ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯТА M_1 НА МНОГООБРАЗИЕТО M_3 ОТ ПРАВИ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

В настоящата работа се изследва диференциалната геометрия на произволно еднопараметрично подмногообразие M_1 на съвкупността M_3 от прави в четиримерното проективно пространство с помощта на метода за канонизирване на подмногообразие на дадено многообразие [1], [2]. Този метод ние вече приложихме при изследване на подмногообразията M_2 на съвкупността M_3 [3], [4].

В § 1 на настоящата работа се показва, че построеният полуканоничен репер в [3], който е инвариантно свързан с M_3 и произволно нейно афокално подмногообразие M_2, може да се разглежда и като полуканоничен репер на M_3 относно произволно нейно афокално подмногообразие M_1.

В §2 се дава пълна геометрична характеристика на този репер с помощта на инвариантни обекти на подмногообразието M_1.

В §3 се отделят някои класове афокални подмногообразия M_1 на M_3.

§ I. Полуканоничен репер на съвкупността M_3 относно произволно нейно афокално подмногообразие M_1

Подмногообразията M_1 на съвкупността M_3 се делят на три класа. Класа, съставен от развиваемите повърхнини на M_3, ще наричаме фокален, тъй като всяка от тях принадлежи точно на две от трите двуфокусни конгруенции на M_3. Вторият клас съдържа всички еднопараметрични подсъвкупности на M_3, всяка от които принадлежи само на една от трите двуфокусни конгуренции на M_3. Този клас ще наричаме полуфокален. Очевидно той се разпада на три подкласа поради наличието на три двуфокусни конгруенции в M_3. Третият, най-общият клас се състои от всички еднопараметрични подсъвкупности на M_3, които не принадлежат на никоя от трите двуфокусни конгруенции. Този клас ще наричаме афокален.

Допирателната равнина към кое да е многообразие M_1, на M_3 в коя да е точка на образуващата права p съдържа последната и принадлежи на допирателната хиперравнина [4] в тази точка на всяко

подмногообразие M_2, което обхваща това M_1. Ако подмногообразието M_1 е фокално, то допирателната му равнина за различните точки на p е една и съща, но две различни фокални подмногообразия M_1, т. е. две различни развиваеми повърхнини на M_3, имат различни допирателни равнини.

Допирателните равнини към едно подмногообразие M_1, полуфокално или афокално, в различните точки на правата p са различни, но всички те изпълват едно тримерно подпространство на P_4, което следвайки терминологията в [5], ще наричаме допирателно подпространство на това подмногообразие M_1. От казаното следва:

1. Ако подмногообразието M_1 е полуфокално, то допирателното му подпространство съвпада с допирателната хиперравнина на единствената двуфокусна конгруенция, която го обхваща.

2. Всички полуфокални подмногообразия M_1, принадлежащи на един подклас, т. е. на една и съща двуфокусна конгруенция, имат едно и също допирателно тримерно подпространство — допирателната хиперравнина на тази конгруенция.

Ще покажем, че на две различни афокални подмногообразия M_1 на M_3 съответствуват две различни допирателни тримерни подпространства на P_4.

Произволно афокално подмногообразие M_1 на M_3 се задава с две уравнения от вида

$$a_i\, du^i = 0, \qquad b_i\, du^i = 0, \tag{1.1}$$

където a_i, b_i са функции на u^i, $i=1, 2, 3$. Тъй като уравненията (1.1) са независими, то без стесняване на общността можем да представим произволно афокално M_1 с уравненията

$$du^2 = a\, du^1, \qquad du^3 = b\, du^1, \tag{1.2}$$

където a и b са произволни функции на u^i, $i=1, 2, 3$. Уравненията (1.2), изразени чрез базисните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^5, са

$$\omega_1^4 = \lambda\omega_1^3, \qquad \omega_2^5 = \mu\,\omega_1^3, \tag{1.3}$$

където λ и μ зависят от параметрите на репера, спрямо който работим, и съдържат функциите a и b. Нека реперът е каноничният от

[6], [3], §2. Тъй като подмногообразието (1.3) е афокално, то $\bar{\lambda} \neq 0$, $\mu \neq 0$. От равенството

$$d(A_1+\rho A_2)=(\omega_1^1+\rho\omega_2^1)A_1+(\omega_1^2+d\rho+\rho\omega_2^2)A_2+\omega_1^3 A_3+\omega_1^4(1-\rho)A_4+\rho\omega_2^5 A_5$$

получаваме, че допирателното тримерно подпространство на (1.3) е

$$A_1A_2(A_3+\bar{\lambda}A_4)(-A_4+\mu A_5).$$

Ако допуснем, че и подмногообразието

$$\omega_1^4=\lambda_1\omega_1^3,$$

$$\omega_2^5=\bar{\mu}_1\omega_1^3$$

има същото тримерно подпространство, то получаваме $\bar{\lambda}=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$, т. е. двете подмногообразия съвпадат.

