ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА РОЕВЕ И КОМПЛЕКСИ ОТ ПРАВИ

Грозьо Станилов, Адриян Борисов

Настоящата работа е посветена на приложението на един общ резултат от работата [3] върху два частни случая: третиране на диференциалната геометрия от първи ред на рой и комплекс от прави в тримерното хиперболично двуосно пространство и тримерното евклидово пространство. От една страна, имаме диференциалните инварианти от първи ред на рой от прави — α, β, γ, и допирателната равнина към роя в точка M (t). От друга страна, имаме диференциалните инварианти от първи ред на комплекс от прави a, b, c и асоциираната равнина на комплекса в точка M (t). В работата показваме, че познаването на диференциалната геометрия от първи ред на рой от прави води до познаването на диференциалната геометрия на комплекс от прави. Именно, ако при всяко твърдение за рой от прави извършим замяната (за случая на евклидово пространство)

$$\alpha \rightarrow a, \ \beta \rightarrow -b, \ \gamma \rightarrow c,$$

допирателната равнина заменим с асоциираната равнина, то получаваме вярно твърдение за комплекс от прави. По този начин се постига една дуалност в диференциалната геометрия от първи ред на рой и комплекс от прави, която не следва от принципа за дуалност в проективното пространство.

§ 1. Роеве и комплекси от прави в хиперболичното двуосно пространство

В хиперболичното двуосно пространство B_3 ще използуваме репери $A_1A_2A_3A_4$, притежаващи следните свойства: A_1, A_2+A_3 са точки от правата j, а A_2, A_1+A_4 са точки от правата k. Тук j, k са абсолютните прави на пространството. Те са реални и кръстосани.

Деривационните уравнения на семейството репери от горния вид са:

$$dA_1 = (\theta_4 - \theta_7) A_1 - \theta_1 A_2 - \theta_1 A_3,$$

$$dA_2 = \theta_5 A_1 + \theta_3 A_2 + \theta_6 A_3 + \theta_2 A_4,$$

$$dA_3 = -\theta_2 A_1 + (\theta_3 - \theta_6)A_3 - \theta_2 A_4, \tag{1}$$

$$dA_4 = \theta_7 A_1 + \theta_1 A_2 + \theta_8 A_3 + \theta_4 A_4,$$

като формите на Пфаф $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_8$ са подчинени на структурните уравнения на пространството B_3:

$$D\theta_1 = [\theta_1, \ \theta_3 - \theta_4 + \theta_7], \ D\theta_2 = [\theta_2, \ \theta_4 - \theta_3 + \theta_6],$$

$$D\theta_3 = [\theta_1, \ \theta_5 - \theta_2], \ D\theta_4 = [\theta_2, \ \theta_8 - \theta_1],$$

$$D\theta_5 = [\theta_2, \ \theta_6 + \theta_7] + [\theta_5, \ \theta_4 - \theta_3 - \theta_7], \tag{2}$$

$$D\theta_6 = [\theta_1, \ \theta_5] + [\theta_2, \ \theta_8],$$

$$D\theta_7 = [\theta_1, \ \theta_5] + [\theta_2, \ \theta_8],$$

$$D\theta_8 = [\theta_1, \ \theta_6 + \theta_7] + [\theta_8, \ \theta_3 - \theta_4 - \theta_6].$$

Чрез абсолютната инволюция в пространството B_3 на всеки репер $A_1A_2A_3A_4$ можем да съпоставим спрегнат репер $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$, получен по следния начин: геометричните точки $\overline{A}_1$, $\overline{A}_3$ съвпадат с точките A_1 съответно A_3; $\overline{A}_2(\overline{A})_4$ е хармонично-спрегната точка на A_2 (A_4) относно двойката точки A_2+A_3, A_3 (A_1, A_1+A_4). При подходящи нормировки имаме

$$\overline{A}_1 = -A_1, \quad \overline{A}_2 = A_2 + 2A_3, \tag{3}$$

$$\overline{A}_3 = -A_3 \quad \overline{A}_4 = A_4 + 2A_1.$$

Като напишем формулите (1) за реперите $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$ и използуваме (3), чрез сравняване получаваме

