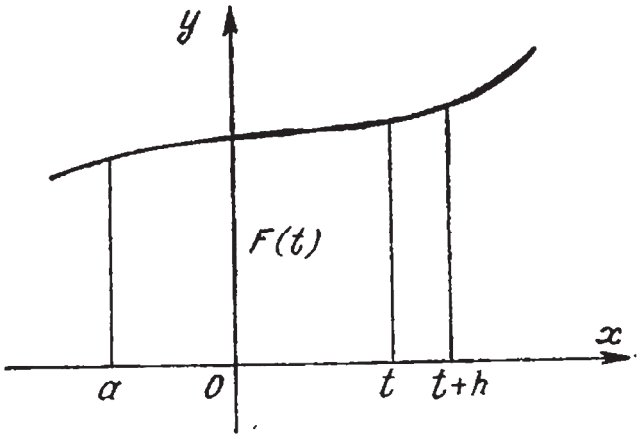
ИЗЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРИЯТА НА ЕЛИПТИЧНИТЕ ФУНКЦИИ НА ЯКОБИ В РЕАЛНА ОБЛАСТ С ЕЛЕМЕНТАРНИ СРЕДСТВА

Димитричка Шопова

Целта, която си поставяме в настоящата работа, е да изложим теорията на елиптичните функции на Якоби в реална област, като използуваме само знанията по математика, давани във всяко средно училище. По-точно в нея ние използуваме само първи производни на функции на един аргумент, признаците за монотонност и понятието лице на равнинна фигура. Това прави въпроса достъпен и за ученици.

Нека отбележим, че от признаците за монотонност следва, че ако една функция има производна нула в един интервал, то тази функция едновременно е и монотонно растяща, и монотонно намаляваща, т. е. е константа в този интервал. Освен това ще добавим, че ако производната е строго положителна, функцията е строго растяща. За доказателство е достатъчно да отбележим, че ако в две точки x_1 и x_2 тази функция приема равни стойности, то поради монотонността ѝ тя ще бъде константа между x_1, x_2 и следователно производната ѝ между тях ще е нула, което противоречи на условието, че тази производна е строго положителна.



Черт. 1

В изложението ще използуваме и следната теорема:

Нека $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната, неотрицателна и монотонно растяща функция в някой интервал Δ (черт. 1). Да означим с $F(t)$ лицето на фигурата, заградена от абсцисната ос, графиката на функцията $f(x)$ и правите линии $x=a$ и $x=t$, където a и t са точки от Δ и $a \leq t$. Ще докажем, че $F(t)$ има производна и тя е $f(t)$.

Образуваме диференчното частно $\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$.

Ако $h>0$, то $F(t+h)-F(t)$ е лицето на ивицата от интересуващата

ни фигура с основа $[t, t+h]$. Понеже $f(x)$ е монотонно растяща, това лице е заключено между лицата на двата правоъгълника със същата основа и височина съответно $f(t)$ и $f(t+h)$. Тук използуваме свойството, че лицето на част от една фигура не надминава лицето на цялата фигура). Получаваме

$$hf(t) \leqq F(t+h) - F(t) \leqq h \,.\, f(t+h),$$

$$f(t) \leqq \frac{(F(t+h)-F(t)}{h} \leqq f(t+h).$$

От непрекъснатостта на $f(x)$ имаме $\lim\limits_{h\to 0} f(t+h) = f(t)$.

Тъй че

$$\lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = f(t).$$

Ако $h<0$, то $F(t+h)<F(t)$; $f(t+h) \leqq f(t)$. Лицето на ивицата от интересуващата ни фигура с основа $[t+h, t]$ ще бъде $F(t)-F(t+h)$. То ще бъде заградено между лицата на двата правоъгълника със същата основа и височина, съответно $f(t+h)$ и $f(t)$, т. е.

$$-hf(t+h) \leqq F(t) - F(t+h) \leqq -h.f(t),$$

$$f(t+h) \leqq \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \leqq f(t).$$

Тъй че и

$$\lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = f(t).$$

Следователно съществува $F'(t)$ и тя е $f(t)$.

След тези предварителни бележки ще минем към разглеждане на елиптичните функции на Якоби. Ще излизаме от следната дефиниция:

Елиптични функции на Якоби ще наричаме тройка функции sn u, cn u, dn u, дефинирани и диференцируеми върху цялата реална ос, които изпълняват условията

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, && \operatorname{sn} 0 = 0; \\ (1)\qquad &\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, && \operatorname{cn} 0 = 1; \\ &\operatorname{dn}' u = -K^2 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, && \operatorname{dn} 0 = 1 \end{aligned}$$

за всяко u. Тук K е реална константа, подчинена на условието $0<K<1$

Ние ще покажем, че такива функции съществуват и че са единствени.

Съществуване

1) Нека

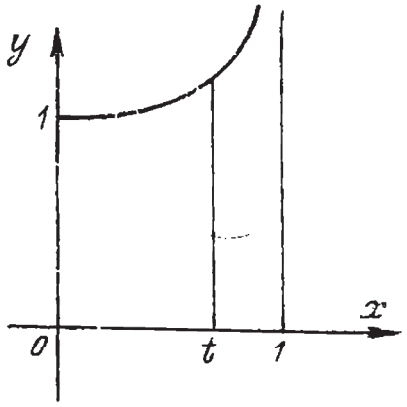
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}.$$

Тази функция е дефинирана, непрекъсната, неотрицателна и растяща при $x \in [0,1)$. Според разгледаната теорема лицето на фигурата (черт. 2.), заградена от графиката на $f(x)$, координатните оси и правата $x=t$ при $t \in [0,1)$, представлява функция на t с производна

$$F'(t)=\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}.$$

При това $F(0)=0$.