Нека M_1 е произволно афокално подмногообразие на съвкупността M_3, зададено с уравненията (1.2). Означаваме с ε допирателното тримерно подпространство на M_1. Координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$ на репера $B_1B_2B_3B_4B_5$ от нулев ред [3] сега нека е допирателното тримерно подпространство ε на M_1. Чрез базисните форми на този репер подмногообразието M_1 се задава с уравненията

$$\Omega_1^4=\bar{\lambda}\Omega_1^3,$$

(1.4)

$$\Omega_2^5=\mu\Omega_1^3,$$

където λ, μ са функции на всички параметри — главни и вторични и съдържат произволните функции a и b от (1.2). Поради това, че координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$ е допирателно тримерно подпространство на M_1, от равенството

$$d(B_1+\rho B_2)=(\Omega_1^1+\rho\Omega_2^1)B_1+(\Omega_1^2+d\rho+\Omega_2^2)B_2+(\Omega_1^3+\rho\Omega_2^3)B_3$$

(1.5)

$$+(\Omega_1^4+\rho\Omega_2^4)B_4+(\Omega_1^5+\rho\Omega_2^5)B_5$$

следва, че за всяко ρ е изпълнено равенството

$$\Omega_1^5+\rho\Omega_2^5|_{M_1}=0,$$

откъдето поради (1.6) [3] получаваме

(1.6) $$\mu=0,\ \bar{\lambda}=-\frac{a_1}{a_2}.$$

Да потърсим характеристичните форми на подмногообразието M_1, т. е. онези форми, които съответствуват на вторичните параметри, изменящи хиперравнината $\varepsilon=B_1B_2B_3B_4$ при фиксирани u^i, $i=1, 2, 3$. За $\delta(B_1B_2B_3B_4)$ намираме

$$\delta(B_1B_2B_3B_4)=(\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3+\pi_4^4)(B_1B_2B_3B_4)+\pi_3^5(B_1B_2B_5B_4)+\pi_4^5(B_1B_2B_3B_5).$$

Ако чрез закрепване на върховете на репера постигнем $\pi_3^5=\pi_4^5=0$, то ще фиксираме координатна хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$, т. е. ще фиксираме допирателното тримерно подпространство на M_1. Тогава афокалното подмногообразие M_1, към което отнасяме съвкупността M_3, ще стане конкретно. Следователно формите

$$\pi_3^5,\ \pi_4^5 \tag{1.7}$$

са характеристични на M_1.

Забележка 1. Броят на характеристичните форми на M_1 очевидно е две — толкова, колкото е броят на произволните функции a и b в (1.2). Това може да се съобрази по следния начин. Подмногообразието M_1, зададено с (1.4), е фиксирано, ако

$$\delta(\Omega_1^4-\bar{\lambda}\Omega_1^3)|_{M_1}=\Phi_1(\pi_i^j)\Omega_1^3=0,\ \delta(\Omega_2^5-\bar{\mu}\Omega_1^3)|_{M_1}=\Phi_2(\pi_i^j)\Omega_1^3=0,$$

т. е. когато двете линейни форми Φ_k, $k=1, 2$, на вторичните форми π_i^j, $i, j=1, \ldots, 5$, са нули. Следователно, за да не е фиксирано подмногообразието M_1, трябва Φ_k, $k=1, 2$, да са различни от нула.

Следващите закрепвания на репера $B_1B_2B_3B_4B_5$ трябва да са такива, че характеристичните форми (1.7) да останат произволни. Тъй като формите (1.7) бяха характеристични и на произволно афокално подмногообразие M_2[3], то горното изискване е спазено при построяването на полуканоничния репер в [3], §1. Разбира се, закрепването на репера $B_1B_2B_3B_4B_5$ трябва да е такова, че M_1 да остава афокално. Затова е достатъчно: 1) допирателното пространство на M_1 да не става двумерно, тъй като тогава M_1 съвпада с някоя от трите развиваеми повърхнини, т. е. става фокално, и 2) хиперравнината $B_1B_2B_3B_4$ да не става допирателна към нито една от трите двуфокусни конгруенции на M_3, защото в противен случай M_1 ще бъде полуфокално.

От (1.5) и (1.6) намираме, че допирателното тримерно пространство на (1.4) е

$$B_1B_2(a_2B_3-a_1B_4)[(a_2b_1-a_1b_2)B_3+(a_2c_1-a_1c_2)B_4].$$

То е тримерно тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$a_1^2b_2-a_1a_2(b_1-c_2)-c_1a_2^2\neq 0. \tag{1.8}$$

Веднага се вижда, че изискванията 1) и 2) са спазени за репера от [3]. Наистина от равенствата (1.19) и (1.20) от [3] следва, че неравенството (1.8), т. е. изискването 1) е изпълнено. Освен това, тъй като допирателните хиперравнини към конгруенциите (1.*d*), (1.*e*) и (1.*f*) (виж [3], стр. 129) по правата $p=B_1B_2$ са съответно ε_1, ε_2, ε_3, то и изискването 2) е спазено.