$$\overline{\theta}_1 = -\theta_1, \ \overline{\theta}_2 = -\theta_2, \quad \overline{\theta}_5 = -\theta_5, \quad \overline{\theta}_8 = -\theta_8, \tag{4}$$

$$\overline{\theta}_3 = \theta_3, \quad \overline{\theta}_4 = \theta_4, \quad \overline{\theta}_6 = \theta_6, \quad \overline{\theta}_7 = \theta_7.$$

Тук $\overline{\theta}_1, \ \overline{\theta}_2, \ \cdots, \overline{\theta}_8$ са относителни компоненти на спрегнатия репер $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$.

Нека правата $g = A_2A_4$ описва праволинейно многообразие L (рой, конгруенция, комплекс). Тогава спрегнатата ѝ права $\overline{g} = \overline{A}_2\overline{A}_4$ ще опише праволинейно многообразие $\overline{L}$, спрегнато на L [1].

Главните форми за многообразието L са $\theta_5, \ \theta_6, \ \theta_7, \theta_8$. В случай на рой от прави между тях съществуват три линейни връзки

$$\theta_5 = \alpha\theta_7, \ \theta_6 = \beta\,\theta_7, \ \theta_8 = \gamma\,\theta_7 \tag{5}$$

а в случай на комплекс от прави — само една линейна връзка

(5*) $$\theta_6 = a\theta_5 + b\theta_7 + c\,\theta_8.$$

Величините α, β, γ (a, b, c) определят първата диференциална околност на правата от роя (комплекса). Под действието на стационарната група на правата на роя (комплекса) те се изменят по следните закони:

(6) $$\begin{aligned} &\delta\alpha + \alpha^2\pi_1 + (\alpha\gamma - \beta - 1)\pi_2 + \alpha[\pi_4 - \pi_3] = 0, \\ &\delta\beta + (\beta - 1)(\alpha\pi_1 + \gamma\pi_2) = 0, \\ &\delta\gamma + \gamma^2\pi_2 + (\alpha\gamma - \beta - 1)\pi_2 + \gamma(\pi_3 - \pi_4) = 0 \end{aligned}$$

— при рой и

(6*) $$\begin{aligned} &\delta a + a^2\pi_2(ac + b - 1)\pi_1 + a(\pi_3 - \pi_4) = 0, \\ &\delta b + (b+1)\ (a\pi_2 + c\pi_1) = 0, \\ &\delta c + c^2\pi_1 + (ac + b - 1)\pi_2 + c(\pi_4 - \pi_3) = 0 \end{aligned}$$

— при комплекс.

Ако в уравненията (6) направим замяната

(7) $$\alpha \to c,\ \beta \to -b,\ \gamma \to a,$$

получаваме уравненията (6*). Следователно законите (6) и (6*) са идентични. Това установихме по-рано в [2] при друго семейство от репери.

Сега ще направим приложение на този резултат. Най-напред ще съобщим основни факти за диференциалната геометрия на рой от прави в B_3. Подробните доказателства на някои от тях може да се прочетат в [1].

От (6) получаваме

(8) $$\begin{aligned} &\delta(\beta - 1) = -(\beta - 1)(\alpha\pi_1 + \gamma\pi_2), \\ &\delta(\beta - \alpha\gamma) = -2(\beta - \alpha\gamma)(\alpha\pi_1 + \gamma\pi_2), \\ &\delta(\beta^2 - 2\alpha\gamma + 1) = -2(\beta^2 - 2\alpha\gamma + 1)(\alpha\pi_1 + \gamma\pi_2), \\ &\delta\{(\beta+1)^2 - 4\alpha\gamma\} = -2\{(\beta+1)^2 - 4\alpha\gamma\}(\alpha\pi_1 + \gamma\pi_2), \end{aligned}$$

което показва, че величините $\beta - 1$, $\beta - \alpha\gamma$, $\beta^2 - 2\alpha\gamma + 1$, $(\beta+1)^2 - 4\alpha\gamma$ са относителни инварианти от първи ред на роя. Величината

(9) $$K = \frac{(\beta+1)^2 - 4\alpha\gamma}{(\beta - 1)^2}$$

се явява абсолютна инварианта от първи ред на роя (кривина на роя). Анулирането на някои от тези инварианти определя някои забележителни роеве прави в B_3.

