О ПОПЕРЕЧНИКАХ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКОМ КОМПАКТЕ

Тодор П. Боянов

Один из аппаратов приближения функций основан на использовании некоторой фиксированной последовательности n-мерных линейых подпространств исходного пространства. При этом можно ставить задачи о существовании и единственности элемента наилучшего приближения, об оценке наилучшего приближения для отдельной функции и для целого класса, о свойствах функции, вытекающих из поведения последовательности ее наилучших приближений и т. д. Другой круг вопросов возникает, если зафиксировать класс функций и рассматривать приближения при различном выборе n-мерных линейных подпространств. Колмогоровым [1] введено понятие n-поперечник, которое характеризует наилучшее приближение всего заданного класса функций при помощи линейных подпространств с размерностью не большей n. Поперечники множеств в функциональных банаховых пространствах исследуются в [2], [3]. Для одного пространства функций с метрикой хаусдорфова типа, не являющегося банаховым, найдены асимптотика [4; 150], а позже и точные значения поперечников [5].

Здесь рассматривается вопрос о сходимости последовательности $d_n(C_F)$ поперечников метризованного хаусдорфовой метрикой пространства C_F непрерывных функций на метрическом компакте F. Доказывается

Теорема. Последовательность $d_n(C_F)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда F локально связное множество.

Показывается также, что сходимость к нулю последовательности поперечников может быть сколь угодно медленной.

Определения

Пусть в метрическом пространстве R с расстоянием $\rho(x, y)$ задан компакт F. Обозначим через C_F линейное пространство непрерывных на F функций с расстоянием хаусдорфова типа [4]:

$$r(f, g)=\max\{\max_{x\in F}\min_{y\in F} \|f(x), g(y)\|, \max_{x\in F}\min_{y\in F} \|g(x), f(y)\|\},$$

где $$\|f(x), g(y)\| = \max\{\rho(x, y), |f(x)-g(y)|\}, f\in C_F, g\in C_F.$$

Это расстояние не согласовано с линейными операциями и поэтому C_F не есть пространство Банаха.

Расстояние $r(f, G)$ между $f \in C_F$ и множеством $G \subset C_F$, отклонение $\delta(G)$ всего пространства C_F от множества $G \subset C_F$ и n-поперечник $d_n(C_F)$ пространства C_F определяются следующим образом:

$$r(f, G) = \inf_{g \in G} r(f, g).$$

$$\delta(G) = \sup_{f \in C_F} r(f, G),$$

$$d_n(C_F) = \inf \delta(L_j).$$

В последнем равенстве inf берется по всем линейным подпространствам L_j с размерностью $j \leqq n$. Последовательность поперечников монотонно убывающая.

Отметим, что в случае банахова пространства непрерывных на отрезке функций с равномерным расстоянием все поперечники равны $+\infty$, а для рассматриваемого пространства C_F при $n \geqq 2$ $d_n(C_F)$ конечны.

Множество $A \subset R$ называется локально связным, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in A$ существует связная окрестность (в индуцированной топологии) точки x с диаметром меньшим ε.

Необходимость условия локальной связности

Допустим, что компакт F не является локально связным. Покажем что последовательность $d_n(C_F)$ не сходится к нулю.

Из предположения следует, что существуют такие $x_0 \in F$ и $\varepsilon_0 > 0$, что любая окрестность точки x_0 с диаметром не большим $2\varepsilon_0$ не связна. Обозначим $U(\alpha) = \{x : \rho(x, x_0) \leqq \alpha . \varepsilon_0,\ 0 < \alpha \leqq 1\}$. Можно утверждать, что существует бесконечная фамилия S из содержащихся в U (1) открыто-замкнутых подмножеств компакта F, не содержащих x_0, а также что x_0 есть точка накопления для точек $x(G)$ со свойствами $x(G) \in G$, $\rho(x(G), x_0) = \min_{x \in G} \rho(x, x_0)$, $G \in S$. Следовательно можно выбрать множества F_i такие, что $F_i \in S$, $\rho(F_{i+1}, x_0) < \rho(F_i, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{4}$, $i = 1, 2, \ldots$

Пусть для линейного подпространства $L \subset C_F$ выполнено $\delta(L) < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Отсюда будет следовать, что L не есть конечномерное простанство.