Поради това, че за полуканоничния репер в [3] вторичните форми (1.7) не са нули, то афокалното подмногообразие

$$\Omega_1^4=0,$$

(1.4′)

$$\Omega_2^5=0,$$

което има координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$ за свое допирателно подпространство, не е фиксирано и се мени, когато съответните два свободни вторични параметъра се менят. Действително за изменението на десните части на уравненията (1.4′) получаваме

$$\delta\Omega_1^4\Big|_{\Omega_1^4=\Omega_2^5=0}=-\pi_3^5\Omega_1^3,\quad \delta\Omega_2^5\Big|_{\Omega_1^4=\Omega_2^5=0}=-\pi_4^5\Omega_1^3.$$

Тъй като реперът трябва да е свързан с произволно афокално подмногообразие M_1, то ще смятаме двата свободни вторични параметъра произволни функции[1] на u^i, $i=1, 2, 3$. Тогава формите Ω_3^5 и Ω_4^5 също трябва да смятаме главни. При такова уславяне компонентите на инфинитезималните преобразувания на полуканоничния репер на M_3 относно произволно афокално подмногообразие M_1 са: (1.3), (1.6′) (1.51) и (1.52) [3]. Коефициентите пред базисните форми Ω_1^3, Ω_1^4, Ω_2^5 в (1.51) и (1.52) са инварианти на полуканоничния репер. Очевидно те са съвместни диференциални инварианти на съвкупността M_3 и произволно нейно афокално подмногообразие M_1.

Поради това, че реперът от [3], §1 е полуканоничен за M_3 относно произволно нейно афокално подмногообразие M_1, то като вземем пред вид доказаната теорема в [3], заключаваме, че е в сила следната

Теорема. Системата (1.3), (1.6′), (1.51) и (1.52) [3] определя съвкупността M_3 заедно с произволно нейно афокално подмногообразие M_1 с пет произволни функции на три аргумента.

Забележка 2. Ако двата вторични параметъра, които определят положението на координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$, не смятаме функции на главните параметри, то тогава главните форми на репера са: (1.3), (1.6′), (1.51) и (1.52) без последните две [3]. Веднага се съобразява, че системата пфафови уравнения (1.3), (1.6′), (1.51) и (1.52) без последните две [3] определя съвкупността M_3 с три произволни функции на три аргумента. Построеният репер винаги може да се закрепи напълно, като се използува някое конкретно подмногообразие M_1. Тогава между коефициентите в десните части на равенствата (1.51) и (1.52) без последните две равенствата [3] ще се появят две връзки, а коефициентите в десните части на последните две главни форми от (1.52) [3] ще се изразят чрез тези на (1.50) [3].

---

[1] Разбира се, ние бихме могли от самото начало да смятаме въпросните два вторични параметъра произволни функции на u^i, $i=1, 2, 3$, и формите Ω_3^5, Ω_4^5 — главни. Тогава реперите от нулев ред ще зависят от 16 вторични параметъра.

Въвеждаме означенията

$$\Omega_i^k = a_i^k\,\Omega_1^3 + b_i^k\Omega_1^4 + c_i^k\Omega_2^5,\ i,\ k=1,\ \ldots,\ 5. \tag{1.9}$$

В деривационните формули (1.2) [3] на полуканоничния репер полагаме $\Omega_1^4=\Omega_2^5=0$ и получаваме деривационните формули на репер за произволно афокално подмногообразие M_1, който съгласно терминологията в [1] ще наричаме каноничен за M_1. Означаваме

$$\alpha_i^k = a_i^k\big|_{\Omega_1^4=\Omega_2^5=0},\ i,\ k=1,\ \ldots,5. \tag{1.10}$$

Тогава за компонентите на каноничния репер на M_1 имаме

$$\Omega_i^k = \alpha_i^k\Omega_1^3,\ i,\ k=1,\ \ldots,5. \tag{1.11}$$

Коефициентите α_i^k, на брой 17, са диференциалните инварианти на произволно афокално подмногообразие M_1 на съвкупността M_3. Точният израз на α_i^k чрез диференциалните инварианти на полуканоничния репер се получава от (1.51) и (1.52) [3]. Например

$$\alpha_5^3 = (y_6 + z_5)_{\Omega_1^4=\Omega_2^5=0}\ .$$

С помощта на така построения каноничен репер на M_1 може да се изучи цялата диференциална геометрия на афокалните подмногообразия на съвкупността M_3.