Ще покажем, че функцията $F(t)$ е ограничена отгоре. За тази цел ще използуваме неравенството



Черт. 2

$$(2)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

при $0 \leqq x < 1$.

Означаваме с $S(t)$ лицето на частта от равнината, заградена от графиката на функцията

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

координатните оси и правата $x=t$, където $0 \leqq t < 1$.

Съгласно разгледаната теорема

$$(3)\qquad S'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Освен това $S(0)=0$. Това ни дава възможност да заключим, че

$$(4)\qquad F(t) \leqq S(t).$$

И наистина да разгледаме разликата

$$\varphi(t)=S(t)-F(t).$$

Тази разлика монотонно расте, защото от (2) имаме, че $\varphi'(t) \geqq 0$. От друга страна, $\varphi(0)=0$ и следователно при $t \geqq 0$ имаме $\varphi(t) \geqq 0$.

Ние обаче можем да пресметнем $S(t)$: От (3) заключаваме, че функцията

$$S(t)=\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}(-2)\sqrt{1-t}$$

е константа при $0 \leq t < 1$, защото производната ѝ е нула. За да пресметнем тази константа, полагаме $t=0$. Това ни дава

$$S(t) + \frac{2}{\sqrt{1-K^2}}\sqrt{1-t} = \frac{2}{\sqrt{1-K^2}},$$

$$S(t) = \frac{2}{\sqrt{1-K^2}} - \frac{2}{1-K^2}\sqrt{1-t}\,.$$

Намираме, че

$$\lim_{\to 1,\, t<1} S(t) = \frac{2}{\sqrt{1-K^2}},$$

$$S(t) \leq \frac{2}{\sqrt{1-K^2}}.$$

Оттук и от неравенството (4) получаваме

$$F(t) \leq \frac{2}{\sqrt{1-K^2}}.$$

След като доказахме ограничеността на $F(t)$, лесно може да покажем с помощта на знанията от средното училище, че съществува границата $\lim\limits_{t\to 1} F(t)$. За целта вземаме произволна редица

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots$$

клоняща към 1, с членове, по-малки от 1. Съответната редица от функционни стойности

$$F(t_1),\ F(t_2),\ \ldots,\ F(t_n),\ \ldots$$

е монотонно растяща и ограничена отгоре, следователно е сходяща. Да означим нейната граница с S_0. Тогава, ако дефинираме $F(1)$ като S_0, ще получим функция $F(t)$, дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [0,1].

Функцията $u=F(t)$ е строго растяща, защото производната ѝ съществува и е строго положителна в интервала [0,1). Поради това $F(t)$, като описва интервала $[0,S_0]$, не повтаря стойностите си. Така че на всяко $u \in [0,S_0]$ отговаря точно една стойност на $t \in [0,1]$, за която $F(t)=u$. По такъв начин получаваме функция на u, дефинирана в интервала $[0,S_0]$. Ще я означим с $t=\operatorname{sn} u$. Тя има свойството

$$F(\operatorname{sn} u) = u \tag{5}$$

за всяко $u \in [0,S_0]$. Тя съвпада със съответната елиптична функция на Якоби, разглеждана в този интервал. За да покажем това, ще ни трябват някои свойства на току-що дефинираната фунция $\operatorname{sn} u$.

От условието (5) получаваме $F(\operatorname{sn} 0)=0$. От друга страна, $F(t)=0$ само при $t=0$. Тъй че

$$\operatorname{sn} 0 = 0.$$

От $F(\operatorname{sn} S_0)=S_0$ и факта, че $F(t)=S_0$ само при $t=1$, следва

$$\operatorname{sn} S_0=1.$$

Функцията $\operatorname{sn} u$ е строго растяща. И наистина нека $0\leqq u_1<u_2\leqq S_0$. Да допуснем, че $\operatorname{sn} u_1\geqq \operatorname{sn} u_2$. Тогава от обстоятелството, че $F(t)$ е растяща, следва, че $F(\operatorname{sn} u_1)\geqq F(\operatorname{sn} u_2)$, т. е. $u_1\geqq u_2$, което противоречи на даденото.

Оттук можем да заключим, че при $0<u<S_0$,

$$0=\operatorname{sn} 0<\operatorname{sn} u<\operatorname{sn} S_0=1.$$

Ще докажем, че $\operatorname{sn} u$ е непрекъсната в цялата си дефиниционна област $[0, S_0]$.

Нека u_n и u_0 са числа от интервала $[0,S_0]$ и редицата с общ член u_n клони към u_0. Искаме да докажем, че редицата с общ член $\operatorname{sn} u_n$ има граница $\operatorname{sn} u_0$.

Да означим $\operatorname{sn} u_n=t_n$, $\operatorname{sn} u_0=t_0$. Следователно $u_0=F(t_0)$, $u_n=F(t_n)$, т. е. u_n е лицето на фугурата, определена от правата $x=t_n$, а u_0 — на фигурата, определена от $x=t_0$. При тези означения трябва да докажем, че редицата с общ член t_n клони към t_0. И наистина $|u_n-u_0|$ е лицето на ивицата, заключена между правите $x=t_n$ и $x=t_0$. Това лице е по-голямо от лицето на правоъгълника с основа $|t_n-t_0|$ и височина 1. Тъй че

$$|t_n-t_0|\cdot 1<|u_n-u_0|.$$

Сега ще докажем, че $\operatorname{sn} u$ е диференцируема и ще намерим производната ѝ за всяко $u\in[0,S_0)$, а после и при $u=S_0$.