Нека $M = A_2 + tA_4$ е произволна точка от правата $g = A_2A_4$ на роя Допирателната равнина η_M към роя в точката M се определя с тангенциални координати

$$\eta_M = (\alpha + t)(A_2A_4A_1) + (\beta + \gamma t)(A_2A_4A_1). \tag{10}$$

Допирателната равнина $\eta_{\bar{M}}$ към спрегнатия рой, описан от правата $\bar{g} = \bar{A}_2\bar{A}_4$, в спрегнатата точка $\bar{M} = A_2 + \bar{t}\bar{A}_4$ (като $\bar{t} = -t$), се определя със:

$$\eta_{\bar{M}} = (\theta_5 + \bar{t}\theta_7)(A_2\bar{A}_4A_1.) + (\theta_6 + \bar{t}\theta_8)(A_2A_4\bar{A}_3). \tag{10*}$$

Тя пресича правата A_2A_4 в точката $M' = A_2 + t'A_4$, при което

$$t' = -\frac{\alpha + t}{\beta + \gamma t}. \tag{11}$$

Съответствието $M(t) \to M'(t')$ върху правата A_2A_4, определено с формулата (11), е проективност с двойни елементи, които се определят от уравнението

$$\alpha t^2 + (\beta + 1)t + \alpha = 0. \tag{12}$$

Уравнението (12) показва, че в общия случай върху всяка права на роя има две забележителни точки. Наричат се централни (възлови) на правата от роя. Възможни са следните случаи:

1. $(\beta + 1)^2 - 4\alpha\gamma > 0.$

Централните точки са различни и реални. Правата на роя се нарича хиперболична, а роят, съставен от такива прави — хиперболичен

2. $(\beta + 1)^2 - 4\alpha\gamma = 0.$

Централните точки съвпадат. Правата на роя се нарича параболична, роят — параболичен,

3. $(\beta + 1)^2 - 4\alpha\gamma < 0.$

Централните точки са комплексно спрегнати. Правата на роя се нарича елиптична, а роят — елиптичнен.

4. $\alpha = \gamma - \beta + 1 = 0.$

Централните точки са неопределени. Правата на роя се нарича изотропна, а роят — изотропен.

Намерената проективност (11) е инволюция, когато

$$\beta-1=0. \tag{13}$$

Рой, за който е изпълнено (13), наричаме T-рой. Това название е оправдано, тъй като, ако правата $g=A_2A_4$ описва T-рой, то $\bar{g}=\bar{A}_2\bar{A}_4$ описва също T-рой и двата спрегнати роя образуват T-двойка [1].

Допирателната равнина η_M е постоянна, т. е. не зависи от точката M върху правата $g=A_2A_4$, точно когато

$$\beta-\alpha\gamma=0. \tag{14}$$

Уравнението (14) определя развиваемите роеве. Получаваме, че един рой е развиваем и параболичен, когато

$$\beta=\alpha\gamma=1. \tag{15}$$

Допирателната равнина η_M пресича правата $g=A_2A_4$ в точка $\bar{M}=A_2+\bar{t}'\bar{A}_4$ при което

$$t'=\frac{t+\alpha}{\gamma t+\beta}. \tag{16}$$

Аналогично допирателната равнина $\eta_{\bar{M}}'$ в точката $\bar{M}'$ към спрегнатия рой пресича правата $g=A_2A_4$ в точка $M''=A_2+t''A_4$, така че

$$t''=\frac{(1-\alpha\gamma)t+\alpha(1-\beta)}{-\gamma(1-\beta)t+\beta^2-\alpha\gamma}. \tag{17}$$

Така получихме едно ново съответствие $M(t)\to M(t'')$ върху правата $g=A_2A_4$, което е проективност. Двойните ѝ елементи се дават с

$$(1-\beta)(\gamma t^2+(\beta+1)t+\alpha)=0. \tag{18}$$

Уравнението (18) се удовлетворява тъждествено, когато

а) $\alpha=\gamma=\beta+1=0$,

б) $1-\beta=0$.