§ 2. Геометрична характеристика на полуканоничния репер

В този параграф ще изясним връзката на полуканоничния репер с афокалното еднопараметрично подмногообразие (1.4′), спрямо което е отнесена съвкупността M_3. За по-кратко излагане на нещата означаваме развиваемите повърхнини (1.*a*), (1.*b*), (1.*c*) [3] съответно S_1, S_2, S_3, а двуфокусните конгруенции (1.*d*), (1.*e*), (1.*f*) съответно Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Съгласно направения избор на полуканоничния репер [3] координатната хиперравнина $B_1B_2B_3B_4$ съвпада с допирателното тримерно подпространство ε на подмногообразието (1.4′), върхът B_1 съвпада с фокуса F_1 на развиваемата повърхнина S_1, а B_2 е хармонично спрегнат на B_1 спрямо останалите два фокуса $F_2=B_1+B_2$ и $F_3=B_1-B_2$ на M_3.

Трите координатни подмногообразия M_2 са

$$\Omega_1^3=0 \text{ — параболична конгруенция,} \tag{2.1}$$

$$\Omega_1^4=0 \text{ — параболична конгруенция и} \tag{2.2}$$

$$\Omega_2^5=0 \text{ — афокално подмногообразие.} \tag{2.3}$$

Трите координатни подмногообразия M_1 са:

(2.4) $$\underline{M}_1^{25}: \Omega_1^3 = \Omega_1^4 = 0$$

— развиваемата повърхнина S_1, т. е. принадлежи на фокалния клас,

(2.5) $$M_1^{34}: \Omega_1^3 = \Omega_2^5 = 0$$

— принадлежи на полуфокалния клас и

(2.6) $$M_1^{13}: \Omega_1^4 = \Omega_2^5 = 0$$

— подмногообразието (1.4′), което принадлежи на афокалния клас. Следователно полуканоничният репер е инвариантно свързан и с трите класа еднопараметрични подсъвкупности на M_3.

Върхът B_5 на полуканоничния репер съвпада с първата фокална точка F_1 на M_3 [4], т. е. пресечната точка на допирателните към първите фокални линии върху фокалните хиперповърхнини (F_2) и (F_3). Последните две закрепвания на репера са такива, че втората и третата фокална точка на M_3 са съответно — $F_2 = B_3 - B_4 - B_5$ и $F_3 = B_3 + B_4 + B_5$. Остава да дадем геометрична характеристика за върховете B_3 и B_4.

Прободните точки на фокалните прави f_i, $i = 1, 2, 3$, на M_3 с допирателното тримерно подпространство на произволно афокално подмногообразие M_1 ще наричаме съответно първа, втора и трета фокална точка на M_1 и ще ги означаваме съответно F_i, $i = 1, 2, 3$. При построения полуканоничен репер за подмногообразието $M_1 = M_1^{13}$ имаме

(2.7) $$F_1 = B_3, \quad F_2 = B_3 + B_4, \quad F_3 = B_3 - B_4.$$

Правата f, върху която лежат фокалните точки F_i, $i = 1, 2, 3$, на M_1 ще наричаме фокална права на M_1.

Допирателните равнини на M_1 в точките $F_1 = B_1$, $F_2 = B_1 + B_2$, $F_3 = B_1 - B_2$ и B_2 означаваме съответно с ζ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Ще покажем, че

$$F_i = f_i \cap \zeta_i, \; i = 1, 2, 3,$$

т. е. i-тата фокална точка на M_1 е прободната точка на i-тата фокална права на M_3 с допирателната равнина ζ_i на M_1 в i-тия фокус на M_3.

Наистина допирателната равнина ζ_i на M_1 във фокуса F_i на M_3 принадлежи и на допирателното тримерно пространство ε на M_1, и на допирателната хиперравнина ε_i на (F_i), т. е. $\zeta_i = \varepsilon \cap \varepsilon_i$. Като вземем пред вид, че фокалната права f_i на съвкупността M_3 лежи също в тримерното подпространство ε_i, то следва, че

$$F_i = f_i \cap \varepsilon = f_i \cap \zeta_i, \; i = 1, 2, 3.$$

При построения полуканоничен репер за допирателните равнини ζ_i намираме

(2.8) $\bar{\zeta}_1 = B_1B_2B_3, \quad \bar{\xi}_2 = B_1B_2B_3 + B_4, \quad \bar{\zeta}_3 = B_1B_2B_3 - B_4, \quad \zeta_4 = B_1B_2B_4.$

Следователно ръбът B_3B_4 на полуканоничния репер съвпада с фокалната права f на M_1, като върховете B_3 и B_4 са прободните точки на f с допирателните равнини към M_1 в точките B_1 и B_2. С това геометричната характеристика на полуканоничния репер е дадена.

Забележка. Върхът $B_3 = \bar{F}_1$ е спрегнат с B_4 относно $\bar{\bar{F}}_2$ и $\bar{\bar{F}}_3$, защото точката $B_1 = F_1$ е спрегната с B_2 относно F_2 и F_3.