Нека $u\in[0,S_0)$. Да означим

$$\operatorname{sn}(u_0+h)-\operatorname{sn} u_0=p,\ \operatorname{sn} u_0=t_0,\ h\neq 0.$$

Следва

$$\operatorname{sn}(u_0+h)=t_0+p.$$

Тъй че

$$u_0+h=F(t_0+p),$$

$$h=F(t_0+p)-F(t_0).$$

При това $p\neq 0$, защото ако $p=0$, то $\operatorname{sn}(u_0+h)=\operatorname{sn} u_0$ и следователно $u_0+h=u_0$, т. е. $h=0$, а по условие $h\neq 0$. Тъй че

$$\frac{\operatorname{sn}(u_0+h)-\operatorname{sn} u_0}{h}=\frac{1}{\dfrac{F(t_0+p)-F(t_0)}{p}}.$$

От непрекъснатостта на $\operatorname{sn} u$ следва, че $\lim\limits_{h\to 0} p=\lim\limits_{h\to 0}[\operatorname{sn}(u_0+h)-\operatorname{sn} u_0]=0$. От друга страна, знаем, че

$$\lim_{p\to 0}\frac{F(t_0+p)-F(t_0)}{p}=F'(t_0)=\frac{1}{\sqrt{(1-t_0^2)(1-K^2t_0^2)}}\neq 0$$

за всяко $0 \leqq t_0 < 1$.

Понеже $u_0 < S_0$, то $t_0 = \operatorname{sn} u_0 < 1$. Тъй че

$$\operatorname{sn}' u_0 = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sn}(u_0+h) - \operatorname{sn} u_0}{h} = \frac{1}{F'(t_0)} = \sqrt{(1-t_0^2)(1-k^2 t_0^2)}$$

$$= \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u_0)(1-K^2 \operatorname{sn}^2 u_0)}.$$

Сега ще докажем, че $\operatorname{sn} u$ има производна и при $u = S_0$, като и за нея е вярно равенството

$$\operatorname{sn}' u = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-K^2 \operatorname{sn}^2 u)},$$

т. е. ще докажем, че $\operatorname{sn}' S_0 = 0$. И наистина $F(1+p)$ е дефинирана само при $p < 0$. При това от свойствата на лицата имаме

$$F(1) - F(1+p) > -p \cdot \frac{1}{\sqrt{[1-(1+p)^2][1-K^2(1+p)^2]}}.$$

Оттук получаваме

$$\frac{F(1+p)-F(1)}{p} > \frac{1}{\sqrt{(-p^2-2p)[1-K^2(1+p)^2]}}.$$

Следователно

$$\left| \frac{\operatorname{sn}(S_0+h) - \operatorname{sn} S_0}{h} = \frac{1}{\frac{F(1+p)-F(1)}{p}} \right| < \sqrt{(-p^2-2p)[1-K^2(1+p)^2]},$$

откъдето следва

$$\operatorname{sn}' S_0 = 0.$$

2) Въвеждаме функциите

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u}.$$

Те съвпадат с другите две елиптични функции на Якоби в интервала $[0, S_0]$. За да се убедим в това, ще разгледаме някои техни свойства.

$$\operatorname{cn} 0 = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 0} = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = \sqrt{1-K^2 \operatorname{sn}^2 0} = 1,$$

$$\operatorname{cn} S_0 = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 S_0} = 0, \qquad \operatorname{dn} S_0 = \sqrt{1-K^2 \operatorname{sn}^2 S_0} = \sqrt{1-K^2}.$$

Понеже $\operatorname{sn} u$ е строго растяща, то $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ са строго намаляващи и

$$\operatorname{cn} u \in [0, 1] \qquad \operatorname{dn} u \in [\sqrt{1-K^2}, 1].$$

Понеже $\operatorname{sn} u$ е непрекъсната, то и $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ са непрекъснати. Понеже $\operatorname{sn} u$ е диференцируема, то $\operatorname{dn} u$ е също диференцируема и

$$\operatorname{dn}' u = \frac{-K^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}' u}{\sqrt{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u}} = -K^2 \frac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u}} \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-K^2 \operatorname{sn}^2 u)} =$$

$$= -K^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Функцията $\operatorname{cn} u = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}$ е също диференцируема при $u \in [0, S_0)$ и

$$\operatorname{cn}' u = \frac{-\operatorname{sn} u}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}} \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-K^2 \operatorname{sn}^2 u)} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

Ще покажем, че и $\operatorname{cn}' S_0$ съществува и изпълнява същото равенство

$$\operatorname{cn}' S_0 = -\operatorname{sn} S_0 \operatorname{dn} S_0 = -\sqrt{1-K^2}.$$

Да образуваме диференчното частно

$$\frac{\operatorname{cn}(S_0+h) - \operatorname{cn} S_0}{h} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(S_0+h)}}{h} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sn}(S_0+h)}}{h} \sqrt{1+\operatorname{sn}(S_0+h)}.$$

Тук $h<0$.