По теореме Урысона [6; 18] существуют непрерывные функции

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in U(1)\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i} F_k\right)\\ 0, & x\in\bigcup\limits_{k=1}^{i} F_k\\ 0\leq\varphi_i(x)\leq 1, & x\in F.\end{cases}$$
$$i=1,\ 2,\ .\ .\ .$$

Определим $\Phi_m(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i(x)$. В $U\left(\frac{1}{4}\right)$ $\Phi_m(x)$ принимает все значения $0, 1, 2, \ldots, m$ и в $U(1)$ других значений не имеет. Пусть $\varepsilon>0$. Выберем $M>0$ настолько большое, что $\frac{\varepsilon_0}{4M}<\varepsilon$. Так как $\delta(L)<\frac{\varepsilon_0}{4}$, для любого натурального m существует функция $f_m(x)\in L$, зависящая и от ε как от параметра, для которой $r(M.\Phi_m,\ M.f_m)<\frac{\varepsilon_0}{4}$. Из этого неравенства следует, что $f_m(x)$ имеет следующие свойства: а) существуют точки $x_i^m\in U\left(\frac{1}{2}\right)$, для которых $f_m(x_i^m)\in(i-\varepsilon\ i+\varepsilon)$, $i=0, 1, 2, \ldots, m$; б) если $x\in U\left(\frac{1}{2}\right)$, то $f_m(x)\in(i-\varepsilon, i+\varepsilon)$ для некоторого целого i, $0\leq i\leq m$.

Среди функций $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ можно подобрать произвольное конечное число линейно независимых. Для этого докажем вспомогательное утверждение.

Через $H(m)$ обозначим совокупность бесконечномерных векторов $h(m)=(h(m, 1), h(m, 2), \ldots, h(m, s), \ldots)$ со свойствами: а) для любого целого i, $0\leq i\leq m$, существует такое s_i, что $h(m, s_i)=i$; б) для любого целого s $h(m, s)=j$, j целое, $0\leq j\leq m$.

Лемма 1. Для любого натурального N можно подобрать $H(m_i)$ $i=1, 2, \ldots, N$ так, чтобы векторы $h(m_1), h(m_2), \ldots, h(m_N)$ были линейно независимыми при любом выборе $h(m_i)\in H(m_i)$, $i=1, 2, \ldots, N$.

Доказательство проведем по индукции.

Если $N=1$, полагаем $m_1=1$. Любой вектор $h(1)\in H(1)$ имеет хотя бы одну координату, равную 1, и следовательно линейно независим

Пусть $H(m_1), H(m_2), \ldots, H(m_k)$ имеют требуемое свойство Тогда определим $m_{k+1}=(m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_k+1)+1$ и допустим что для некоторых векторов $h(m_i)\in H(m_i)$, $i=1, 2, \ldots, k+1$, имеем

$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i h(m_i)=0$, $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i^2>0$. Из индуктивного предположения следует $\lambda_{k+1}\neq 0$ и тогда $h(m_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i'.h(m_i)$. Пусть $h(m_{k+1}, s_j)=j$, $j=0, 1, 2, \ldots, m_{k+1}$. Хотя бы для двух значений $j_1\neq j_2$ должно въполняться равенство $h(m_i, s_{j_1})=h(m_i, s_{j_2})$, $i=1, 2, \ldots, k$, так как m_{k+1} выбрано больше числа всевозможных различных упорядоченных систем $(h(m_1, s), h(m_2, s), \ldots, h(m_k, s))$ длины k из координат векторов $h(m_1)$, $h(m_2), \ldots, h(m_k)$. Это ведет к противоречию $j_1=j_2$. Следовательно $\{h(m_i)\}_{i=1}^{k+1}$ есть система линейно независимых векторов.

