, то $\mu(y, f)$ принимает хотя $k+1$ различных значений.

Следствие. Пусть X паракомпакт класса H и f замкнутое и конечнократное отображение X на Y. Если $\dim Y \geqq \dim X + k$, то $\mu(y, f)$ принимает хотя $k+1$ различных значений.

Доказателство следствия.

Лемма 1. Пусть X паракомпакт класса H, а f — замкнутое конечнократное отображение X на пространство Y. Если $rd_Y Y_m(t) > \dim X$, то $\operatorname{rd}_Y Y_{m+1}(f) \geqq \operatorname{rd}_Y Y_m(f) - 1$.

Докажем лемму 1.

Существует замкнутое в пространстве Y множество F, которое содержится в $Y_m(f)$ такое, что $\dim F = \operatorname{rd}_Y Y_m(t)$. Рассмотрим пространство $X_1 = f^{-1} F$ и отображение $f_1 = f / X_1$. Отображение f_1 замкнуто и конечнократно, а пространство X_1 принадлежит H (класс пространств H наследствен по замкнутым подмножествам).

Пусть $y \in F$, тогда $f_1^{-1} y = \bigcup\limits_{j=1}^{s} x_j$, где $s \geqq m$, так как $F \subset Y_m(f)$. Так как система покрытий $\{F_i\}$ разделяет точки, то существует i_0 такое, что F_{i_0} разделяет точки $\{x_j\}_{j=1}^s$, т. е. имеются $F^{i_0}_{\alpha_j}$, которые попарно непересекаются и $x_j \in F_{\alpha_j}$. Рассмотрим множество $F_{i_0}(y) = \bigcap\limits_{j=1}^{s} f_1(F^{i_0}_{\alpha_j} \cap X_1)$; это замкнутое множество в F.

* Уплотнение — это взаимнооднозначное непрерывное отображение.

** Из [7] следует и обратное.

*** Отображение называется совершенным, если оно замкнуто и прообраз любой точки при этом отображении — бикомпакт.

Пусть F_i множество тех точек F, для которых выполнено: если $y \in F_i$ и $f^{-1}y = \cup x_j$, то в покрытии F_i существуют множества $F^i_{\alpha_j}$, которые попарно непересекаются и $x_i \in F^i_{\alpha j}$.

Имеем $F_i = \bigcup\limits_{y \in Fi} F_i(y)$. Если в системе множеств $\{F_i(y)\}_{y \in F_i}$ некоторые повторяются, то мы оставим только одно из них, а остальные не будем рассматривать. Таким образом получаем систему замкнутых множеств $\{F_i(y)\}_{y \in F_i}$.

Так как f — замкнутое конечнократное отображение, то $f(F_i) = \{f(F^i_{\alpha_j})\}$ — замкнутое локально-конечное покрытие пространства Y. Пусть $y \in F$; существует окрестность Oy точки y в пространстве Y, которая пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\{F_i(y)\}_{y \in Fi}$. Нетрудно проверить, что $Oy \cap F$ пересекается лишь с конечным числом элементов системы $\{F_i(y)\}_{y \in F_i}$. Следовательно система замкнутых множеств $\{F_i(y)\}_{y \in F_i}$ образует локально конечное замкнутое покрытие множества F_i. Отсюда получаем, что F_i замкнутое множество в F. Так как f конечнократное отображение, то $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$.

Пространство X паракомпакт, а f-замкнутое отображение по теореме Майкла [13] — Y тоже паракомпакт.

Из теоремы о счетной сумме [10] следует, что существует i_0 такое, что $\dim F = \dim F_{i_0}$. Так как F_{i_0} замкнутое множество в паракомпакте Y и $F_{i_0} = \bigcup\limits_{y \in F_i} F_{i_0}(y)$, то из локально-конечной теоремы суммы [9] получаем, что существует точка $y_0 \in F$ такая, что $\dim F_{i_0} = \dim F_{i_0}(y_0)$.

Рассмотрим $B_1 = F^{i_0}_{\alpha_1} \cap X_1 \cap f_1^{-1}(F_{i_0}(y_0)) = F^{i_0}_{\alpha_1} \cap X_1 \cap f^{-1}(F_{i_0}(y_0))$ и отображение $\varphi_1 = f_1 | B_1$. Отображение $\varphi_1 : B_1 \longrightarrow F_{i_0}(y_0)$ — замкнуто и конечнократно. Имеем

$$\dim F_{i_0}(y_0) = \dim A_{i_0} = \dim F = \mathrm{rd}_Y Y_m(F) > \dim X.$$

Так как B_1 замкнутое множество в пространстве X, то $\dim X \geqq \dim B_1$. Следовательно $\dim F_{i_0}(y_0) > \dim B_1$.

В [6] доказано следующее предложение:

Пусть φ — замкнутое и нульмерное* отображение паракомпакта C на пространство D. Если $\dim D \geqq \dim C + 1$, то $\mathrm{rd}_D D_2(\varphi) \geqq \dim D - 1$.

