ВЪРХУ КИНЕМАТИКАТА НА ТОЧКА В КРИВОЛИНЕЙНИ КООРДИНАТИ

Иванка Христова и Иван Чобанов

1. Ако

$$\vec{r} = r(p_1, p_2, p_3) \tag{1}$$

е векторна функция на независимите променливи

$$p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{2}$$

с

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial p_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_3} \neq 0, \tag{3}$$

наредените тройки числа

$$(p_1, p_2, p_3) \tag{4}$$

се наричат *криволинейни координати* на точката с радиус-вектор $\vec{r}$.

Повърхнината (1), където ν-тата криволинейна координата (2) е фиксирана, а другите две могат да се изменят независимо една от друга, се нарича *ν-та координатна повърхнина* на системата (4) криволинейни координати.

Кривата (1), където ν-тата криволинейна координата (2) е променлива, а другите две са фиксирани, се нарича *ν-та координатна крива* на системата (4) криволинейни координати.

Въвеждането на втора система криволинейни координати

$$q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{5}$$

се основава на следните две теореми.

Теорема 1. При (1), (3) нека

$$p_\nu = p_\nu(q_1, q_2, q_3) \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{6}$$

са функции на независимите променливи (5) с

$$\frac{D(p_1, p_2, p_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} \neq 0 \tag{7}$$

и нека

(8) $$\bar{\rho}(q_1, q_2, q_3) = \bar{r}[p_1(q_1, q_2, q_3), p_2(q_1, q_2, q_2), p_3(q_1, q_2, q_3)].$$

Тогава

(9) $$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial q_1} \times \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial q_3} \neq 0.$$

Доказателство. Нека

(10) $$\bar{a}_\nu = \frac{\partial\bar{r}}{\partial p_\nu}, \qquad \bar{b}_\nu = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Тогава

(11) $$\bar{b}_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} \bar{a}_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

От

(12) $$\sum_{\mu=1}^{3} \beta_\mu \bar{b}_\mu = \bar{0}$$

с

(13) $$\sum_{\mu=1}^{3} \beta_\mu^2 \neq 0$$

и (11) следва

(14) $$\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \beta_\mu \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} \bar{a}_\nu = \bar{0}.$$

От (14), (10), (3) следва

(15) $$\sum_{\mu=}^{3} \beta_\mu \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

От (15), (13) следва

(16) $$\frac{D(p_1, p_2, p_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = 0,$$

противно на (7).

Теорема 2. От (1), (3), (6), (8), (9) следва (7).

Доказателство. От (11) следва

(17) $$\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_\mu} = \bar{a}_\lambda^{-1} \bar{b}_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3).$$

Тогава

(18) $$\frac{D(p_1, p_2, p_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = (\bar{a}_1^{-1} \times \bar{a}_2^{-1} \cdot \bar{a}_3^{-1})(\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 . b_3) \neq 0$$

съгласно (3), (9), (10).

Дотук не стана нужда от едно специално свойство на функциите (1), което поради това по-горе не беше споменато, но което ще изискваме с оглед на това величините (2) наистина да представляват система криволинейни координати. При това вместо начина на записване (8) ще пишем просто

(19) $$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3),$$

когато векторът (1) е функция и на криволинейните координати (5). Въпросното свойство е следното. Не само че тройката (4) определя еднозначно вектора $\bar{r}$ посредством (1), но и, обратно, векторът $\bar{r}$ пак посредством (1) определя еднозначно тройката (4).

Въз основа на това, когато са дадени две системи (2), (5) криволинейни координати, на всяка тройка

(20) $$(q_1, q_2, q_3)$$

от стойности на (5) съответствува определен вектор $\bar{r}$ посредством (19), а на последния съгласно казаното съответствува определена тройка (4) от стойности на (2). С това са дефинирани три функции (6), които осъществяват връзката между криволинейните координати (2) и (5). Условието (7) е изпълнено по силата на теорема 2.

Ще възприемем означението

(21) $$\bar{p}_\nu^0 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\nu}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\nu} \right|} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

при (1). Векторът (21) се нарича *ν-ти тангенциален орт* на системата (2) криволинейни координати. Поради (3) съществува реципрочният репер

(22) $$(\bar{p}_\nu^0)^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

на репера (21). Поради

(23) $$(\bar{p}_\nu^0)^{-1} = \frac{\bar{p}_{\nu+1}^0 \times \bar{p}_{\nu+2}^0}{\bar{p}_1^0 \times \bar{p}_2^0 . \bar{p}_3^0} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

при

(24) $$\bar{v}_{\nu+3}^0 = \bar{p}_\nu^0 \qquad (\nu = 1, 2)$$

векторът (23) е нормален към ν-тата координатна повърхнина на системата (2) криволинейни координати.