Отметим, что существует $\varepsilon_N>0$, при котором лемма 1 остается справедливой, если заменить $H(m_i)$ на $\widetilde{H}(m_i)$, где $\widetilde{H}(m_i)=\{\widetilde{h}(m_i) : \sup_s|\widetilde{h}(m_i, s)-h(m_i, s)|<\varepsilon_N,\ h(m_i)\in H(m_i)\}$, $i=1, 2, \ldots, N$.

Рассмотрим теперь функции $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots, f_{m_N}(x)$, которые определены при значении параметра $\varepsilon=\varepsilon_N$. Их линейная независимость следует из того, что вектор

$$(f_{m_k}(x_0^1), f_{m_k}(x_1^1), f_{m_k}(x_0^2), f_{m_k}(x_1^2), f_{m_k}(x_2^2),$$
$$\ldots, f_{m_k}(x_0^{m_k}), f_{m_k}(x_1^{m_k}), \ldots, f_{m_k}(x_{m_k}^{m_k}), \ldots)$$

принадлежит множеству $\widetilde{H}(m_k)$ для $k=1, 2, \ldots, N$.

Так как N — произвольное натуральное число, линейное подпространство L не является конечномерным и поэтому $d_n(C_F)\geq\frac{\varepsilon_0}{4}$ для любого n.

Достаточность условия локальной связности

Пусть F локально связный компакт. Тогда последовательность $d_n(C_F)$ стремится к нулю.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся одним свойством множества F.

Лемма 2. Если компакт F локально связный, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти конечное число замкнутых связных множеств F_i и точек x_i, $i=1, 2, \ldots, m$ так, что $F=\bigcup_{i=1}^{m}F_i$ и для любых $i, j=1, 2, \ldots, m$ $x_i\in F_i$, $\rho(x, x_i)\leq\varepsilon$ для $x\in F_i$, $\rho(x,x_i)>0$ для $x\in F_j$, $j\neq i$.

Пусть V_z — замкнутая связная окрестность точки $z\in F$ с диаметром меньшим ε. Из покрытия $\bigcup_{z\in F}V_z\supset F$ выберем конечное покрытие, состоящее из множеств $F_j'=V_{z_j}$, $j=1, 2, \ldots, s$. Для некоторого $x_1\in F$ образуем $F_1=\bigcup_{F_j'\in x_1}F_j'$. Если определены точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$

и множества $F_1, F_2, \ldots, F_k$ и существует $x_{k+1} \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, то в качестве F_{k+1} принимаем множество $\bigcup_{F_j',\, x_{k+1}} F_j'$. Этот процесс конечен и приводит к искомым множествам $F_1, F_2, \ldots, F_m$ и точкам $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Рассмотрим теперь множества

$$G_1 = F_1,\ G_k = \overline{F_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i},\ k = 2, 3, \ldots, m.$$

Если $x \in G_i \cap G_j$, $i \neq j$, то x — граничная точка для обоих множеств, Точка x_i есть внутренняя для G_i, следовательно существует такое $d_i > 0$, что из $\rho(x, x_i) < d_i$ следует $x \in G_j$, $j \neq i$. Зададим $d > 0$, $d < \frac{1}{2}(\min_i d_i)$. Обозначим границу G_i через K_i и пусть $K_i' = \{x : x \in F\ \rho(x, K_i) < d\}$, если $K_i \neq \varnothing$, в противном случае $K_i' = \varnothing$. Тогда, если $x \in K_i' \cap G_j$, то $G_i \cap G_j \neq \varnothing$, а следовательно и $F_i \cap F_j \neq \varnothing$.