Применив это к $\varphi_1 : B_1 \longrightarrow F_{i_0}(y_0)$, получаем

$$\mathrm{rd}_{F_{i_0}(y_0)} Y_2(\varphi_1) \geqq \dim F_{i_0}(y_0) - 1.$$

Где
$$Y_2(\varphi_1) = \{y \in F_{i_0}(y_0) \mid \mathrm{card}\, \varphi^{-1}(y) \geqq 2\}.$$

*) Отображение называется нульмерным, если прообраз любой точки при этом отображении нульмерное пространство.

Из самой конструкции ясно, что $Y_{m+1}(f) \supseteq Y_2(\varphi_1)$, и, следовательно

$$\mathrm{rd}_Y Y_{m+1}(f) \geqq \mathrm{rd}_Y Y_2(\varphi_1) = \mathrm{rd}_{F_{i_0}(y_0)} Y_2(\varphi_1)$$

$$\geqq \dim F_{i_0}(y_0) - 1 = \mathrm{rd}_Y Y_m(f) - 1.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь следствие предложения 1.

Предположим, что $\mu(y,f)$ принимает значения $m_1 < \cdots < m_l$ где $l \leqq k$. Имеем $Y_{m_i}(f) = Y_{m_{s+1}}$, если $m_s < i \leqq m_{s+1}$ и $\mathrm{rd}_Y Y_{m_1}(f) = \dim Y > \dim X$. По леме 1. имеем $\mathrm{rd}_Y Y_{m_1+1}(f) \geqq \mathrm{rd}_Y Y_{m_1}(f) - 1$. Тем самым $\mathrm{rd}_Y Y_{m_2}(f) \geqq \mathrm{rd}_Y Y_{m_1}(f) - 1 = \dim X + k - 1$. Таким же способом доказывается, что

$$\mathrm{rd}_Y Y_{m_l}(f) \geqq \dim X + k - l + 1 > \dim X.$$

По лемме 1. $\mathrm{rd}_Y Y_{m_l+1}(f) \geqq \mathrm{rd}_Y Y_{m_l}(f) - 1 \geqq \dim X$, т. е. $Y_{m_l+1}(f) \neq \varnothing$. Мы получили противоречие. Следствие предложения 1 доказано.

Перейдем теперь к доказательству предложения 1.

Лемма 2. Пусть φ — совершенное отображение конечного типа пространства A на пространство B. Существует пространство C и отображения $\varphi_1 : A \longrightarrow C$ и $\varphi_2 : C \longrightarrow B$ такие, что:

1) φ_1 — монотонное* и замкнутое;
2) φ_2 — конечнократное и замкнутое;
3) следующая диаграмма комутативна.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Эта лемма хорошо известна. Наметим коротко ее доказательство В пространстве A рассмотрим следующее отношение эквивалентности: $x_1 R x_2$, если $\varphi x_1 = \varphi x_2$ и $Q(x_1) \ni x_2$ ($Q(x_1)$ — квазикомпонента точки x_1 в пространстве $\varphi^{-1}\varphi(x_1)$). Фактор-пространство пространства A по этому отношению эквивалентности обозначим через C, а естественная проекция—через φ_1. Отображение φ_2 определяется следующим образом: пусть $z \in C$, тогда $\varphi_2(z) = \varphi(\varphi_1^{-1}(z))$. Нетрудно проверит, что φ_1 и φ_2 удовлетворяют 1), 2), 3) леммы 2.

Легко доказывается следующая

Лемма 3. Пусть $X \in H$ и f — совершенное отображение пространства X на Y; тогда $Y \in H$.

Лемма 4. Пусть φ_1 — замкнутое и монотонное отображение па-

*Отображение называется монотонным, если прообраз любой точки при этом отображении — связное множество.

ракомпакта A на пространство C и $\max\limits_{q>0}(d_q(\varphi_1)+q)<\dim A$, тогда $\dim C\leq\dim A$.

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Лере отображения, φ_1 и пучка $\mathbf{Z}_V$ [5]: здесь $\mathbf{Z}$ — постоянный пучок со слоем группы целых чисел, $V=\varphi_1^{-1}U$, где U — открытое множество в пространстве C. Имеем $E_2^{p,q}=H^p(C,R^q f\mathbf{Z}_V)$. Нетрудно убедится, что если выполнено $p+q\geqq\dim X$ и $q>0$, то $E_2^{p,q}=0$. Так как E_∞ ассоциированно с $H^*(A,\mathbf{Z}_V)$, то $H^i(C,\mathbf{Z}_U)=0$, если $i\geqq\dim A+1$, т. е, $\dim C\leqq\dim A$. Лемма доказана.

Докажем теперь предложение 1.