§ 3. Някои класове афокални подмногообразия M_1 на M_3

В настоящия параграф ще използуваме съвместните диференциални инварианти на съвкупността M_3 и произволно нейно афокално подмногообразие M_1, за да отделим някои класове афокални подмногообразия M_1.

Нека $M_{2,i}$, $i=1, 2, 3, 4$, са подмногообразия (зададени с по едно пфафово уравнение) на съвкупността M_3, имащи едно общо подмногообразие M_1. Допирателните хиперравнини ε^i на $M_{2,i}$, $i=1, 2, 3, 4$, в произволна точка $B_1 + \rho B_2$, различна от фокусите F_j, $j=1, 2, 3$, на M_3, принадлежат на снопа хиперравнини с носител допирателната равнина на M_1 в тази точка. Непосредствено се проверява, че двойното оношение на тези хиперравнини не зависи от ρ, т. е. от допирната точка. Това ни дава право да дадем следната

дефиниция: Двойното отношение на допирателните хиперравнини, в точка, различна от фокусите на M_3, към четири подмногообразия M_2 на M_3, съдържащи едно подмногообразие M_1, ще наричаме двойно отношение на тези четири подмногообразия.

Веднага се проверява, че така дефинираното двойно отношение на подмногообразията $M_{2,i}$ е равно на двойното отношение на допирателните двумерни равнини към многообразията $m_{2,i}$ — образи на $M_{2,i}$ в деветмерното проективно пространство P_9. Сега допирателните двумерни равнини към $m_{2,i}$ в точката $\overline{12}$ — образ на правата B_1B_2, принадлежат на снопа с ос допирателната към линията m_1 — образ на M_1, и лежат в допирателната тримерна равнина към образа m_3 на обхващащата съвкупност M_3. Очевидно така дефинираното двойно отношение е равно на двойното отношение на образите на тези подмногообразия $M_{2,i}$, $i=1, 2, 3, 4$, в двумерната проективна равнина P_2 при изображението П [7], [8]. Например, ако подмногообразията $M_{2,i}$ съдържат подмногообразието (1.4'), то

$$M_{2,i} : \Omega_2^5 = \lambda_i \Omega_1^4, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

и за двойното им отношение получаваме

$$D=(M_{2,1}\,M_{2,2}\,M_{2,3}\,M_{2,4})=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)}.$$

Спрямо построения полуканоничен репер диференциалните уравнения на асимптотичните линии на фокалните хиперповърхнини (F_i), $i=1, 2, 3$, на съвкупността M_3 са съответно

$$\bar{x}_6(\Omega_2^5)^2-(\bar{x}_1-2\bar{x}_6)(\Omega_1^3)^2-\bar{x}_4(\Omega_1^4)^2-2\bar{x}_6\Omega_1^3\Omega_2^5-2\bar{x}_2\Omega_1^3\Omega_1^4=0, \tag{3.1}$$

$$(\bar{z}_6-\bar{y}_6)(\Omega_2^5)^2+(\bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_6)(\Omega_1^3)^2+(\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_6+\bar{z}_5-\bar{y}_2)(\Omega_1^4)^2$$

$$+2(\bar{z}_3+\bar{z}_5+y_6)\,\Omega_1^3\Omega_2^5+2(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6)\Omega_1^4\Omega_2^5+2(\bar{z}_4-\bar{z}_3-\bar{z}_6-\bar{z}_5 \tag{3.2}$$

$$-\bar{y}_4)\,\Omega_1^3\Omega_1^4=0,$$

$$(\bar{z}_6+y_6)(\Omega_2^5)^2+(\bar{y}_6-\bar{y}_2-\bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_5)(\Omega_1^3)^2+(\bar{z}_3+\bar{z}_6-\bar{z}_2-\bar{z}_5-\bar{y}_2)(\Omega_1^4)^2$$

$$+2(\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_6)\Omega_1^3\Omega_2^5+2(\bar{z}_5-\bar{z}_3-\bar{z}_6)\Omega_1^4\Omega_2^5+2(\bar{z}_6-\bar{y}_4-\bar{z}_4+\bar{z}_3-\bar{z}_5)\Omega_1^3\Omega_1^4=0 \tag{3.3}$$