Намерените по-горе резултати ни позволяват да направим извода, че в случая а) роят е изотропен, а в б) — T-рой. Това е ново геометрично представяне на T-роевете.

Проективността $M(t)\to M(t'')$ е инволюция, когато

$$\beta^2-2\alpha\gamma+1=0. \tag{19}$$

Роевете, определени с (19), ще наричаме I-роеве.

За инвариантата K (кривината на роя) намираме следното геометрично тълкуване:

$$D=\frac{1+\sqrt{K}}{1-\sqrt{K}}, \tag{20}$$

където $D=(M_1, M_2, M, M')$ е двойното отношение на централните точки M_1, M_2, определени от (12) и произволна двойка спрегнати точки M, M' в проективността (11).

Сега ще пристъпим към изследване на свойствата на комплекса от прави, определен с диференциалното уравнение (5*), като ще използуваме намерената аналогия (7). От (8) и (9) посредством (7) формално намираме

$$\begin{aligned}
&\delta(b+1)=-(b+1)(c\pi_1+a\pi_2),\\
&\delta(b+ac)=-2(b+ac)(c\pi_1+a\pi_2),\\
(8^*)\qquad &\delta(b^2-2ac+1)=-2(b^2-2ac+1)(c\pi_1+a\pi_2),\\
&\delta\{(1-b)^2-4ac\}=-2\{(1-b)^2-4ac\}(c\pi_1+a\pi_2),
\end{aligned}$$

$$9^*)\qquad K^*=\frac{(1-b)^2-4ac}{(1+b)^2}.$$

Като се използува (6*), леко се проверява, че формално намерените (8*) и (9*) са действително в сила за комплекса (5*). Така получихме, че $b+1$, $b+ac$, $b^2-2ac+1$, $(1-b^2)-4ac$ са относителни инварианти на комплекса и тяхното анулиране ще даде забележителни типове комплекси в двуосното пространство. Инвариантата K^* се нарича криви на комплекса.

Извършваме замяната (7) в (10). Получаваме

$$\eta^*_M=(c+t)(A_2A_4A_1)+(at-b)(A_2A_4A_3), \tag{10*}$$

с което се определя формално една равнина, свързана с точката $M=A_2+tA_4$ от правата на комплекса. Оказва се, че това е асоциираната равнина в точката $M=A_2+tA_4$ на правата $g=A_2A_4$ на комплекса. Получихме, че посредством (7) на допирателната равнина η_M на роя се съпоставя асоциираната равнина η^*_M на комплекса.

От (7), (11) и (12) получаваме

$$t'=\frac{c+t}{b-at}, \tag{11*}$$

$$at^2+(1-b)t+c=0. \tag{12*}$$

Представлява ли съответствието $M(t)\to M'(t')$, където $M'=A_2+$ $+t'A_4$, някаква проективност върху правата $g=A_2A_4$ на комплекса? Отговорът е утвърдителен. Нека $\overline{M}=\overline{A}_2+\overline{t}\,\overline{A}_4$ е спрегната точка на точката $M=A_2+tA_4$ $(\overline{t}=-t)$. Тогава асоциираната равнина $\eta^*_{\overline{M}}$ в точката $\overline{M}$ пресича правата $g=A_2A_4$ в точката $M'=A_2+t'A_4$ и съответствието $M(t)\to M'(t')$ е проективност с двойни елементи, които се определят точно с (12*).

Следователно върху всяка права на комплекса в общия случай има по две забележителни точки, които се наричат централни точки на правата на комплекса. Определят се от (12*).