Да означим $1-\operatorname{sn}(S_0+h) = v$. Следва

$$\operatorname{sn}(S_0+h) = 1-v,$$

$$S_0+h = F(1-v),$$

$$h = F(1-v) - S_0.$$

Геометрически

$$S_0 - F(1-v) = -h$$

представлява границата на лицето на фигурата $DCBA$, заградена отгоре от кривата линия $y = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$ при $t \to 1$. Лицето на тази фигура (черт. 3) е заключено между лицата на фигурите DCB_1A_1 и DCB_2A_2, които отгоре са заградени съответно с графиките на функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$, където

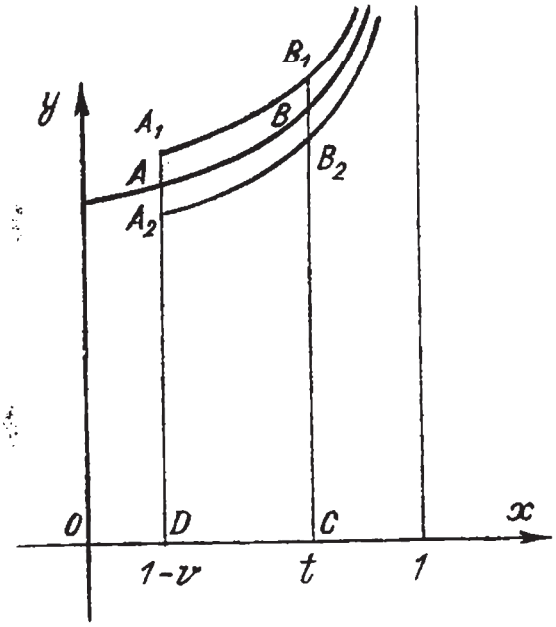
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}\sqrt{1-x}}; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}\sqrt{1-x}}.$$

И наистина точките на тези фигури имат абсциса x, подчинена на условието $1-v \leqq x \leqq t$. А за такива стойности на x са в сила неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}\sqrt{1-x}} > \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} > \frac{1}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}\sqrt{1-x}}.$$

Да означим лицето на фигурата DCB_1A_1 с $F_1(t)$, а на DCB_2A_2 — с $F_2(t)$. Тогава, ако въведем означенията $\frac{1}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}}=a$, $\frac{1}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}}=b$, можем да пишем

$$F_1'(t)=a\frac{1}{\sqrt{1-t}}, \qquad F_2'(t)=b\frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$



Черт. 3

Следователно

$$F_1(t)=-2a\sqrt{1-t}+C_1,$$

$$F_2(t)=-2b\sqrt{1-t}+C_2$$

за $t\in[1-v,\ 1)$.

Понеже $F_1(1-v)=0$, $F_2(1-v)=0$ то $C_1=2a\sqrt{v}$, $C_2=2b\sqrt{v}$.

Тъй че

$$F_1(t)=\frac{2}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}}[\sqrt{v}-\sqrt{1-t}],$$

$$F_2(t)=\frac{2}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}}[\sqrt{v}-\sqrt{1-t}].$$

Получаваме

$$\lim_{t\to 1}F_1(t)=\frac{2}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}}\sqrt{v},$$

$$\lim_{t\to 1}F_2(t)=\frac{2}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}}\sqrt{v}.$$

Тъй че от неравенствата $F_1(t)>F(t)-F(1-v)>F_2(t)$ следва

$$\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}}\geqq -h\geqq\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}}.$$

Оттук

$$\frac{\sqrt{(2-v)(1-K^2)}}{2\sqrt{v}}\leqq\frac{1}{-h}\leqq\frac{\sqrt{2[1-K^2(1-v)^2]}}{2\sqrt{v}}.$$

Нас ни интересува границата $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\mathrm{sn}(S_0+h)}}{h}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{v}}{h}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}$. Затова умножаваме двете страни на полученото неравенство с $-\sqrt{v}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}$. Получаваме

$$-\frac{1}{2}\sqrt{(2-v)(1-K^2)}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}\geqq\frac{\sqrt{v}}{h}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}$$

$$\geqq-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-K^2(1-v)^2}\sqrt{1+\mathrm{sn}(S_0+h)}.$$

При това

$$\lim_{h\to 0} v = \lim_{h\to 0}[1-\operatorname{sn}(S_0+h)] = 1-\operatorname{sn} S_0 = 0.$$

Така че

$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{(2-v)(1-K^2)}\sqrt{1+\operatorname{sn}(S_0+h)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2(1-K^2)}\sqrt{2} = -\sqrt{1-K^2},$$

$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-K^2(1-v)^2}\sqrt{1+\operatorname{sn}(S_0+h)}\right) = -\sqrt{1-K^2}.$$

Следователно съществува и границата

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cn}(S_0+h)-\operatorname{cn} S_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{v}}{h}\sqrt{1+\operatorname{sn}(S_0+h)} = -\sqrt{1-K^2}.$$

3) Ще разширим дефиниционната област на функциите $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ по следния начин:

За $\operatorname{sn} u$ приемаме

а) При $u\in[-S_0, 0]$, $\operatorname{sn} u = -\operatorname{sn}(-u)$.

Тук $\operatorname{sn}(-u)$ е дефинирана, защото $-u\in[0, S_0]$. Получаваме $\operatorname{sn} u\leqq 0$ в $[-S_0, 0]$.

б) При $u\in[S_0, 3S_0]$, $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(2S_0-u)$.

Тук $\operatorname{sn}(2S_0-u)$ е дефинирана, защото $2S_0-u\in[-S_0, S_0]$.