Трите параболични конгруенции, съ ържащи афокалното подмногообразие (1.4′), и развиваемата повърхнина S_i, $i=1, 2, 3$, са съответно

$$\Pi_1:\Omega_1^4=0,$$

$$\Pi_2:\Omega_1^4+\Omega_2^5=0,$$

$$\Pi_3:\Omega_1^4-\Omega_2^5=0.$$

Хармонично спрегнатото подмногообразие M_2 на Π_1 относно Π_2 и Π_3 е

$$\Omega_2^5=0. \tag{3.4}$$

Спрегнатите подмногообразия M_2 [7] на еднопараметричното подмногообразие (1.4′) спрямо фокалните хиперповърхнини (F_i), $i=1,2,3$ са съответно

$$\bar{x}_6\Omega_2^5+(\bar{x}_1-2\bar{x}_6)\,\Omega_1^3+\bar{x}_2\Omega_1^4=0, \tag{3.5}$$

$$(\bar{z}_3+\bar{z}_5+\bar{y}_6)\,\Omega_2^5+(\bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_6)\Omega_1^3+(\bar{z}_4-\bar{z}_3-\bar{z}_6 \tag{3.6}$$

$$-\bar{z}_5-\bar{y}_4)\Omega_1^4=0,$$

$$(\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_6)\Omega_2^5+(\bar{v}_6-\bar{y}_2-\bar{z}_2-\bar{z}_3+\bar{z}_5)\Omega_1^3+(\bar{z}_6-\bar{y}_4-\bar{z}_4 \tag{3.7}$$

$$+\bar{z}_3-\bar{z}_5)\,\Omega_1^4=0.$$

Спрегнатите подмногообразия M_2, различни от двуфокусните конгруенции Σ_i, $i=1, 2, 3$, на развиваемите повърхнини S_i, $i=1, 2, 3$, спрямо фокалните хиперповърхнини (F_i), $i=1, 2, 3$, имат представяне:

$$M_{2,S_3}^{(F_1)} : (x_1-\bar{x}_6+\bar{x}_2)\Omega_1^3+(\bar{x}_2+\bar{x}_4)\Omega_1^4=0$$

— спрегната на S_3 спрямо (F_1);

$$M_{2,S_2}^{(F_1)} : (\bar{x}_6-\bar{x}_1+\bar{x}_2)\Omega_1^3+(x_4-x_2)\,\Omega_1^4=0$$

— спрегната на S_2 спрямо (F_1);

$$M_{2,S_1}^{(F_2)} : (\bar{z}_6-y_6)\Omega_2^5+(z_3+z_5+\bar{y}_6)\Omega_1^3+(z_3+\bar{z}_5+\bar{z}_6)\Omega_1^4=0$$

— спрегната на S_1 спрямо (F_2);

$$M_{2,S_3}^{(F_2)} : 2(\bar{z}_6+z_3+\bar{z}_5)\Omega_2^5+(\bar{z}_2-\bar{z}_3-z_5-y_2+z_4-\bar{z}_6-y_4)\Omega_1^3$$

$$+(z_2+\bar{z}_3+z_6+\bar{z}_5-y_2-y_4+\bar{z}_4)\Omega_1^4=0$$

— спрегната на S_3 спрямо (F_2);

$$M_{2,S_1}^{(F_3)} : (\bar{y}_6+\bar{z}_6)\,\Omega_2^5+(z_3-z_5-y_6)\Omega_1^3+(z_5-z_3-\bar{z}_6)\Omega_1^4=0,$$

— спрегната на S_1 спрямо (F_3);

$$M_{2,S_2}^{(F_3)} : 2(z_6+\bar{z}_3-z_5)\Omega_2^5+(y_4+z_4+\bar{z}_5-y_2-\bar{z}_2-\bar{z}_3-z_6)\Omega_1^3$$

$$+(y_2+\bar{z}_2+z_5-y_4-\bar{z}_4-\bar{z}_3-z_6)\Omega_1^4=0$$

— спрегната на S_2 спрямо (F_3).

Подмногообразията (3.1)—(3.7), $\mathrm{Ш}_i$, $i=1, 2, 3$, и $M_{2,S_j}^{(F_k)}$, $j, k=1, 2, 3$, $j\neq k$, ще използуваме, за да отделим някои класове афокални подмногообразия M_1.

1. Ако $x_1-2\bar{x}_6=0$ ($\bar{z}_2-z_3-z_5-y_2-\bar{y}_6=0$ съответно $\bar{y}_6-\bar{y}_2-z_2-\bar{z}_3+z_5=0$), то подмногообразието (1.4′) поражда асимптотична линия върху фокалната хиперповърхнина (F_1) ((F_2), съответно (F_3)).

2. Ако $\bar{x}_1-2\bar{x}_6=0, \bar{z}_2-\bar{z}_3-\bar{z}_5-\bar{y}_2-\bar{y}_6=0$ ($x_1-2x_6=0$, $\bar{y}_6-\bar{y}_2-z_2-z_3+\bar{z}_5=0$, съответно $\bar{z}_3+y_2=0, \bar{z}_2-\bar{z}_5-\bar{y}_6=0$), то подмногообразието (1.4′) поражда асимптотични линии върху фокалните хиперповърхнини (F_1) и (F_2) [(F_1) и (F_3), съответно (F_2) и (F_3)].