Като следваме аналогията (7) и при комплексите са възможни следните случаи:

1*. $(1-b)^2-4ac>0$.

Централните точки са различни и реални. Правата на комплекса се нарича хиперболична, а комплексът, съставен от хиперболични прави — хиперболичен.

2*. $(1-b)^2-4ac=0$.

Централните точки съвпадат. Правата на комплекса се нарича параболична, а комплексът — параболичен.

3*. $(1-b)^2-4ac<0$.

Централните точки са комплексно-спрегнати. Правата на комплекса се нарича елиптична, а комплексът — елиптичен.

4*. $c=a=1-b=0$.

Централните точки са неопределени. Правата на комплекса се нарича изотропна, а комплексът — изотропен.

Проективността $M(t)\to M(t')$ е в инволюция, когато

$$b+1=0. \tag{13*}$$

Комплекс, за който е изпълнено (13*), наричаме T-комплекс. Това название, както и при съответните T-роеве, е напълно оправдано, тъй като в този случай комплексът $\{g=A_2A_4\}$ и неговият спрегнат $\{\overline{g}=\overline{A}_2\,\overline{A}_4\}$ образуват двойка T-комплекси [1].

От уравнението на развиваемите роеве (14) и (7) следва

$$b+ac=0. \tag{14*}$$

Комплекс, за който е изпълнено (14*), наричаме развиваем. За него асоциираната равнина η^*_M в произволна точка $M\in g$ е постоянна. Същото нещо имахме и за допирателната равнина η_M при развиваем рой.

Условието един комплекс да бъде параболичен и развиваем е

$$-b=ac=1. \tag{15*}$$

Но (15*) може да се получи от (15) посредством замяната (7). Аналогично от (16), (17) и (18) формално получаваме

$$t'=\frac{t+c}{at-b}, \tag{16*}$$

$$t''=\frac{(1-ac)\,t+c\,(1+b)}{-a\,(1+b)t+b^2-ac}, \tag{17*}$$

$$(b+1)(at^2-(b-1)\,t+c)=0. \tag{18*}$$

Асоциираната равнина η_M^*, зададена с (10*), пресича правата $g=A_2A_4$ в точката $\overline{M}'=\overline{A}_2+t'\overline{A}_4$, при което t' има стойността (16*). Аналогично, равнината $\overline{\eta}_{\overline{M}'}^{\prime *}$ (асоциираната равнина в точката M') пресича правата $g=A_2A_4$ в точката $M''=A_2+t''A_4$, като за t'' е изпълнено (17*). Тогава съответствието $M(t)\longrightarrow M(t'')$ е проективност върху правата $g=A_2A_4$ на комплекса с двойни елементи, които се определят с (18*). Уравнението (18*) се удовлетворява тъждествено, когато

а*) $a=c=b-1=0$,

б*) $b+1=0$.

Получените равенства не определят нови типове комплекси. Това трябва да се очаква, тъй като при рой а) и б) също не определиха нови типове роеве, а а*) и б*) могат да се получат от а) и б) посредством замяната (7). При а*) комплексът е изотропен, а при б*) имаме T-комплекс.

§ 2. Роеве и комплекси от прави в евклидовото пространство

Нека E_3 е тримерното евклидово пространство. Произволен репер $Ae_1e_2e_3$ в него се състои от точка A и три ортонормални вектора e_1, e_2, e_3. Деривационните уравнения на това семейство репери са:

$$(1)\qquad \begin{aligned} dA&=\omega^i e_i, && (i,\ k=1,\ 2,3).\\ de_i&=\omega_i^k e_k, && (\omega_i^k+\omega_k^i=0).\end{aligned}$$

Тогава за структурните уравнения получаваме

$$(2)\qquad \begin{aligned} D\omega^i&=[\omega^i\,\omega_j^i],\\ D\omega_i^k&=[\omega_i^j\,\omega_j^k],\end{aligned}\qquad (i,j,k=1,\ 2,\ 3)$$