в) При $u\in[(4n-1)S_0, (4n+3)S_0]$, n цяло число, $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u-4n S_0)$. Тук $\operatorname{sn}(u-4n S_0)$ е дефинирана, защото

$$-S_0\leqq u-4n S_0\leqq(4n+3)S_0-4n S_0 = 3S_0.$$

По този начин $\operatorname{sn} u$ е дефинирана за всяко реално u, и то тъй, че има период $4S_0$.

Сега ще дефинираме $\operatorname{cn} u$ за всяко u:

а) При $u\in[-S_0, 0]$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(-u)$.

б) При $u\in[S_0, 3S_0]$, $\operatorname{cn} u = -\operatorname{cn}(2S_0-u)$ (т. е. $\operatorname{cn} u\leqq 0$ в този интервал).

в) При $u\in[(4n-1)S_0, (4n+3)S_0]$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u-4n S_0)$.

Така $\operatorname{cn} u$ има същия период $4S_0$ като $\operatorname{sn} u$.

Ще дефинираме и $\operatorname{dn} u$ за всяко u:

а) При $u\in[-S_0, 0]$ приемаме $\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(-u)$.

б) При $u\in[(2n-1)S_0, (2n+1)S_0]$ приемаме $\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u-2n S_0)$, т. е. дефинираме $\operatorname{dn} u$ с период $2S_0$.

Сега ще видим, че така дефинираните функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ в интервала $(-\infty, +\infty)$ са диференцируеми и производните им удовлетворяват условията (1).

И наистина, ако $u\in[-S_0, 0]$, то

$$\operatorname{sn} u = -\operatorname{sn}(-u);\quad \operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(-u);\quad \operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(-u).$$

Понеже $v=-u\in[0, S_0]$, то съществуват производните $\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}$; $\frac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv}$; $\frac{d\,\mathrm{dn}\,v}{dv}$ и те удовлетворяват условията (1). Следователно имат производни и функциите $\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}(-v)$; $\mathrm{cn}(-v)$; $\mathrm{dn}(-v)$ и за тях имаме

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}=\frac{d\,\mathrm{sn}(-v)}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=\frac{d(-\mathrm{sn}\,v)}{dv}(-1)=\mathrm{sn}'v=\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$

$$=\mathrm{cn}(-u)\mathrm{dn}(-u)=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du}=\frac{d\,\mathrm{cn}(-v)}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=-\mathrm{cn}'v=\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$

$$=\mathrm{sn}(-u)\,\mathrm{dn}(-u)=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du}=\mathrm{dn}'v\,.(-1)=-(-K^2\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)=K^2\,\mathrm{sn}(-u)cn(-u)=-K^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$$

Понеже функцията $\mathrm{dn}\,u$ има период $2S_0$, щом проверихме диференцируемостта ѝ и верността на (1) в $[-S_0, S_0]$, то за нея доказателството е завършено.

Нека $u\in[S_0, 3S_0]$. Имаме

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}(2S_0-u);\quad \mathrm{cn}\,u=-\mathrm{cn}(2S_0-u).$$

Тогава $v=2S_0-u\in[-S_0, S_0]$. От съществуването на производните $\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}$, $\frac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv}$ и верността на (1) за тях следва съществуването на производните

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}=\frac{d\,\mathrm{sn}(2S_0-v)}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}(-1)=-\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$

$$=-\mathrm{cn}(2S_0-u)\,\mathrm{dn}(2S_0-u)=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du}=\frac{d\,\mathrm{cn}(2S_0-v)}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=\frac{d(-\mathrm{cn}\,v)}{dv}(-1)=\frac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv}$$

$$=-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v=-\mathrm{sn}(2S_0-u)\,\mathrm{dn}(2S_0-u)=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

И така показахме, че съществуват функции, дефинирани и диференцируеми за всяко реално число, които изпълняват условията (1).

Събирателните формули на елиптичните функции на Якоби

За да докажем единствеността на функциите, дефинирани с условията (1), ще използуваме събирателните формули на елиптичните функции на Якоби. За да изведем тези формули, предварително

ще докажем, че щом една тройка функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ изпълняват условията (1), то за тях са в сила равенствата

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1,$$

$$(6) \qquad K^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{dn}^2 u - K^2 \operatorname{cn}^2 u = 1 - K^2.$$

За целта образуваме функцията

$$\varphi(u) = \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u,$$

дефинирана и диференцируема за всяко u. Понеже

$$\varphi'(u) = 2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - 2 \operatorname{cn} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = 0,$$

то $\varphi(u) = C$ за всяко u. Тъй като $\varphi(0) = 1$, то

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1.$$

По подобен начин се доказват и другите две равенства.