3. Ако $x_1-2x_6=0, \bar{z}_3+y_2=0, \bar{z}_2-\bar{z}_5-\bar{y}_6=0$, то (1.4′) поражда и върху трите фокални хиперповърхнини асимптотични линии,

4. Ако

$$x_6(z_4-z_3-z_6-z_5-y_4)-x_2(z_3+z_5+y_6)=0,\ (x_1-x_6)(z_4-z_3-z_6-z_5-y_4)-x_2(z_2-y_2)=0$$

$$(x_6(z_6-y_4-z_4+z_3-z_5)-x_2(z_3-z_5-y_6)=0,\ (x_1-x_6)(z_6-y_4-z_4+z_3-z_5)+x_2(y_2+z_2)=0,$$

съответно $z_3(y_6+z_5-z_2)-(z_5+y_6)(y_2-z_3)=0$, $z_3(z_6-z_4+z_3)-(z_5+y_6)(y_4+z_5)=0$), то подмногообразието (1.4') е спрегнато относно фокалните хиперповърхнини (F_1) и (F_2) ((F_1) и (F_3), съответно (F_2) и (F_3)) с едно и също подмногообразие M_2.

5. Ако $x_1+x_2-x_6=0$ ($x_6-x_1+x_2=0$), то подмногообразието (1.4') е спрегнато с развиваемата повърхнина S_3 (S_2) относно (F_1), т. е. принадлежи на подмногообразието $M^{(F_1)}_{2,S_3}$ ($M^{(F_1)}_{2,S_2}$).

6. Ако $x_2+x_4=0$ ($x_2-x_4=0$), то подмногообразието (1.4') принадлежи на хармонично спрегнатото полуфокално подмногообразие M_2 на подмногообразието $M^{(E_1)}_{2,S_3}$ ($M^{(F_1)}_{2,S_2}$) относно двуфокусните конгруенции Σ_2 и Σ_3.

7. Ако $z_2-z_3-z_5-y_2+z_4-z_6-y_4=0$ ($z_3+z_5+y_6=0$), то многообразието (1.4') е спрегнато относно (F_2) с развиваемата повърхнина S_3 (S_1) на съвкупността M_3, т. е. принадлежи на $M^{(F_2)}_{2,S_3}$ ($M^{(F_2)}_{2,S_1}$).

8. Ако $z_2+z_4-y_2-y_4+3(z_3+z_5+z_6)=0$ ($2z_6-y_6+z_3+z_5=0$), то (1.4') принадлежи на хармонично спрегнатото подмногообразие M_2 на $M^{(F_2)}_{2,S_3}$ ($M^{(F_2)}_{2,S_1}$) относно двуфокусните конгруенции Σ_1 и Σ_3.

9. Ако $z_3-z_5-y_6=0$ ($y_4+z_4+z_5-y_2-z_2-z_3-z_6=0$), то подмногообразието (1.4') е спрегнато относно (F_3) с развиваемата повърхнина S_1 (S_2), т. е. принадлежи на $M^{(F_3)}_{2,S_1}$ ($M^{(F_3)}_{2,S_2}$).

10. Ако $z_3-z_5+2z_6+y_6=0$ ($y_2+z_2-y_4-z_4+3(z_5-z_3-z_6)=0$), то подмногообразието (1.4') принадлежи на хармонично спрегнатото подмногообразие M_2 на $M^{(F_3)}_{2,S_1}$ ($M^{(F_3)}_{2,S_2}$) относно Σ_1 и Σ_2.

11. Ако $y_6+y_4-z_2-z_4=0$ ($2z_3+2z_5+y_6+z_6=0$), то подмногообразието $M^{(F_2)}_{1,\Sigma_1}=\Sigma_2\cap M^{(F_2)}_{2,S_3}$ — спрегнатото на Σ_1 спрямо (F_2) ($M^{(F_2)}_{1,\Sigma_3}=\Sigma_2\cap M^{(F_2)}_{2,S_1}$ — спрегнатото на Σ_3 спрямо (F_2)) принадлежи на подмногообразието (3.4) — хармонично спрегнатото на Π_1 относно Π_2 и Π_3.

12. Ако $y_2+z_2-y_4-z_4=0$ ($2z_3-2z_5-y_6+z_6=0$), то подмногообразието $M^{(F_3)}_{1,\Sigma_1}=\Sigma_3\cap M^{(F_3)}_{2,S_3}$ — спрегнатото на Σ_1 спрямо (F_3) ($M^{(F_3)}_{1,\Sigma_2}=\Sigma_3\cap M^{(F_3)}_{2,S_1}$ — спрегнатото на Σ_2 спрямо (F_3)) принадлежи на подмногообразието (3.4).

Аналогични на подмногообразията M_1, отбелязани в точки 11. и 12., могат да се посочат още по две — две отнасящи се за хармонич-

но спрегнатото подмногообразие M_2 на Π_3 относно Π_1 и Π_2 и две за хармонично спрегнатото подмногообразие M_2 на Π_2 относно Π_1 и Π_3.

