НЯКОИ СВОЙСТВА НА ПОЛИНОМИТЕ С РЕАЛНИ НУЛИ И НА ЦЕЛИТЕ ФУНКЦИИ ОТ ЛАГЕРОВ ТИП

Кирил Дочев, Димитър Димитров

В настоящата работа се разглеждат полиноми, които имат само реални нули, и цели функции от лагеров тип, които са граници на такива полиноми. За всяка нула α на функцията са посочени интервали с център α и с една и съща дължина, които съдържат поне една нула на производната на функцията.

Ще изложим най-напред доказателството на следната теорема (вж. [1]), след което ще се спрем на някои нейни приложения и обобщения за цели функции.

Теорема 1. Ако полиномът

$$f(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\cdots+a_n$$

има само реални нули и δ означава числото

$$\delta=\delta(f)=\frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{2n}{n-1}\frac{a_2}{a_0}},$$

то всеки интервал

$$[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta],$$

където α е нула на $f(x)$, съдържа поне една нула на $f'(x)$.

Предварително ще установим следните две леми (които са използувани за друга цел, а именно за изследване на нютонови итерации в работата [2]).

Лема 1. Нека полиномът

$$f(x)=x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\cdots+a_n,\ n\geqq 2,$$

няма кратни нули и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ означават нулите на производната $f'(x)$, а α е произволна нула на $f(x)$. Тогава са в сила тъждествата

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f(\beta_\nu)}{f''(\beta_\nu)} = -\frac{a_1^2(n-1)-2na_2}{n^3}, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f(\beta_\nu)}{(\alpha-\beta_\nu)^2 f''(\beta_\nu)} = -\frac{n-1}{n}. \tag{2}$$

Лема 2. Ако нулите на полинома $f(x)$ са реални и прости и β_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$, са нулите на $f'(x)$, то

$$\frac{f(\beta_\nu)}{f''(\beta_\nu)} < 0, \quad \nu=1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Тъждеството (1) се получава от разлагането на $\frac{f(x)}{f'(x)}$ в елементарни дроби

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x}{n} + \frac{a_1}{n^2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f(\beta_\nu)}{f''(\beta_\nu)(x-\beta_\nu)}, \tag{4}$$

като се умножи почленно с x и се премине към граница при $x \to \infty$. Тъждеството (2) следва от (4) чрез диференциране и заместване на x с α.

Неравенствата (3), които са очевидни и от геометрични съображения, следват от тъждеството

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_\mu}$$

(α_μ са нулите на $f(x)$) чрез диференциране и заместване на x с β_ν. Имаме

$$\frac{f''(\beta_\nu)}{f(\beta_\nu)} = -\sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{(\beta_\nu-\alpha_\mu)^2}.$$

За доказателството на теорема 1 можем да считаме без ограничение на общността, че полиномът $f(x)$ няма кратни нули. Тогава твърдението на теоремата се установява с помощта на горните леми по следния начин. Полагаме $a_0=1$,

$$p_\nu = -\frac{f(\beta_\nu)}{f''(\beta_\nu)}, \quad \delta_\nu(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-\beta_\nu)^2}, \quad D = \left(\frac{a_1}{n}\right)^2 - \frac{2a_2}{n(n-1)}.$$

При тези означения съгласно (1) и (2) имаме

$$\frac{1}{D} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \delta_\nu(\alpha)}{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \tag{5}$$

Понеже $p_\nu > 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, от (5) следва, че измежду числата

$$\delta_1(\alpha), \delta_2(\alpha), \ldots, \delta_{n-1}(\alpha)$$

има както по-големи, така и по-малки от D^{-1}, освен в случая, когато всичките те са равни на D^{-1}. Последното е възможно само при $n=2$, или $n=3$. И така ще съществува поне едно ν, за което $\delta_\nu(\alpha) \geqq D^{-1}$, т. е. $|\alpha - \beta_\nu| \leqq \sqrt{D} = \delta$. От доказателството се вижда, че извън интервала $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ също ще има поне една нула на $f'(x)$. Ясно е освен това, че при $n>3$ и когато $f(x)$ няма кратни нули, теоремата е в сила и за отворения интервал $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. При $n=2$ или $n=3$ посочените граници за нулите на $f'(x)$ се достигат.