Произволна права на рой (комплекс) от прави в E_3 определяме с точката A и вектора e_1. Тогава формите ω^2, ω^3, ω_1^2, ω_1^3 са главни и в случай на рой между тях са в сила връзките

$$\omega^2=\alpha\omega_1^2,\quad \omega^3=\beta\omega_1^2,\quad =\gamma\omega_1^2, \tag{3}$$

а в случай на комплекс

$$\omega^3=a\ \omega_1^3+b\omega_1^2+c\,\omega^2. \tag{4}$$

Величините α, β, γ; a, b, c определят първите диференциални околности на правата на роя и съответно на правата на комплекса. При изменение само на вторичните параметри за тях получаваме

$$\begin{aligned} &\delta\alpha-\pi^1+(\alpha\gamma-\beta)\ \pi_2^3=0,\\ &\delta\beta-\gamma\pi^1+(\beta\gamma+\alpha)\ \pi_2^3=0,\\ &\delta\gamma+(\gamma^2+1)\pi_2^3=0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\delta a-\pi^1+(ac+b)\ \pi_2^3=0,\\ &\delta b+c\pi^1+(bc-a)\ \pi_2^3=0,\\ &\delta c+(c^2+1)\ \pi_2^3=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Лесно се проверява, че ако в (5) извършим замяната

$$\alpha\to a,\ \beta\to-b,\ \gamma\to c \tag{7}$$

уравненията (5) преминават в (6). Следователно законите (5) и (6) са идентични.

От (5) получаваме

$$\delta(\alpha\gamma-\beta)=-2(\alpha\gamma-\beta)\gamma\pi_2^3. \tag{8}$$

Това показва, че величината $\alpha\gamma-\beta$ е относителна инварианта. Величината

$$K=\frac{\alpha\gamma-\beta}{1+\gamma^2} \tag{9}$$

е абсолютна инварианта на роя, която ще наричаме кривина на роя.

Нека $M=A+te_1$ е произволна точка от правата на роя. Допирателната равнина η_M към роя в точката M се определя с векторите e_1

и $(\alpha+t)e_2+(\beta+\gamma t)\,e_3$. Тя е стационарна, т. е. не зависи от точката M върху правата g на роя, точно когато е изпълнено

(10) $$\alpha\gamma-\beta=0$$
или
(11) $$K=0.$$

Следователно това е условието за развиваем рой. Нормалният вектор на допирателната равнина в точката $M(t)$ се дава с

(12) $$N_t=(\alpha+t)\,e_3-(\beta+\gamma\,t)\,e_2.$$

За $t\to\infty$ векторът
(13) $$N_\infty=e_3-\gamma\,e_2$$

определя едно направление, свързано с правата от роя, което ще наричаме асимптотично направление. Онова направление N_{t_0}, свързано с правата на роя, което е перпендикулярно на правата от роя и на асимптотичното направление, ще наричаме централно направление. Условието векторите N_{t_0} от (12) и (13) да са перпендикулярни води до

(14) $$t_0=-\frac{\alpha+\beta\gamma}{1+\gamma^2}$$

Точката $M(t_0)=A+t_0e_1$ върху правата от роя се нарича централна точка на правата.

За ъгъла φ между векторите N_t и N_{t_0} намираме

(15) $$\operatorname{tg}\varphi_t=\frac{t-t_0}{\beta+\gamma t_0}=\frac{t_0-t}{K},$$

в случай, че роят не е развиваем.