По теореме Урысона существуют непрерывные на F функции $\chi_i(x)$, для которых

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_i; \\ 0, & x \in \overline{F \setminus (G_i \cup K_i')}; \\ 0 \leqq \chi_i(x) \leqq 1, & x \in F, \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Определим функции из C_F $\eta_i(x)$, $\xi_i(x)$, $\zeta_i(x)$:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \chi_1(x), & i = 1, \\ \chi_i(x)(1 - \chi_1(x))(1 - \chi_2(x)) \ldots (1 - \chi_{i-1}(x)), & i = 2, 3, \ldots, m; \end{cases}$$

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \frac{3}{d}\left(\frac{d}{3} - \rho(x, x_i)\right), & \rho(x, x_i) \leqq \frac{d}{3}, \\ 0, & \rho(x, x_i) \geqq \frac{d}{3}; \end{cases}$$

$$\zeta_i(x) = \begin{cases} 0, & \rho(x, x_i) \leqq \frac{d}{3}, \\ \frac{3}{d}\left(\rho(x, x_i) - \frac{d}{3}\right), & \frac{d}{3} \leqq \rho(x, x_i) \leqq \frac{2d}{3}, \\ \frac{3}{d}(d - \rho(x, x_i)), & \frac{2d}{3} \leqq \rho(x, x_i) \leqq d, \\ 0, & \rho(x, x_i) \geqq d. \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Для функций $\eta_i(x)$ выполнены равенства:

$$\eta_i(x)=\begin{cases}1, & x\in G_i\setminus K_i';\\ 0, & x\in \overline{F\setminus(G_i\cup K_i')};\\ 0\leqq\eta_i(x)\leqq 1, & x\in F,\end{cases}$$

$$i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ m.$$

$$\sum_{i=1}^{m}\eta_i(x)=1,\ x\in F.$$

Обозначим через L_ε линейную оболочку функций $\eta_i(x)$, $\xi_i(x)$ и $\zeta_i(x)$, $i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ m$ и найдем оценку для $\delta(L_\varepsilon)$.

Пусть $f(x)\in C_F$, $m_i=\min\limits_{x\in F_i} f(x)$, $M_i=\max\limits_{x\in F_i} f(x)$. Определим $f^*(x)\in L$ по формуле:

$$f^*(x)=\sum_{i=1}^{m}\{f(x_i)\cdot\eta_i(x)+[m_i-f(x_i)]\,\xi_i(x)+[M_i-f(x_i)]\cdot\zeta_i(x)\}.$$

Из определения d и связности можества F_i следует, что существует точка $x_i'\in F_i$, для которой $\rho(x_i',\ x_i)=\frac{2d}{3}$, а тогда $\zeta_i(x_i')=1$. Функция $\xi_i(x)$ тоже принимает значение 1, $\xi_i(x_i)=1$. Оказывается, что $f^*(x_i')=M_i$, $f^*(x_i)=m_i$ и так как F_i связное множество, $f^*(x)$ принимает в F_i все значения, заключенные между M_i и m_i. Следовательно для любого $x\in F_i$ существует $x'\in F_i$, так что $f^*(x')=f(x)$, причем $\rho(x',\ x)\leqq 2\varepsilon$.

Теперь будем искать точку x'', достаточно близкую к x, для которой $f(x'')=f^*(x)$. Если $x\in G_i\setminus K_i'$, то $m_i\leqq f^*(x)\leqq M_i$ и так как $f(x)$ тоже принимает в F_i все значения между m_i и M_i, имеется $x''\in F_i$, для которой $f(x'')=f^*(x)$, $\rho(x'',\ x)\leqq 2\varepsilon$. Когда $x\in G_i\cap(K_{i_1}'\cap K_{i_2}'\cap\ .\ .\ \cap K_{i_s}')$, то $f^*(x)=\sum\limits_{k=1}^{s}f(x_{i_k})\cdot\eta_{i_k}(x)$ и $\min\{f(x_{i_1}),\ .\ .\ .\ ,f(x_{i_s})\}\leqq f^*(x)\leqq\max\{f(x_{i_1}),\ .\ .\ .\ ,f(x_{i_s})\}$. Но G_i и G_{i_k} имеют общую точку, а тогда и F_i и F_{i_k} имеют общую точку. Отсюда следует, что можество $F_i\cup(\bigcup\limits_{k=1}^{s}F_{i_k})$ связное и имеет диаметр не больший 6ε, следовательно в нем найдется точка x'', в которой $f(x'')=f^*(x)$, $\rho(x'',\ x)\leqq 6\varepsilon$.