Да приложим теорема 1 за полиноми от вида

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{\mu x^2}{2n}\right)^n p(x), \ \mu > 0,$$

където $p(x)$ е полином, който има само реални нули. Пресмятането показва, че $\delta_n = \delta(f_n) \to \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ при $n \to \infty$. По такъв начин чрез граничен преход при $n \to \infty$ лесно установяваме следното твърдение: ако $p(x)$ е полином само с реални нули и α е произволна нула на $p(x)$, уравнението

$$p'(x) - \mu x p(x) = 0, \ \mu > 0,$$

има поне един корен в интервала

$$\left[\alpha - \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \alpha + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right]. \tag{6}$$

Примерът с полинома $p(x) = x$ показва, че горният интервал изобщо не може да се стесни. Интересно е в случая, че интервалът (6) не зависи нито от коефициентите на $p(x)$, нито от степента на $p(x)$.

По подобен начин ще докажем следната теорема, която е аналогична на теорема 1.

Теорема 2. Нека полиномът

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \tag{7}$$

има само реални нули и да положим

$$\eta=\eta(f)=\sqrt{\frac{(n-1)\,a_{n-1}^2-2na_{n-2}\,a_n}{(n-1)\,a_{n-1}^2}}. \tag{8}$$

Ако α е произволна нула на $f(x)$, съществува нула β на $f'(x)$, за които е в сила неравенството

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right|\leqq\eta.$$

Освен това в областта $\left|\frac{\alpha-x}{x}\right|>\eta$ също има нули на $f'x)$.

Предварително ще докажем, че в означенията на лема 1 имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n-}\frac{f(\beta_\nu)}{\beta_\nu^2 f''(\beta_\nu)}=-\frac{(n-1)\,a_{n-1}^2-2na_{n-2}\,a_n}{(n-1)\,a_{n-1}^2} \tag{9}$$

Наистина от (4) след почленно диференциране и заместване на x с 0 се получава (9). Да запишем (2) във вида

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{f(\beta_\nu)}{\beta_\nu^2 f''(\beta_\nu)}\left(\frac{\beta_\nu}{\alpha-\beta_\nu}\right)^2=-\frac{n-1}{n} \tag{10}$$

и да положим

$$q_\nu=-\frac{f(\beta_\nu)}{\beta_\nu^2 f''(\beta_\nu)},\quad \eta_\nu(\alpha)=\left(\frac{\beta_\nu}{\alpha-\beta_\nu}\right)^2,\quad D=\eta^2.$$

При тези означения от (9) и (10) следва

$$\frac{1}{D}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1}q_\nu\,\eta_\nu(\alpha)}{\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu}.$$

Тъй като $q_\nu>0$, заключаваме че измежду числата

$$\eta_1(\alpha),\ \eta_2(\alpha),\ldots\ \eta_{n-1}(\alpha)$$

има както по-големи, така и по-малки от D^{-1}, освен ако всичките те са равни на D^{-1}. Следователно ще съществува поне едно ν, такова че $\eta_\nu(\alpha)\geqq D^{-1}$, т. е.

$$\left|\frac{\alpha-\beta_\nu}{\beta_\nu}\right|\leqq\sqrt{D}=\eta.$$

Аналогично се доказва и последната част от теоремата.

Теорема 2 може да се формулира и по следния начин: ако α е произволна нула на полинома $f(x)$ от (7) и η е числото от (8), полиномът $f'(x)$ има поне една нула в интервала $[a, b]$, където

$$a=\min\left(\frac{\alpha}{1-\eta}, \frac{\alpha}{1+\eta}\right), \quad b=\max\left(\frac{\alpha}{1-\eta}, \frac{\alpha}{1+\eta}\right).$$

Да приложим теоремите 1 и 2 за цели функции от лагеров тип. Нека

$$f(x)=c_0+c_1 x+c_2 x^2+\cdots+c_n x^n+\cdots \tag{11}$$

е функция от лагеров тип, т. е. цяла функция, която е граница на полиноми само с реални нули. Да образуваме съответните полиноми на Иенсен

$$f_n(x)=\tilde{h}_n\left(\frac{x}{n}\right),$$

където

$$\tilde{h}_n(x)=x^n h_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad h_n(x)=f(D)\, x^n, \quad D=\frac{d}{dx}.$$

Известно е, че полиномите на Иенсен са с реални нули и $f_n(x)$ клони към $f(x)$ равномерно във всяка ограничена област. Да положим $\delta(f_n)=\delta_n$ и $\eta(f_n)=\eta_n$, където $\delta(f)$ и $\eta(f)$ са числата от теорема 1 и теорема 2. С непосредствено пресмятане намираме

$$\delta_n=\frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{nc_{n-1}}{c_n}\right)^2-\frac{n^3}{n-1}\cdot\frac{c_{n-2}}{c_n}}, \quad \eta_n=\sqrt{\frac{c_1^2-2c_2 c_0}{c_1^2}}. \tag{12}$$

Чрез граничен процес от теореми 1 и 2 получаваме:

Теорема 3. Нека α е произволна нула на цялата функция (11) и δ_0 е най-малката точка на сгъстяване на редицата δ_n от (12), т. е. $\delta_0=\lim\limits_{\lim} \delta_n$. Тогава в интервала

$$[\alpha-\delta_0, \alpha+\delta_0]$$

има поне една нула на $f'(x)$.