Като използуваме замяната (7), заключаваме, че величината $ac+b$ е относителна инварианта на комплекса, а величината

(9*) $$K^*=\frac{ac+b}{1+c^2}$$

е абсолютна инварианта на комплекса (кривина на комплекса).
Уравнението
(11*) $$K^*=0$$

ще определи инвариантен клас от комплекси, които са аналог на развиваемите роеве. Условно ще ги наричаме развиваеми комплекси.
Векторът
(12*) $$N_t^*=(a+t)\,e_3+(a-ct)\,e_2$$

определя в точката $M(t)=A+te_1$ от правата на комплекса една равнина, на която той е перпендикулярен. Лесно може да се покаже, че това е асоциираната равнина в комплекса за разглежданата точка. По-нататък векторът

$$N_{\infty}^{*}=e_3-c\,.\,e_2 \tag{13*}$$

определя асимптотично направление в комплекса, а

$$t_0^{*}=-\frac{a-bc}{1+c^2} \tag{14*}$$

определя централната точка на правата от комплекса. Най-после, аналогично на формулата (15) за роя, ще имаме следната формула за комплекса

$$\operatorname{tg}\varphi_t^{*}=\frac{t_0^{*}-t}{K^{*}}, \tag{15*}$$

като φ^{*} е ъгълът между нормалните вектори на асоциираните равнини в точките $M(t)$, $M\,(t_0)$.

Да разгледаме рой от прави, принадлежащи на комплекса. Прилагаме формулите (15) за роя и (15*) за комплекса при едно и също значение на t. Като елиминираме t, получаваме

$$K^{*}.\operatorname{tg}\varphi_t^{*}-K.\operatorname{tg}\varphi_t=t_0^{*}-t_0. \tag{16}$$

Оттук следва

$$K\,.\operatorname{tg}\varphi_t-t_0=K^{*}.\operatorname{tg}\varphi_t^{*}-t_0^{*}. \tag{17}$$

Можем да формулираме следната

Теорема. За всички роеве от прави, принадлежащи на даден комплекс от прави, величината

$$K\,.\operatorname{tg}\varphi-t_0$$

е постоянна.

Накрая ще отбележим, че формулата (16) има, така да се каже, автодуален характер, т. е. при извършване на замяната (7) остава непроменена.

§ 3. Установяване на аналогията между рой и комплекс от прави в E_3 по класически път

Установената аналогия между диференциалните геометрии от първи ред на рой и комплекс от прави в тримерното евклидово пространство може да се установи и по класически път.

Нека $Aegh$ е променлива ортогонална координатна система в тримерното евклидово пространство E_3. За деривационните уравнения в това пространство имаме

$$\begin{aligned} dA&=\omega^1\,e+\omega^2 g+\omega^3\,h,\\ de&=*+\omega_1^2 g+\omega_1^3\,h, \end{aligned} \tag{1}$$

$$dg=\omega_2^1 e+{}_*+\ \omega_2^3 h,$$

$$dh=\omega_3^1 e+\omega_3^2 g+{}_*,$$

като очевидно

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\omega^2=(dA,\ g), && \omega^3=(dA,\ h),\\ &\omega_1^2=(de,\ g), && \omega_1^3=(de,\ h). \end{aligned}$$

Тук (,) означава скаларно произведение в E_3.

Нека правата $g=(Ae)$ описва праволинейно многообразие (рой, конгруенция или комплекс от прави). Най-напред ще намерим закона, по който се изменят формулите (2) на Пфаф, като извършваме следните преобразувания:

I. Транслация върху правата g:

$$\bar{A}=A+\lambda e \qquad (\lambda \text{ — параметър}).$$

II. Въртене около същата права g:

$$\begin{aligned} \bar{g}&=\cos\varphi\,.\,g-\sin\varphi\,.\,h,\\ \bar{h}&=\sin\varphi\,.\,g+\cos\varphi\,.\,h. \end{aligned}\qquad (l-l)$$

За формите $\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}^3$, $\bar{\omega}_1^2$, $\bar{\omega}_1^3$ на репера $\bar{A}\ e\ \bar{g}\bar{h}$ имаме според (2):

$$(3)\qquad \begin{aligned} \bar{\omega}^2&=\cos\varphi.\,\omega^2-\sin\varphi.\,\omega^3+\lambda\cos\varphi.\,\omega_1^2-\lambda\sin\varphi.\,\omega_1^3,\\ \bar{\omega}^3&=\sin\varphi\,\omega^2+\cos\varphi.\,\omega^3+\lambda\sin\varphi.\,\omega_1^2+\lambda\cos\varphi.\,\omega_1^3,\\ \bar{\omega}_1^2&=\cos\varphi.\,\omega_1^2-\sin\varphi.\,\omega_1^3,\\ \bar{\omega}_1^3&=\sin\varphi.\,\omega_1^2+\cos\varphi.\,\omega_1^3. \end{aligned}$$