Функция $f(x)$ выбрана произвольно, следовательно $\delta(L_\varepsilon)\leqq 6\varepsilon$ и тогда $d_{3m}(C_F)\leqq 6\varepsilon$, откуда и получается $d_n(C_F)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Скорость сходимости к нулю последовательности $d_n(C_F)$.

Для произвольной последовательности $A_1 \geqq A_2 \geqq \ldots \geqq A_n \geqq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$, существует в пространстве $R^2 = \{x : x = (x_1, x_2)\}$ с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ локально связной компакт F, для которого выполнено $d_n(C_F) \geqq A_n$, $n = 1, 2, \ldots$

При фиксированном n по лемме 1. определим m_N для $N = n+1$ и проведем m_N различных отрезков с одним концом в точке (0,0) и с длиной $4A_n$. Совокупность F отрезков, построенных по n для $n = 1, 2, \ldots$ есть локально связный компакт, так как $A_n \to 0$. Применив к кольцу $A_n \leqq \rho(x, (0,0)) \leqq 4A_n$ рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве необходимости, получаем $d_n(C_F) \geqq A_n$.

При сделанных предположениях о последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно поставить вопрос о существовании компакта F, для которого $d_n(C_F) = A_n$, $n = 2, 3, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff, A. N.: Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionsklasse. Ann. of Math., **37** (1936), № 1, 107—111.
2. Тихомиров, В. М.: Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. Усп. мат. наук, **15** (1960), № 3, 81—120.
3. Тихомиров, В. М.: Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C_{[-1,1]}$. Матем. сб., **80** (1969), № 2, 290—304.
4. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, **24** (1969), № 5, 141—178.
5. Боянов, Т. П., Попов, В. А.: Върху напречниците на пространството от непрекъснатите функции с метрика от хаусдорфов тип. Год. Соф. унив., Мат. фак., **63** (1968/1969), 167—184.
6. Йосида, К.: Функциональный анализ. „Мир", Москва, 1967.

Постъпила на 20. VII. 1971 г.

ON THE WIDTHS OF THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON A METRIC COMPACTUM

T. P. Boyanov

(SUMMARY)

Let C_F be the space of continuous functions on the compactum F in the metric space R with distance $\rho(x, y)$. C_F is metrized with the Hausdorff's metric:

$$r(f, g) = \max\{\max_{x\in F} \min_{y\in F} |f(x), g(y)|, \max_{x\in F} \min_{y\in F} |g(x), f(y)|\},$$

where $\|f(x), g(y)\| = \max\{\rho(x, y), |f(x)-g(y)|\}$, $f \in C_F$, $g \in C_F$.

Let $d_n(C_F)$ be the width of C_F:

$$d_n(C_F) = \inf_{L_j} \sup_{f \in C_F} \inf_{g \in L_j} r(f, g),$$

where $L_j \subset C_F$ is a linear space of dimension $j \leqq n$. The following is proved:

Theorem. $d_n(C_F) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ if and only if F is locally connected.

For any sequence $A_1 \geqq A_2 \geqq \ldots \geqq A_n \geqq \ldots$, $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ there exists a metric compactum F such that $d_n(C_F) \geqq A_n$, $n = 1, 2, \ldots$