От тези равенства следва, че

$$|\operatorname{sn} u| \leqq 1; \quad |\operatorname{cn} u| \leqq 1; \quad \sqrt{1-K^2} \leqq |\operatorname{dn} u| \leqq 1.$$

Сега ще минем към доказателството на важните събирателни формули

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

(7)

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - K^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

За целта ще означим $u+v=a$ и ще образуваме помощната функция

$$\varphi(u) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(a-u) \operatorname{dn}(a-u) + \operatorname{sn}(a-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)}.$$

$\varphi(u)$ е дефинирана и диференцируема за всяко u и $\varphi'(u) = 0$ за всяко u. И наистина

$$\varphi'(u) = \frac{1}{[1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]^2} [\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}(a-u) \operatorname{dn}(a-u) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-$$

$$-u) \operatorname{dn}^2(a-u) + K^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2(a-u) \operatorname{sn}(a-u) - \operatorname{cn}(a-u) \operatorname{dn}(a-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

$$- \operatorname{sn}(a-u) \operatorname{sn} u \operatorname{dn}^2 u - K^2 \operatorname{sn}(a-u) \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn} u][1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]$$

$$+K^2[\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(a-u)\operatorname{dn}(a-u)+\operatorname{sn}(a-u)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u][2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}^2(a-u)$$

$$-2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}(a-u)\operatorname{cn}(a-u)\operatorname{dn}(a-u)]=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-u)}{[1-K^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2(a-u)]^2}([\operatorname{dn}^2(a-u)+K^2\operatorname{cn}$$

$$(a-u)-\operatorname{dn}^2 u-K^2\operatorname{cn}^2 u][1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]+2K^2[\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)$$

$$-\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2(a-u)\operatorname{dn}^2(a-u)])=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-u)}{[1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]^2})2K^2[\operatorname{cn}^2(a-u)-\operatorname{cn}^2 u].[1-$$

$$-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]+2K^2[\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)-\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2(a-u)\operatorname{dn}^2(a-u))$$

$$=\frac{2K^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-u)}{[1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]^2}(\operatorname{cn}^2(a-u)[1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)-\operatorname{sn}^2 u\operatorname{dn}^2(a-u)]-\operatorname{cn}^2 u$$

$$[1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)-\operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)])=2K^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-$$

$$-u)\frac{\operatorname{cn}^2(a-u)(1-\operatorname{sn}^2 u)-\operatorname{cn}^2 u(1-\operatorname{sn}^2(a-u))}{[1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)]^2}=0.$$

Следователно $\varphi(u)=\varphi(0)=\operatorname{sn} a=\operatorname{sn}(u+v)$,

с което първото равенство на (7) е доказано.

Забележка. Да обърнем внимание, че при направените пресмятания ние използувахме факта, че функциите $\operatorname{sn}(a-u)$, $\operatorname{cn}(a-u)$, $\operatorname{dn}(a-u)$ изпълняват условията (1) и следствията им, без да използуваме някакви техни връзки с функциите $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

За доказване на втората събирателна формула ще образуваме функцията

$$\varphi_1(u)=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(a-u)-\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-u)\operatorname{dn} u \operatorname{dn}(a-u)}{1-K^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(a-u)}.$$

Да означим

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a-u)=x; \qquad \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(a-u)=y; \qquad \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(a-u)=z.$$

Тогава

$$\varphi_1(u)=\frac{y-xz}{1-K^2x^2},$$

$$\varphi_1'(u)=\frac{(y'-x'z-xz')(1-K^2x^2)+K^2 2xx'(y-xz)}{(1-K^2x^2)^2}.$$

Ще преобразуваме числителя, като групираме членовете с еднакви степени.

$$-K^2x^2x'z+K^2x^3z'=K^2x^2[xz'-x'z]$$

$$=K^2x^2[K^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2(a-u)\operatorname{dn} u \operatorname{cn}(a-u]-K^2\operatorname{dn}(a-u)\operatorname{cn} u \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}(a-u)$$

$$-\operatorname{sn}(a-u)\operatorname{cn} u \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}(a-u)+\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(a-u)\operatorname{dn}^2(a-u)\operatorname{dn} u]$$

$$=K^2x^2[\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}(a-u)-\operatorname{sn}(a-u)\operatorname{cn} u \operatorname{dn}(a-u)]=-K^2x^2y'$$

$$2K^2xx'y-2K^2x^2y'=2K^2x[x'y-xy']$$

$$=2K^2x[\mathrm{sn}(a-u)\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}(a-u)\mathrm{dn}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}^2(a-u)\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}(a-u)$$
$$+\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}(a-u)\mathrm{cn}(a-u)\mathrm{dn}\,u - \mathrm{sn}^2(a-u)\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}(a-u)]$$
$$=2K^2x[\mathrm{sn}(a-u)\mathrm{cn}(a-u)\mathrm{dn}\,u-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(a-u)]=2K^2x\,\frac{z'}{K^2}=2xz'.$$

Тъй че

$$\varphi_1'(u)=\frac{y'-x'z+xz'}{(1-K^2x^2)^2}=\frac{y'-y'}{(1-K^2x^2)^2}=0.$$

Следователно

$$\varphi_1(u)=\varphi_1(0)=\mathrm{cn}\,a=\mathrm{cn}(u+v).$$

За третата формула образуваме функцията

$$\varphi_2(u)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(a-u)-K^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,(a-u)\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(a-u)}{1-K^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(a-u)}$$
$$=\frac{z-K^2xy}{1-K^2x^2}.$$
$$\varphi_2'(u)=\frac{(z'-K^2x'y-K^2xy')(1-K^2x^2)+2K^2xx'(z-K^2x)}{(1-K^2x^2)^2}.$$

Правим преобразувания, подобни на тези при предходната формула

$$-K^4x'x^2y+K^4x^3y'=K^4x^2(xy'-x'y)=-K^4x^2\frac{z'}{K^2}=-K^2x^2z'$$
$$2K^2xx'z-2K^2x^2z'=2K^2x(x'z-xz')=2K^2xy'.$$

Получаваме

$$\varphi_2'(u)=\frac{z'-K^2x'y+K^2xy'}{(1-K^2x^2)^2}=\frac{z'-K^2\frac{z'}{K^2}}{(1-K^2x^2)^2}=0.$$

Тъй че

$$\varphi_2(u)=\varphi_2(0)=\mathrm{dn}a=\mathrm{dn}(u+v).$$

Четност на елиптичните функции

Сега като следствия от доказаните събирателни формули ще докажем, че $\mathrm{sn}\,u$ е нечетна функция, а $\mathrm{cn}\,u$ и $\mathrm{dn}\,u$ са четни.