Descartes'овите координатни системи се въвеждат на базата на следната

Теорема 3. При

$$r=\sum_{\nu=1}^{3} p_\nu \bar{p}_\nu^0=\sum_{\nu=1}^{3} q_\nu \bar{q}_\nu^0 \tag{25}$$

с

$$\frac{\partial \bar{p}_\nu^0}{\partial p_\mu}=\frac{\partial \bar{q}_\nu^0}{\partial q_\mu}=0 \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3) \tag{26}$$

между криволинейните координати (2), (5) съществува линейна зависимост.

Доказателство. От (25) следва

$$v_\mu=\sum_{\nu=1}^{3} q_\nu(\bar{p}_\mu^0)^{-1}\bar{q}_\nu^0 \qquad (\mu=1,2,3). \tag{27}$$

От (26) следва

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda}(\bar{p}_\mu^0)^{-1}=0 \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3), \tag{28}$$

$$\frac{\partial \bar{q}_\nu^0}{\partial p_\lambda}=\sum_{\sigma=1}^{3}\frac{\partial q_\sigma}{\partial p_\lambda}\,\frac{\partial \bar{q}_\nu^0}{\partial q_\sigma} \qquad (\lambda,\ \nu=1,\ 2,\ 3). \tag{29}$$

От (28), (29) следва

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda}[(\bar{p}_\mu^0)^{-1}\bar{q}_\nu^0]=0 \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3). \tag{30}$$

Аналогично се доказва

$$\frac{\partial}{\partial q_\lambda}[(\bar{p}_\mu^0)^{-1}\bar{q}_\nu^0]=0 \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3). \tag{31}$$

По-долу с

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}, \tag{32}$$

както е обичайно, ще представяме разлагане на произволен вектор $\bar{r}$ в правоъгълна дясно ориентирана Dascartes'ова координатна система с орти съответно $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, но при случай ще използуваме и означението

$$\bar{r}=\sum_{\nu=1}^{3} x_\nu \bar{e}_\nu \tag{33}$$

за същата цел.

2. При (32) криволинейните координати (2) обикновено се въвеждат по един от следните три начина : чрез задаване на системата

$$(34)\qquad \begin{aligned} x&=x(p_1, p_2, p_3),\\ y&=y(p_1, p_2, p_3),\\ z&=z(p_1, p_2, p_3); \end{aligned}$$

чрез задаване на системата

$$(35)\qquad p_\nu=p_\nu(x, y, z) \qquad (\nu=1, 2, 3)$$

или най-после чрез задаване на системата

$$(36)\qquad \varphi_\nu(x, y, z; p_1, p_2, p_3)=0 \qquad (\nu=1, 2, 3)$$

за която се предполага, че е разрешима спрямо x, y, z или спрямо (2).

От (33), (35) следва

$$(37)\qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_\mu}=\bar{e}_\mu=\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\lambda} \qquad (\mu=1, 2, 3).$$

При

$$(38)\qquad \bar{\rho}_\nu=\frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3)$$

на (37) може да се даде видът

$$(39)\qquad \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu}\bar{\rho}_\lambda=\bar{e}_\mu \qquad (\mu=1, 2, 3)$$

Чрез скаларно умножаване на двете страни на (39) с

$$(40)\qquad \bar{p}_\nu^{-1} \qquad (\nu=1, 2, 3)$$

се получава

$$(41)\qquad \bar{\rho}_\nu^{-1}\bar{e}_\mu=\frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, \nu=1, 2, 3).$$

От (41) следва

$$(42)\qquad \bar{\rho}_\nu^{-1}=\operatorname{grad} p_\nu \qquad (\nu=1, 2, 3).$$

За да покажем, че равенствата (42) са и достатъчно условие за (38), ще използуваме следната

Теорема 4. Ако

$$(43)\qquad [\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^{n}, \ [b_\nu]_{\nu=1}^{n}$$

са два репера в пред-Hilbert'овото пространство E, свързани с равенствата

$$\bar{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} \bar{b}_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{44}$$

където

$$\alpha_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{45}$$

са скаларни коефициенти, то

$$\bar{b}_\mu^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu} \bar{a}_\nu^{-1} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n). \tag{46}$$

Доказателство. От (44) следва

$$\bar{b}_\lambda^{-1} \bar{a}_\mu = \alpha_{\mu\lambda} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n). \tag{47}$$

При фиксирано λ системата уравнения (47) има единствено решение

$$\bar{b}_\lambda^{-1} = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu\lambda} \bar{a}_\mu^{-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n) \tag{48}$$

т. е. (46).

Тъй като равенствата (42) са равносилни с

$$\bar{\rho}_\nu^{-1} = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} \bar{e}_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{49}$$

от (42) съгласно теорема 4 следват равенствата (39) поради

$$\bar{e}_\nu^{-1} = \bar{e}_\nu, \quad (\bar{\rho}_\nu^{-1})^{-1} = \bar{\rho}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{50}$$

От (39) и от десните равенства (37) следва

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\mu} \left(\bar{\rho}_\lambda - \frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\lambda} \right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3). \tag{51}$$

Поради

$$\frac{D(p_1, p_2, p_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \tag{52}$$

от (51) следва (38), с което достатъчността на (42) за (38) е установена.