Теорема 4. Нека α е произволна нула на цялата функция (11) и да положим

$$a=\min\left(\frac{\alpha}{1-\eta_0}, \frac{\alpha}{1+\eta_0}\right), \quad b=\max\left(\frac{\alpha}{1-\eta_0}, \frac{\alpha}{1+\eta_0}\right),$$

където

$$\eta_0=\eta_n=\sqrt{\frac{c_1^2-2c_0 c_2}{c_1^2}}.$$

Тогава в интервала $[a, b]$ има поне една нула на $f'(x)$.

Ще приложим теорема 3 за функцията

$$f(x)=e^{\lambda x}p(x),$$

където $\lambda\neq 0$ е произволно реално число и $p(x)$ е полином само с реални нули. Ако

$$p(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k,$$

за коефициентите c_n, c_{n-1} и c_{n-2} на $f(x)$ получаваме

$$c_n=\frac{\lambda^n}{n!}a_k+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}a_{k-1}+\cdots+\frac{\lambda^{n-k+1}}{(n-k+1)!}a_1+\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!},$$

$$c_{n-1}=\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}a_k+\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}a_{k-1}+\cdots+\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}a_1+\frac{\lambda^{n-k-1}}{(n-k-1)!},$$

$$c_{n-2}=\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}a_k+\frac{\lambda^{n-3}}{(n-3)!}a_{k-1}+\cdots+\frac{\lambda^{n-k-1}}{(n-k-1)!}a_1+\frac{\lambda^{n-k-2}}{(n-k-2)!}.$$

Оттук след известни пресмятания намираме $\delta_0=\lim\limits_{\lim}\delta_n=\frac{\sqrt{k}}{\lambda}$.

И така в сила е следната

Теорема 5. Ако α е произволна нула на полинома $p(x)$, който има само реални нули и е от степен k, а $\lambda\neq 0$ е произволно реално число, в интервала

$$\left[\alpha-\frac{\sqrt{k}}{\lambda},\ \alpha+\frac{\sqrt{k}}{\lambda}\right]$$

има поне един корен на уравнението

$$p'(x)+\lambda p(x)=0.$$

Интересно в случая е това, че горният интервал не зависи от коефициентите на $p(x)$, а само от степента на полинома $p(x)$.

Накрая да отбележим едно следствие от теорема 4. Нека $f(x)$ е цяла функция от лагеров тип и α, β са нули съответно на $f(x)$ и на $f''(x)$; тогава във всеки от интервалите $\left(-\infty,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ и $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\infty\right)$ има поне по една нула на $f'(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дочев, К.: Физико-математическо списание, 8 (1965), стр. 219 (зад. 103) и 9 (1966), стр. 226—228.
2. Dočev, K.: Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen C. R. Acad. Bulg. Sci., 15 (1962), № 3, 239—341.

Постъпила на 13. IX. 1971 г.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES A ZÉROS RÉELS ET DES FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE LAGUERRIEN

K. Dočev, D Dimitrov

(RÉSUM É)

On démontre quelques théorèmes sur les zéros de polynômes possédant seulement des racines réelles et de fonctions entières qui sont des limites des polynômes.

Théorème. Soit α un zéro quelconque de la fonction entière

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

de type laguerrien et soit $\delta_0=\lim\limits_{\text{lim}}\delta_n$, où

$$\delta_n=\frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{nc_{n-1}}{c_n}\right)^2-\frac{n^3}{n-1}\frac{c_{n-2}}{c_n}}.$$

Alors dans l'intervalle $[\alpha-\delta_0, \alpha+\delta_0]$ il y a au moins un zéro de $f'(x)$.

Théorème. Soit α un zéro quelconque de la fonction entière

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

de type laguerrien et

$$a=\min\left(\frac{\alpha}{1-\eta_0}, \frac{\alpha}{1+\eta_0}\right), \quad b=\max\left(\frac{\alpha}{1-\eta_0}, \frac{\alpha}{1+\eta_0}\right),$$

où

$$\eta_0=\sqrt{\frac{c_1^2-2c_0c_2}{c_1^2}}.$$

Alors dans l'intervalle $[a, b]$ il y a au moins un zéro de $f'(x)$.

Considérés sont encore quelques théorèmes analogues et certaines conséquences.