Нека в събирателните формули положим $v=-u$. Получаваме

$$\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(-u)\mathrm{dn}(-u)+\mathrm{sn}(-u)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u=0,$$
$$(8)\qquad \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(-u)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(-u)\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,(-u)=1-K^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{su}^2(-u),$$
$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,(-u)-K^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(-u)\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,(-u)$$
$$=1-K^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(-u).$$

Ще решим тази система относно $\operatorname{sn}(-u)$, $\operatorname{cn}(-u)$, $\operatorname{dn}(-u)$.

Ще използуваме означенията

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(-u)=x; \quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(-u)=y; \quad \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(-u)=z.$$

От вторите две уравнения на системата (8) имаме

$$y-xz=z-K^2xy.$$

1) Ако $x+1\neq 0$, получаваме

$$z=\frac{y+K^2xy}{1+x}.$$

Заместваме z в последното уравнение на (8). Получаваме

$$\frac{y+K^2xy}{1+x}-K^2xy=1-K^2x^2.$$

Оттук намираме

$$y=\frac{(1-K^2x^2)(1+x)}{1+K^2x-K^2x-K^2x^2}=1+x,$$

$$z=1+K^2x.$$

Ще използуваме равенството $y=1+x$ и първото от свойствата (6). Получаваме

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(-u)-\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(-u)=1,$$

(9)

$$\operatorname{sn}^2(-u)+\operatorname{cn}^2(-u)=1.$$

Понеже $x+1\neq 0$, то $y=\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(-u)\neq 0$, т. е. $\operatorname{cn} u\neq 0$.
Тъй че

$$\operatorname{cn}(-u)=\frac{1+x}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sn}^2(-u)+\frac{(1+x)^2}{\operatorname{cn}^2 u}=1.$$

Последното равенство дава последователно

$$\operatorname{sn}^2(-u)\operatorname{cn}^2 u+1+2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(-u)+\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(-u)=\operatorname{cn}^2 u,$$

$$\operatorname{sn}^2(-u)+2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(-u)+\operatorname{sn}^2 u=0,$$

$$(\operatorname{sn}(-u)+\operatorname{sn} u)^2=0,$$

$$\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn} u.$$

От системата (9) получаваме

$$\operatorname{cn} u \quad \operatorname{cn}(-u)=1-\operatorname{sn}^2 u=\operatorname{cn}^2 u,$$

$$\operatorname{cn} u\,[\operatorname{cn}(-u)-\operatorname{cn} u]=0.$$

От $\operatorname{cn} u \neq 0$ следва

$$\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u.$$

От първото равенство на (8) получаваме

$$\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn}(-u) - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = 0,$$

$$\operatorname{sn} u[\operatorname{dn}(-u) - \operatorname{dn} u] = 0.$$

Ако $\operatorname{sn} u \neq 0$, то $\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$. Ако $\operatorname{sn} u = 0$, то от третото равенство на (8) имаме $\operatorname{dn} u \operatorname{dn}(-u) = 1$.

И тъй като от второто равенство на (6) при $\operatorname{sn} u = 0$ имаме $\operatorname{dn}^2 u = 1$, $\operatorname{dn}^2(-u) = 1$, то $|\operatorname{dn} u| = 1 = |\operatorname{dn}(-u)|$. Но $\operatorname{dn} u \operatorname{dn}(-u) = 1$, следва $\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(-u)$.

2) Ако $x + 1 = 0$, т. е. $\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(-u) = 0$, то от $|\operatorname{sn} u| \leq 1$ следва $|\operatorname{sn} u| = |\operatorname{sn}(-u)| = 1$. Тъй че

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u.$$

Същевременно $\operatorname{cn}^2(\pm u) = 1 - \operatorname{sn}^2 u = 0$. Следователно

$$\operatorname{cn}(-u) = 0 = \operatorname{cn} u.$$

От последното уравнение на (8) получаваме $\operatorname{dn} u \operatorname{dn}(-u) = 1 - K^2 > 0$, а от условията (6) $\operatorname{dn}^2 u = 1 - K^2 = \operatorname{dn}^2(-u) \neq 0$.
Следователно

$$\operatorname{dn}^2 u = \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(-u); \quad \operatorname{dn} u[\operatorname{dn} u - \operatorname{dn}(-u)] = 0,$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(-u) = \sqrt{1 - K^2}.$$

Единственост на елиптичните функции на Якоби

Да допуснем, че $S(u)$, $C(u)$, $D(u)$ са други функции, дефинирани и диференцируеми върху цялата реална ос, които изпълняват условията $S(0) = 0$; $C(0) = 1$; $D(0) = 1$;

$$S'(u) = C(u)D(u); \quad C'(u) = -S(u)D(u); \quad D'(u) = -K^2 S(u)C(u).$$

Тогава те ще имат всички свойства, които получихме като следствия от тези условия.