Равенствата (42) дават геометрична интерпретация на реципрочния репер (40) на репера (38).

Поради вторите равенства (50) от (42) следва

$$\bar{\rho}_\nu = \frac{\operatorname{grad} p_{\nu+1} \times \operatorname{grad} p_{\nu+2}}{\operatorname{grag} p_1 \times \operatorname{grad} p_2 \,.\, \operatorname{grad} p_3} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{53}$$

при

$$\operatorname{grad} p_{\nu+3} = \operatorname{grad} p_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2). \tag{54}$$

От (53) и

$$\operatorname{grad} p_1 \times \operatorname{grad} p_2 \,.\, \operatorname{grad} p_3 = \frac{D(p_1,\ p_2,\ p_3)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)} \tag{55}$$

следва

$$\bar{\rho}_\nu = \frac{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}{D(p_1,\ p_2,\ p_3)} \operatorname{grad} p_{\nu+1} \times \operatorname{grad} p_{\nu+2} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{56}$$

при (54). От (21), (38), (56) следва

$$\bar{p}_\nu^0 = \operatorname{sign} \frac{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}{D(p_1,\ p_2,\ p_3)} \frac{\operatorname{grad} p_{\nu+1} \times \operatorname{grad} p_{\nu+2}}{\operatorname{grad} p_{\nu+1} \times \operatorname{grad} p_{\nu+2}} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{57}$$

при (54).

Релациите значително се опростяват, когато системата криволинейни координати (2) е ортогонална, т. е. в случая

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\mu} \frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\nu} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3;\ \mu \neq \nu) \tag{58}$$

За да установим ефекта на (58), ще използуваме следната

Теорема 5. Нека

$$[\bar{a}_\nu]_{\nu=1}^n \tag{59}$$

е репер в пред-Hilbert'ово пространство E. Необходимо и достатъчно условие за

$$\bar{a}_\nu^{-1} = \alpha_\nu \bar{a}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2, \cdots, n) \tag{60}$$

при подходящи скалари α_ν $(\nu = 1,\ 2, \cdots, n)$ е

$$\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \cdots, n;\ \mu \neq \nu). \tag{61}$$

При (61) е в сила

$$\bar{a}_\nu^{-1} = \frac{\bar{a}_\nu}{a_\nu^2} \qquad (\nu = 1,\ 2, \cdots, n) \tag{62}$$

Доказателство. От (60) следва

$$\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu^{-1} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \cdots, n;\ \mu \neq \nu), \tag{63}$$

т. е. (61). От (61) следва

$$a_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} (a_\nu a_\mu) a_\mu^{-1} = a_\nu^2 a_\nu^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n), \tag{64}$$

т. е. (60) и (62).

Специално в случая

$$a_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{65}$$

равенствата (62) приемат вида

$$a_\nu^{-1} = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{66}$$

При

$$\operatorname{grad} p_\mu \operatorname{grad} p_\nu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3;\ \mu \neq \nu) \tag{67}$$

от (42), вторите равенства (50) и теорема 5 следва

$$\rho_\nu = \frac{\operatorname{grad} p_\nu}{(\operatorname{grad} p_\nu)^2} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{68}$$

и

$$\bar{\rho}_\nu = \operatorname{grad} p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{69}$$

при

$$\operatorname{grad} p_\nu^{\dagger} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{70}$$

От (68), (38) следва, че условията (58) и (67) са равносилни.

От (68), (21), (38) следва, че в случая на ортогонална система криволинейни координати (2) е в сила

$$\bar{p}_\nu^0 = \frac{\operatorname{grad} p_\nu}{|\operatorname{grad} p_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \tag{71}$$

3. Като пример ще разгледаме елиптичните криволинейни координати (2), които се дефинират като трите реални корена на уравнението от трета степен спрямо p:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{a_\nu^2 + p} - 1 = 0 \tag{72}$$

при

$$-a_1^2 < p_1 < -a_2^2 < p_2 < -a_3^2 < p_3. \tag{73}$$

От

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{a_\nu^2 + p_\mu} - 1 = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{74}$$

със (73) следва

$$\frac{2x_\nu}{a_\nu^2+p_\mu}=A_\mu\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3) \tag{75}$$

при

$$A_\mu=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^2}{(a_\nu^2+p_\mu)^2} \qquad (\mu=1,2,3). \tag{76}$$

Но

$$A_\mu=\frac{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)} \qquad (\mu=1,2,3) \tag{77}$$

при

$$p_{\nu+3}=p_\nu \qquad (\nu=1,\ 2) \tag{78}$$

[1]. От (75)—(77) следва

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{2x_\nu(a_{\nu+1}^2+p_\mu)(a_{\nu+2}^2+p_\mu)}{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})} \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3) \tag{79}$$

при (78) и

$$a_{\nu+3}=a_\nu \qquad (\nu=1,\ 2). \tag{80}$$

От (79) следва

$$\operatorname{grad} p_\mu=\frac{2(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)}{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu}{a_\nu^2+p_\mu}e_\nu \qquad (\mu=1,2,3) \tag{81}$$

при (78).