По лемме 2 существует пространство Z и отображения $\varphi_1:X\to Z$ и $\varphi_2:Z\to Y$ для которых:

1) φ_1 — монотонное и совершенное отображение;
2) $\max\limits_{q>0}(d_q(\varphi_1)+q)<\dim X$;
3) φ_2 — конечнократно и замкнуто;
4) $\varphi_2\varphi_1=f$.

По лемме 3 пространство Z принадлежит H.

Из леммы 4 следует, что $\dim Y\geqq\dim X+k\geqq\dim Z+k$. По следствию к предложению 1 $\mu(y,\varphi_2)$ принимает по крайней мере $(k+1$ различных значений. Так как $\varphi_2\varphi_1=f$ и φ_1 — монотонно, то $\mu(y,f)=\mu(y,\varphi_2)$. Предложение 1 доказано.

Наконец коротко докажем следующее

Предложение 2. Пусть $X\in H$, а Y — слабопаракомпактное пространство. Если f — замкнутое конечнократное отображение X на Y, для которого $\mu(y,f)=k$ для всякой точки $y\in Y$, то $\dim Y\leq\dim X$.

Доказательство. Так как $X\in H$, то в X существует счетная система замкнутых локально-конечных покрытий, разделяющая точки — $F_i=\{F_\alpha^i\}$. Через Y^i обозначим следующее множество точек в пространстве Y: $y\in Y^i$, если $f^{-1}y=\bigcup\limits_{j=1}^{k}x_j$ и в покрытии F_j существуют попарно непересекающиеся множества $F_{\alpha j}^i$ такие, что $F_{\alpha j}^i\ni x_j$.

Через $F_i(y)$ обозначим $\bigcap\limits_{j=1}^{k}f(F_{\alpha j}^i)$, если $x_j\in F_{\alpha j}^i$.* Как в предложении 1 доказывается, что Y^i покрыто локально-конечной системой замкнутых множеств $\{F_i(y)\}_{y\in Y^i}$. Следовательно, Y^i — замкнутое множество в пространстве Y и $Y=\bigcup\limits_i Y^i$.

---

* Точнее для всякой $y\in Y^i$ фиксируем в покрытии F^i множества разделяющие точки $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ $(f^{-1}y=\bigcup\limits_{j=1}^{k}x_j)$ и образуем $F_i(y)$.

Нетрудно проверить, что $\dim F_i(y) \leqq \dim X$.

Так как Y^i замкнуто в Y, то Y^i слабо паракомпактно, следовательно, $\operatorname{loc}\dim Y^i = \dim Y^i$ [4]. Так как Y^i покрыто локально-конечной системой замкнутых множеств $\{F_i(y)\}_{y \in Y^i}$ и $\dim F_i(y) \leqq \dim X$, то $\operatorname{oc}\dim Y^i \leqq \dim X$. Наконец из теоремы о счетной сумме размерности dim следует, что $\dim Y \leqq \sup \dim Y^i$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн, И. А., О повышающих размерность отображеньях. Докл. АН СССР, **67** (1949), 9 — 12.
2. Вайнштейн, И. А., Каждан, Я. М., Конечнократные отображения, повышающие размерность. Изв АН СССР. сер. мат., **8** (1944), № 3, 129—138.
3. Каждан, Я. М., О непрерывных отображениях, повышающих размерность. Докл. АН СССР, **67** (1949), 19-22.
4. Зарелуа, А. В., О теореме Гуревича. Докл. АН СССР, **141** (1961), 777—780.
5. Годеман, Р., Алгебрическая топология и теория пучков. М., Ин. лит. 1961.
6. Скордев Г., Об отображениях, повышающих размерность. Матем. заметки, **7** (1970), 6.
7. Чобан, М., Некоторые метризационные теоремы для перистых пространств, Докл. АН СССР, **173** (1967), 6.
8. Aleksandroff, P. S.: On the dimension of normal spaces, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, (1947) 89, II, 8-36.
9. Dowker, C. H.: Local dimension of normal spaces. Quart. J. Math., I (1955), 22 101—120.
10. Engelking, R., Outline of general topology. North Holland publ. comp, Amsterdam, 1968.
11. Hurewitz, W., Über stetige Bilder von Punktmengen, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser. A, **30** (1927), I, 159—165.
12. Keesling, J.: Mappings and dimension in general metric spaces. Pacif. Journ. Math., **25** (1968), 2.
13. Mikael, E., Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 822—828.

Постъпила на 19. IV. 1971 г.

ON THE THEOREM OF HUREWITZ

G. Skordev

(SUMMARY)

In the category of paracompact spaces which can be mapped continuously and injectively onto metric spaces is proved the following theorem:

Let f isaclosed map of the space X on Y. If

$$\dim Y \geqq \dim X + k,$$

then exist such $(k+1)$-points $y_0, y_1, \ldots, y_k$ in Y that

$$\operatorname{card} f^{-1} y_i \neq \operatorname{card} f^{-1} y_j, \quad i \neq j.$$