Нека правата g описва рой от прави. Тогава между формите (2) съществуват три линейни връзки, които написваме във вида

$$(4)\qquad \begin{aligned} \omega^2&=\alpha\,\omega_1^2,\\ \omega^3&=\beta\,\omega_1^2,\\ \omega_1^3&=\gamma\,\omega_1^2, \end{aligned}$$

откъдето

$$(5)\qquad \alpha = \frac{\omega^2}{\omega_1^2},\ \beta = \frac{\omega^3}{\omega_1^2},\ \gamma = \frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}.$$

От тези формули и (3) имаме

$$(6)\qquad \bar{\alpha} = \frac{(\alpha+\lambda)\cos\varphi - (\beta+\lambda\gamma)\,.\sin\varphi}{\cos\varphi - \gamma\,.\sin\varphi},$$

$$\bar{\beta} = \frac{(\alpha+\lambda)\sin\varphi + (\beta+\lambda\gamma)\,.\cos\varphi}{\cos\varphi - \gamma\,.\sin\varphi},$$

$$(6')\qquad \bar{\gamma} = \frac{\sin\varphi + \gamma\,.\cos\varphi}{\cos\varphi - \gamma.\sin\varphi}$$

Следователно това са законите, по които се изменят величините α, β, γ за рой от прави, когато извършим казаните по-горе преобразувания.

Нека сега правата g описва комплекс от прави. Тогава между формите (2) съществува само едно линейно съотношение, което написваме във вида

$$(7)\qquad \omega^3 = a\,\omega_1^3 + b\,\omega_1^2 + c\omega^2.$$

Написваме същото уравнение с черти

$$(8)\qquad \bar{\omega}^3 = \bar{a}\bar{\omega}_1^3 + \bar{b}\,\bar{\omega}_1^2 + \bar{c}\,\bar{\omega}^2.$$

Като заместим тук формите (3), използуваме (7) и вземем пред вид линейната независимост на формите ω_1^3, ω_1^2, ω^2, получаваме

$$\bar{a} = \frac{(b-\lambda c)\sin\varphi + (a+\lambda)\cos\varphi}{\cos\varphi - c\sin\varphi}$$

$$(9)\qquad \bar{b} = \frac{(b-\lambda c)\cos\varphi - (a+\lambda)\sin\varphi}{\cos\varphi - c\sin\varphi},$$

$$\bar{c} = \frac{\sin\varphi + c\cos\varphi}{\cos\varphi - c\sin\varphi}.$$

Ако във формулите (6) положим

$$(10)\qquad \alpha = a,\ \beta = -b,\ \gamma = c,$$

те преминават в (9). С това е установена по класически път аналогията (сходството), която съществува между диференциалната геометрия от първи ред на рой и комплекс от прави в тримерното евклидово пространство.

ЛИТЕРАТУРА

1 Станилов, Гр.: Геометрия линейчатых многообразий биаксиального пространства. Диссертация, Киев, 1965.

2. Станилов, Гр.: К теории линейчатых многообразий в пространстве проективной структуры. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **61** (1966/67), 41—46.

3. Stanilov Gr.; Dualitätsprinzip in der Differentialgeometrie von Räumen mit projektiver Struktur. Докл. БАН, **23** (1970), № 5, 473—475.

Постъпила на 27. VIII. 1971 г.

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER REGELSCHAREN UND GERADENKOMPLEXE

Gr. Stanilow, A. Borissow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit wird die Analogie (Dualität) untesucht die zwischen den Differentialgeometrien erster Ordnung von Regelscharen und Geradenkomplexen im biaxialen und euklidischen Raum existiert.