От (81) следва (67). Наистина в скаларните произведения, фигуриращи в лявата страна на (67), в случая (81) се появяват множители от вида

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^2}{(a_\nu^2+p_\lambda)(a_\nu^2+p_\mu)} \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3;\ \lambda\neq\mu), \tag{82}$$

които са равни на нула [1].

От (81) следва

$$(\operatorname{grad} p_\mu)^2=\frac{4(a_1^2+p_\mu)^2(a_2^2+p_\mu)^2(a_3^2+p_\mu)^2}{(p_\mu-p_{\mu+1})^2(p_\mu-p_{\mu+2})^2}A_\mu \qquad (\mu=1,2,3) \tag{83}$$

при (78). От (83), (77) следва

$$\operatorname{grad} p_\mu=2\sqrt{\frac{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)}{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}} \qquad (\mu=1,2,3) \tag{84}$$

при (78). От (71), (81), (84) следва

$$\bar{p}_\mu^0=\sqrt{\frac{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)}{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu}{a_\nu^2+p_\mu}e_\nu \qquad (\mu=1,2,3) \tag{85}$$

при (78). Резултатът (85) бе получен и в [1] с директно прилагане на дефинициите (38), (21), но след предварително решаване на системата уравнения (74) спрямо

$$x_\nu^2 \qquad (\nu=1,2,3) \tag{86}$$

Поради ортогоналността на елиптичната координатна система е в сила тъждеството

$$r=\sum_{\mu=1}^{3}(r\,\bar{p}_\mu^0)\,\bar{p}_\mu^0. \tag{87}$$

От (33), (85), (74) следва

$$r\,p_\mu^0=\sqrt{\frac{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)}{(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}} \qquad (\mu=1,2,3) \tag{88}$$

при (78). От (87), (88) следва

$$r=\frac{1}{\sqrt{(p_1-p_2)(p_2-p_3)(p_3-p_1)}}\sum_{\mu=1}^{3}B_\mu p_\mu^0 \tag{89}$$

при

$$B_\mu=\sqrt{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)(p_{\mu+2}-p_\mu)} \tag{90}$$

($\mu=1, 2, 3$) и (78).

И така за намирането на израза (89) с (90), (78) за радиус вектора $\bar{r}$ на произволна точка във функция на елиптичните координати и елиптичните тангенциални орти не се налага решаване на системата уравнения (74) със (73) спрямо (86). От (85) обаче се вижда, че за изразяването на елиптичните тангенциални орти във функция само на елиптичните координати такова решаване се налага.

От

$$x_\nu=\varepsilon_\nu\sqrt{\frac{(a_\nu^2+p_1)(a_\nu^2+p_2)(a_\nu^2+p_3)}{(a_\nu^2-a_{\nu+1}^2)(a_\nu^2-a_{\nu+2}^2)}} \qquad (\nu=1,2,3) \tag{91}$$

при (80) [1], където ε_ν ($\nu=1, 2, 3$) приемат стойностите ± 1 независимо едно от друго и от (85) следва

$$\bar{p}_\mu^0=\sqrt{\frac{(a_1^2+p_\mu)(a_2^2+p_\mu)(a_3^2+p_\mu)}{(a_1^2-a_2^2)(a_2^2-a_3^2)(a_3^2-a_1^2)(p_\mu-p_{\mu+1})(p_\mu-p_{\mu+2})}}\,C_\mu \tag{92}$$

с

(93) $$C_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\varepsilon_\nu \sqrt{(a_\nu^2+p_1)(a_\nu^2+p_2)(a_\nu^2+p_3)(a_{\nu+1}^2-a_{\nu+2}^2)}}{a_\nu^2+p_\mu} e_\nu$$

($\mu=1, 2, 3$) при (78), (80).