13. Ако $\overline{x_4}(\overline{x_1}-\overline{x_6})-\overline{x_2^2}=0$, то подмногообразието (1.4′) принадлежи на общата двойка хармонично спрегнати подмногообразия M_2 на двойките подмногообразия Σ_2, Σ_3 и $M^{(F_1)}_{2,S_2}$, $M^{(F_1)}_{2,S_3}$.

Аналогични на подмногообразието M_1 в т. 13. могат да се посочат още две — едното отнасящо се до двойките Σ_1, Σ_3 и $M^{(F_2)}_{2,S_1}$ $M^{(F_2)}_{2,S_3}$, а другото за двойките Σ_1, Σ_2 и $M^{(F_3)}_{2,S_1}$, $M^{(F_3)}_{2,S_2}$.

Като се използват връзките (1.42) [3] (виж поправката за δy_2 в [4]) се вижда, че ако съвместните диференциални инварианти на съвкупността M_3 и еднопараметричното подмногообразие (1.4′) удовлетворяват съответно равенствата, посочени в т. 1. —13., то някои от двата свободни вторични параметъра на полуканоничния репер се фиксират. Това е тъй, защото афокалното подмногообразие M_1, спрямо което е отнесена съвкупността M_3, вече не е напълно произволно. За подмногообразията, разгледани в т. 1., 4, —13. остава свободен само един вторичен параметър, а за подмногообразията от т. 2 и т. 3. всички вторични параметри са закрепени. Следователно в тези два случая репер-ът става каноничен за съвкупността M_3. Освен това при т. 3 обхващащото многообразие M_3 притежава та и особеност, че има афокално подмногообразие M_1, което поражда асимптотични линии и върху трите фокални хиперповърхнини на M_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, Р. Н.: О методе репеража подмногообразий. Тр. Томского ун-та, 1963 **168**, 5—11.
2. Щербаков, Р. Н.: О методе подвижного репера и репеража подмногообразии. Тр. Томского ун-та, 1967, т. **191**. вып. 6.
3. Иванова-Каратопраклиева, И.: Диференциална геометрия на двупараметричните подмногообразия на многообразието M_3 от прави в P_4 (I). Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 123—156.
4. Иванова — Каратопраклиева И.: Диференциална геометрия на подмногообразията M_2 на многообразието M_3 от прави в P_4 (II). Год. на Соф. унив., Мат. фак. **64** (1969/70).
5. Карапетян, С. Е.: Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства I, Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-мат. н., **15**, 1962, №2, 25—43.
6. Иванова-Каратопраклиева, И.: Канонический репер трехпараметрических совокупностей прямых четырехмерного проективного пространства. Докл. БАН, **18**, 1965 № 8, 707—710.
7. Иванова-Каратопраклиева, И.: Някои геометрични тълкувания на диференциални инварианти от втори ред на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Изв. на Мат. инст. на БАН, **10**, 1969, 59—67.
8. Иванова-Каратопраклиева, И.: Инварианти от втори ред на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Изв. на Мат. инст. на БАН, **11**, 1970, 295—304.

Постъпила на 27. IX. 1971 г.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES SOUS-VARIÉTÉS DU SYSTÈME M_3 DE DROITES DANS P_4

Iv. Ivanova-Karatoprakliéva

(RÉSUMÉ)

Dans cet article on considère les sous-variétés M_1 à une dimension du système M_3 de droites dans P_4 avec la méthode du repérage de sous-variétés [1], [2].

Les sous-varietés M_1 du système M_3 forment de trois classes: focale, demifocale et afocale.

On montre qu'on peut considérer le repère semicanonique [3] du système M_3 comme un repère semicanonique du système M_3 par rapport à une sous-variété afocale M_1 arbitraire.

La caractérisation géométrique du repère semicanonique $B_1B_2B_3B_4B_5$ est la suivante:

Le sommet B_1 coïncide avec le foyer F_1 de M_3 et B_2 est conjugué harmoniquement par rapport aux deux autres foyers F_2 et F_3 de M_3. Le hyperplan de coordonnée $B_1B_2B_3B_4$ coïncide avec le sous-espace tangent ε de M_1. Le sommet B_5 coïncide avec le premier point focal (le point d' intersection des droites tangentes des premières lignes focales sur les hypersurfaces focales (F_2) et (F_3)) F_1 de M_3. B_3 et B_4 coïncident avec les points d'intersection de la droite focale f de M_1 avec les plans tangents de M_1 respectivement aux points B_1 et B_2.

On définit un rapport anharmonique des quatres sous-variétés M_2 du système M_3 qui ont une sous-variété M_1 commune. À l'aide de ce rapport anharmonique et des formes asymptotiques des hypersurfaces focales de M_3 on considère certaines sous-variétés afocales spéciales M_1 de M_3.