При извеждането на събирателните формули ние образувахме функция $\varphi(u)$, за която установихме, че $\varphi'(u) = 0$ за всяко реално u. Там отбелязахме, че при направените за целта пресмятания сме използували факта, че $\operatorname{sn}(a-u)$, $\operatorname{cn}(a-u)$, $\operatorname{dn}(a-u)$ изпълняват условията (1) без да използуваме техните връзки със $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Затова и функцията.

$$F(u) = \frac{\operatorname{sn} u\, C(-u)\, D(-u) + S(-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(-u)}$$

се подчинява на същите пресмятания и дава $F'(u)=0$ за всяко u. Същото важи и за пресмятанията, правени за извеждането на формулите за $\operatorname{cn}(u+v)$ и $\operatorname{dn}(u+v)$.

Така получаваме

$$\frac{\operatorname{sn} u\, C(-u)\, D(-u)+S(-u)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(-u)}=F(0)=0,$$

$$\frac{\operatorname{cn} u\, C(-u)-\operatorname{sn} u\, S(-u)\operatorname{dn} u\, D(-u)}{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(-u)}=1,$$

$$\frac{\operatorname{dn} u\, D(-u)-K^2 \operatorname{sn} u\, S(-u)\operatorname{cn} u\, C(-u)}{1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(-u)}=1.$$

Като използуваме четността и нечетността на $S(u)$, $C(u)$, $D(u)$, получаваме

$$\operatorname{sn} u\, C(u)D(u)-S(u)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u=0,$$

$$\operatorname{cn} u\, C(u)+\operatorname{sn} u\, S(u)\operatorname{dn} u\, D(u)=1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u),$$

$$\operatorname{dn} u\, D(u)+K^2 \operatorname{sn} u\, S(u)\operatorname{cn} u\, C(u)=1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u).$$

Елиминираме $D(u)$ от последните две уравнения. Получаваме

$$\operatorname{cn} u\, C(u)[1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u)]=[1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u)]\,[1-\operatorname{sn} u\, S(u)].$$

Оттук

$$\operatorname{cn} u\, C(u)+\operatorname{sn} u\, S(u)=1.$$

Елиминираме $C(u)$ от същите две уравнения. Получаваме

$$\operatorname{dn} u\, D(u)[1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u)]=[1-K^2 \operatorname{sn}^2 u\, S^2(u)][1-K^2 \operatorname{sn} u\, S(u)].$$

Оттук

$$\operatorname{dn} u\, D(u)+K^2 \operatorname{sn} u\, S(u)=1.$$

За да получим връзка между $S(u)$ и $\operatorname{sn} u$, елиминираме $C(u)$ и $\operatorname{cn} u$ от системата

$$\operatorname{sn} u\, S(u)+\operatorname{cn} u\, C(u)=1,$$

$$S^2(u)+C^2(u)=1.$$

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1.$$

Получаваме последователно :

$$S^2(u)\operatorname{cn}^2 u+[1-\operatorname{sn} u\, S(u)]^2=\operatorname{cn}^2 u,$$

$$S^2(u)\operatorname{cn}^2 u+1-2\operatorname{sn} u\, S(u)+\operatorname{sn}^2 u\, S^2(u)-\operatorname{cn}^2 u=0.$$

$$S^2(u)-2\operatorname{sn} u\, S(u)+\operatorname{sn}^2 u=0.$$

Следва

$$S(u)=\operatorname{sn} u.$$

Тогава от същата система имаме

$$\operatorname{cn} u C(u) = 1 - S^2(u) = 1 - \operatorname{sn}^2 u = C^2(u) = \operatorname{cn}^2 u.$$

Тъй че, ако $C(u)=0$, то и $\operatorname{cn} u = 0$, и, обратно, т. е.

$$C(u) = \operatorname{cn} u.$$

Ако $C(u) \neq 0$, то от $\operatorname{cn}(u) C(u) = C^2(u)$, следва

$$C(u) = \operatorname{cn} u.$$

Аналогично от равенството

$$\operatorname{dn} u\, D(u) + K^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

получаваме

$$\operatorname{dn} u\, D(u) = 1 - K^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 - K^2 S^2(u) = \operatorname{dn}^2 u = D^2(u).$$

Тъй че, ако $D(u)=0$, то и $\operatorname{dn} u = 0$, т. е.

$$D(u) = \operatorname{dn} u.$$

Ако $D(u) \neq 0$, то от $\operatorname{dn} u\, D(u) = D^2(u)$ следва

$$D(u) = \operatorname{dn} u.$$

Следователно функциите, които са дефинирани и диференцируеми върху реалната ос и удовлетворяват условията (1), са единствени. Тъй че дефинираните от нас по геометричен път функции съвпадат с елиптичните функции на Якоби върху реалната ос. И понеже нашите функции дефинирахме тъй, че да са периодични с период $4S_0$, то с това сме доказали и свойството периодичност на елиптичните функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер, Н. И.: Элементы теории эллиптических функции. Москва, 1970, стр. 91—105.
2. Янке, Е., Эмде, Ф., Леш, Ф. — Специальные функции. Москва, 1968, стр. 122—126.

Постъпила на 23. VI. 1971 г.

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI PAR DES MOYENS ELEMENTAIRES

D. Chopova

(RÉSUMÉ)

Nous considérons la théorie des fonctions elliptiques de Jacobi dans le domaine réel en utilisant uniquement les notions et les théorèmes de l'Analyse qui sont enseignés aux élèves de 11-ème classe dans les écoles en Bulgarie.