4. Обобщени цилиндрични координати могат да се въведат по следния начин. При

(94) $$\zeta = x+iy,$$

където i е имагинерната единица, нека

(95) $$w = w(\zeta) = p_1(x,y) + ip_2(x,y)$$

е аналитична функция на комплексната променлива ζ:

(96) $$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + i\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial y} - i\frac{\partial p_1}{\partial y}$$

поради

(97) $$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}.$$

Полагаме

(98) $$p_\nu = p_\nu(x,y) \qquad (\nu = 1, 2)$$

(99) $$p_3 = z.$$

Поради (97) системата криволинейни координати (2), дефинирана с (98), е ортогонална. От (98), (99) следва

(100) $$\operatorname{grad} p_\nu = \frac{\partial p_\nu}{\partial x} i + \frac{\partial p_\nu}{\partial y} j \qquad (\nu = 1, 2).$$

(101) $$\operatorname{grad} p_3 = k$$

при (32). Тогава от (71), (100), (101) следва

(102) $$p_\nu^0 = \frac{\frac{\partial p_\nu}{\partial x} i + \frac{\partial p_\nu}{\partial y} j}{\sqrt{\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_\nu}{dy}\right)^2}} \qquad (\nu = 1, 2)$$

(103) $$p_3^0 = k.$$

От (96), (100) следва

(104) $$|\operatorname{grad} p_\nu| = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \qquad (\nu = 1, 2).$$

От (104) следва, че на (102) може да се даде вида

$$p_\nu^0 = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial p_\nu}{\partial y}\bar{j}\right) \qquad (\nu = 1,\ 2). \tag{105}$$

От (87), (105) следва

$$\bar{r} = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}\sum_{\nu=1}^{2}\left(x\frac{\partial p_\nu}{\partial x} + y\frac{\partial p_\nu}{\partial y}\right)\bar{p}_\nu^0 + p_3\bar{p}_3^0. \tag{106}$$

От (94), (96) следва

$$\zeta\frac{dw}{d\zeta} = \left(x\frac{\partial p_1}{\partial x} + y\frac{\partial p_1}{\partial y}\right) + i\left(x\frac{\partial p_2}{\partial x} + y\frac{\partial p_2}{\partial y}\right). \tag{107}$$

От (106), (107) следва

$$\bar{r} = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}\left[\mathrm{Re}\left(\zeta\frac{dw}{d\zeta}\right)\bar{p}_1^0 + \mathrm{Jm}\left(\zeta\frac{dw}{d\zeta}\right)\bar{p}_2^0\right] + p_3\bar{p}_3^0. \tag{108}$$

Да допуснем, че аналитичната функция (95) е такава, че съществува функция

$$f(w) = f_1(p_1, p_2) + i f_2(p_1, p_2) \tag{109}$$

съгласно (95), за която

$$\zeta\frac{dw}{d\zeta} = f(w). \tag{110}$$

От (108)—(110) тогава следва

$$\bar{r} = \left|\frac{\zeta}{f(w)}\right|(f_1\bar{p}_1^0 + f_2\bar{p}_2^0) + p_3\bar{p}_3^0. \tag{111}$$

Равенството (110) е равносилно със

$$\frac{dw}{f(w)} = \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{112}$$

т. е.

$$\ln C\zeta = \int\frac{dw}{f(w)}, \tag{113}$$

където C е интеграционна константа.

Случаят (110) е налице винаги когато функцията (95) е обратима

$$\zeta\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\zeta}{\frac{d\zeta}{dw}} = \frac{\zeta(w)}{\zeta'(w)}) = f(w). \tag{114}$$

5. При

(115) $$w = e^{\zeta}$$

От (94), (95), (98) следва

(116) $$p_1 = e^x \cos y,\ p_2 = e^x \sin y,$$

От (100), (116) следва

(117) $$\operatorname{grad} p_1 = p_1 i - p_2 j, \operatorname{grad} p_2 = p_2 i + p_1 j.$$

От (71), (117) следва

(118) $$p_1^0 = \frac{p_1 i - p_2 j}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}},\quad p_2^0 = \frac{p_2 i + p_1 j}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

От (115) следва

(119) $$\zeta = \operatorname{Log} w.$$

От (115), (119) следва

(120) $$\zeta \frac{dw}{d\zeta} = \zeta w = (\ln w + i \operatorname{Arg} w)(p_1 + i p_2).$$

Но

(121) $$w = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},\quad \operatorname{Arg} w = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + (1 - \operatorname{sgn} p_1) \frac{\pi}{2}.$$

От (120), (121), (109), (110) следва

(122) $$f_1 = p_1 \ln \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - p_2 \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - p_2 (1 - \operatorname{sgn} p_1) \frac{\pi}{2},$$

(123) $$f_2 = p_2 \ln \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + p_1 \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + p_1 (1 - \operatorname{sgn} p_1) \frac{\pi}{2}.$$

От (108)—(111), (121)—(123) следва

(124) $$r = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \left\{ \left[p_1 \ln \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - p_2 \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - p_2 (1 - \operatorname{sgn} p_1) \frac{\pi}{2} \right] p_1^0 + \left[p_2 \ln \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + p_1 \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + p_1 (1 - \operatorname{sgn} p_1) \frac{\pi}{2} \right] p_2^0 \right\} + p_3 p_3^0$$

при (118).

6. При

(125) $$w = \ln \zeta$$

от (94), (95), (98) следва

(126) $$p_1 = \ln \sqrt{x^2 + y^2},\ p_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (1 - \operatorname{sgn} x) \frac{\pi}{2}.$$

От (100), (126) следва

(127) $$\operatorname{grad} p_1 = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}}{x^2+y^2}, \quad \operatorname{grad} p_2 = \frac{y\bar{i}-x\bar{j}}{x^2+y^2}.$$

От (71), (127) следва

(128) $$\bar{p}_1^0 = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \bar{p}_2^0 = \frac{y\bar{i}-x\bar{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

От (126) следва

(129) $$x^2+y^2 = e^{2p_1}, \quad y = x \operatorname{tg} p_2.$$

От (129) следва

130) $$x = \varepsilon e^{p_1} \cos p_2, \quad y = \varepsilon e^{p_1} \sin p_2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

От (128), (130) следва

(131) $$\bar{p}_1^0 = \varepsilon(\cos p_2 \bar{i} + \sin p_2 \bar{j}), \quad \bar{p}_2^0 = \varepsilon(\sin p_2 \bar{i} - \cos p_2 \bar{j}).$$

От (125) следва

(132) $$\zeta \frac{dw}{d\zeta} = 1.$$

От (108)—(111), (132) следва

(133) $$\bar{r} = e^{p_1} \bar{p}_1^0 + p_3 \bar{p}_3^0.$$

7. При

(134) $$w = \zeta^n$$

нека

(135) $$\zeta = \rho e^{i\theta}.$$

От (134), (135), (95), (98) следва

(136) $$p_1 = \rho^n \cos n\theta, \quad p_2 = \rho^n \sin n\theta.$$

От (100) следва

(137) $$\operatorname{grad} p_\nu = \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p_\nu}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial p_\nu}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\bar{j} \qquad (\nu = 1, 2).$$

От (135), (94) следва

(138) $$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

От (136) следва

(139) $$\rho = (p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2n}}, \quad \operatorname{tg} n\theta = \frac{p_2}{p_1}.$$

От (138), (94), (135) следва

(140) $$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\theta,\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta;\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{\rho},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

От (136) следва

(141) $$\frac{\partial p_1}{\partial\rho}=\frac{np_1}{\rho},\ \frac{\partial p_1}{\partial\theta}=-np_2;\ \frac{\partial p_2}{\partial\rho}=\frac{np_2}{\rho},\ \frac{\partial p_2}{\partial\theta}=np_1.$$

От (137), (140), (141), (136) следва

(142) $$\operatorname{grad} p_1=n\rho^{n-1}\left[\cos(n-1)\theta\,\bar{i}-\sin(n-1)\theta\,\bar{j}\right].$$

(143) $$\operatorname{grad} p_2=n\rho^{n-1}\left[\sin(n-1)\theta\,\bar{i}+\cos(n-1)\theta\,\bar{j}\right].$$

От (71), (142), (143) следва

(144) $$\bar{p}_1^0=\cos(n-1)\theta\,\bar{i}-\sin(n-1)\theta\,\bar{j},$$

(145) $$\bar{p}_2^0=\sin(n-1)\theta\,\bar{i}+\cos(n-1)\theta\,\bar{j},$$

където

(146) $$\theta=\frac{1}{n}\left[\operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1}+\left(1-\operatorname{sgn}p_1\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

съгласно (139).

От (134), (95) следва

(147) $$\zeta\frac{dw}{d\zeta}=n\zeta^n=nw=n(p_1+ip_2).$$

От (147), (135), (139) следва

(148) $$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|=n(p_1^2+p_2^2)^{\frac{n-1}{2n}}.$$

От (108)—(111), (148), (147) следва

(149) $$\bar{r}=(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1-n}{2n}}(p_1\bar{p}_1^0+p_2\bar{p}_2^0)+p_3\bar{p}_3^0.$$

В частния случай $n=1$ от (149) се получава лявото равенство (25), т. е. Descartes'ова координатна система. Наистина тогава

(150) $$w=\zeta$$

и

(151) $$p_1=x,\quad p_2=y,\quad p_3=z,$$

съгласно (94), (98), (99),

8. От (1), (21) следва

(152) $$\bar{p}_\nu^0=\bar{p}_\nu^0(p_1,p_2,p_3)\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3),$$

(153) $$(\bar{p}_\nu^0)^{-1}=(p_\nu^0)^{-1}(p_1,p_2,p_3)\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3).$$

От (1), (152), (153) и

$$r = \sum_{\nu=1}^{3} [\bar{r}(\bar{p}_\nu^0)^{-1}]\bar{p}_\nu^0 \tag{154}$$

следва, че радиус-векторът (1) на произволна точка се представя във вида

$$r = \sum_{\nu=1}^{3} \varphi_\nu (p_1, p_2, p_3)\bar{p}_\nu^0, \tag{155}$$

където както тангенциалните орти (152), така и компонентите в развитието на (1) по (152) са функции на криволинейните координати (2).

След намирането на развитието (155) следващата стъпка, която представлява интерес от кинематична гледна точка, е пресмятането на скоростта и ускорението, също разложени по тангенциалните орти (152) с компоненти, които са функции на криволинейните координати (2)

$$v = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{3} \psi_\nu (p_1, p_2, p_3)\bar{p}_\nu^0, \tag{156}$$

$$w = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{3} \theta_\nu (p_1, p_2 p_3)\bar{p}_\nu^0. \tag{157}$$

От (155) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\varphi_\nu}{dt}\bar{p}_\nu^0 + \sum_{\nu=1}^{3} \varphi_\nu \frac{d\bar{p}_\nu^0}{dt}. \tag{158}$$

Що се касае до първото събираемо в дясната страна на (158), няма какво повече да се желае — то е линейна комбинация на тангенциалните орти (152) с коефициенти, които са функции на криволинейните координати (2). Трудности тук създава второто събираемо, което също трябва да се представи като линейна комбинация на (152).

За целта би могло да се постъпи, както е посочено в предишната ни работа [1], и да се използва предложеното там развитие

$$\frac{d\bar{p}_\nu^0}{dt} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial p_\nu}\right|} \sum_{\mu=1}^{3} \dot{p}_\mu \left\{ \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial p_\nu \partial p_\lambda} (\bar{p}_\lambda^0)^{-1} \right] \bar{p}_\lambda^0 - \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \bar{p}_\nu^0 \right) \bar{p}_\nu^0 \right\} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{159}$$

при (10), (80). Тук ще следваме малко по-различен път.

Нека

(160) $$\bar{p}_\lambda^0 = \sum_{\nu=1}^{3} \pi_{\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3)\, e_\nu \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3)$$

с

(161) $$\frac{d\bar{e}_\nu}{dt} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

От (160) поради

(162) $$\bar{e}_\mu \bar{e}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3)$$

следва

(163) $$\bar{e}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{3} \bar{\pi}_{\lambda\nu} (\bar{p}_\lambda^0)^{-1} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

съгласно теорема 4. Но

(164) $$(\bar{p}_\lambda^0)^{-1} = \sum_{\mu=1}^{3} [(\bar{p}_\lambda^0)^{-1} (\bar{p}_\mu^0)^{-1}]\, \bar{p}_\mu^0 \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3).$$

От (163), (164) следва

(165) $$\bar{e}_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} \varepsilon_{\nu\mu} \bar{p}_\mu^0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

при

(166) $$\varepsilon_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=1}^{3} \pi_{\lambda\nu} [(\bar{p}_\lambda^0)^{-1} (\bar{p}_\mu^0)^{-1}] \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3).$$

От (160), (161) следва

(167) $$\frac{d\bar{p}_\lambda^0}{dt} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\pi_{\lambda\nu}}{dt} e_\nu \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3)$$

От (167), (165) следва

(168) $$\frac{d\bar{p}_\lambda^0}{dt} = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \left(\varepsilon_{\nu\mu} \frac{d\pi_{\lambda\nu}}{dt} \right) \bar{p}_\mu^0 \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3)$$

при (166).

От (158), (168) следва

(169) $$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{d\varphi_\nu}{dt} + \sum_{\lambda=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} \varphi_\lambda \varepsilon_{\mu\nu} \frac{d\pi_{\lambda\mu}}{dt} \right) \bar{p}_\nu^0$$

при (166).

В случая на ортогонална система криволинейни координати (2) равенствата (166) приемат вида

(170) $$\varepsilon_{\nu\mu}=\pi_{\mu\nu} \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

Тогава (169) приема вида

(171) $$\frac{d\bar{r}}{dt}=\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d\varphi_\nu}{dt}+\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\varphi_\lambda\pi_{\nu\mu}\frac{d\pi_{\lambda\mu}}{dt}\right)\bar{p}_\nu^0.$$

От (156), (169) следва

(172) $$\psi_\nu(p_1,\ p_2,\ p_3)=\frac{d\varphi_\nu}{dt}+\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\varphi_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}\frac{d\pi_{\lambda\mu}}{dt}$$

($\nu=1,\ 2,\ 3$) при (166).

Като проследим начина, по който от (155) се получава (156) със (172), забелязваме, че за коефициентите в (157) ще се получат аналогични на (172) изрази, в които φ формално е заместено с ψ:

(173) $$\theta_\nu(p_1,\ p_2,\ p_3)=\frac{d\psi_\nu}{dt}+\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\psi_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}\frac{d\pi_{\lambda\mu}}{dt}$$

($\nu=1,\ 2,\ 3$).

9. В случая на цилиндрична система криволинейни координати, породена от аналитичната функция (95), нека за определеност реперът (102), (103) в този ред е дясно ориентиран, т. е.

(174) $$\bar{p}_1^0\times\bar{p}_2^0=\bar{p}_3^0$$

и нека $\bar{p}_1^0$ сключва ъгъл α с положителната посока на оста Ox:

(175) $$\bar{p}_1^0=\cos\alpha\,\bar{i}+\sin\alpha\,\bar{j}.$$

Тогава

(176) $$p_2^0=-\sin\alpha\,\bar{i}+\cos\alpha\,\bar{j},$$

където

(177) $$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial p_1}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{\frac{\partial p_1}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2}}.$$

От (175), (176) следва

(178) $$\frac{d\bar{p}_1^0}{dt}=\dot{\alpha}\,\bar{p}_2^0,\quad \frac{d\bar{p}_2^0}{dt}=-\dot{\alpha}\,\bar{p}_1^0.$$

Така например в случая (115) от (118), (175) следва

(179) $$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{p_2}{p_1}.$$

От (179) следва

(180) $$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{p}_1 p_2 - p_1 \dot{p}_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

От (178), (180) следва, че в случая (115) е в сила

(181) $$\frac{d\bar{p}_1^0}{dt} = \frac{\dot{p}_1 p_2 - p_1 \dot{p}_2}{p_1^2 + p_2^2}\bar{p}_2^0, \quad \frac{d\bar{p}_2^0}{dt} = \frac{p_1 \dot{p}_2 - \dot{p}_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2}\bar{p}_1^0.$$

В случая (125) от (128) се вижда, че реперът (102), (103) е ляво ориентиран, т. е.

(182) $$\frac{d\bar{p}_1^0}{dt} = -\dot{\alpha}\bar{p}_2^0, \quad \frac{d\bar{p}_2^0}{dt} = \dot{\alpha}\bar{p}_1^0$$

при (175). От (131), (175) следва

(183) $$\alpha = p_2.$$

От (182), (183) следва, че в случая (125) е в сила

(184) $$\frac{d\bar{p}_1^0}{dt} = -\dot{p}_2\bar{p}_2^0, \quad \frac{d\bar{p}_2^0}{dt} = \dot{p}_2\bar{p}_1^0.$$

В случая (134) от (144), (145), (175) следва

(185) $$\alpha = (1-n)\theta$$

при (146). От (185), (146) следва

(186) $$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1-n}{n}\,\frac{\dot{p}_2 p_1 - \dot{p}_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

От (178), (186) следва

(187) $$\frac{d\bar{p}_1^0}{dt} = \frac{1-n}{n}\,\frac{\dot{p}_2 p_1 - \dot{p}_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2}\bar{p}_2^0, \quad \frac{d\bar{p}_2^0}{dt} = \frac{1-n}{n}\,\frac{\dot{p}_1 p_2 - \dot{p}_2 p_1}{p_1^2 + p_2^2}\bar{p}_1^0.$$

10. Втора бележка за случая на цилиндрична система криволинейни координати, породени от аналитична функция (95), засяга намирането на скоростта.

От (108)—(111) и (178) следва

(188) $$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}\left[\left(-\frac{\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}f_1 + \frac{df_1}{dt} - f_2\frac{d\alpha}{dt}\right)\bar{p}_1^0\right.$$

$$+\left(-\frac{\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}f_2+\frac{df_2}{dt}+f_1\frac{d\alpha}{dt}\right)\bar{p}_2^0+\frac{dp_3}{dt}\bar{p}_3^0.$$

От (177) следва

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{\partial p_1}{\partial y}-\frac{dp_1}{\partial y}\frac{d}{dt}\frac{\partial p_1}{\partial x}}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2}. \tag{189}$$

От (188), (189), (104), (100), (107)—(110), (97) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}(\dot{p}_1\bar{p}_1^0+\dot{p}_2\bar{p}_2^0)+\dot{p}_3\bar{p}_3^0. \tag{190}$$

Така например в случая (115) от (190), (121) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}(\dot{p}_1\bar{p}_1^0+\dot{p}_2\bar{p}_2^0)+\dot{p}_3\bar{p}_3^0. \tag{191}$$

В случая (125) формулата (190) не дава верен резултат; действителният израз за скоростта е

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=e^{p_1}(\dot{p}_1\bar{p}_1^0-\dot{p}_2\bar{p}_2^0)+\dot{p}_3\bar{p}_3^0, \tag{192}$$

докато от (190) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=e^{p_1}(\dot{p}_1\bar{p}_1^0+\dot{p}_2\bar{p}_2^0)+\dot{p}_3\bar{p}_3^0. \tag{193}$$

Разликата в знаците между (192), (193) се обяснява с това, че реперът (102), (103) в случая (125) е ляво ориентиран.

В случая (134) от (190), (148) следва

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{1}{n(p_1^2+p_2^2)^{\frac{n-1}{2n}}}(\dot{p}_1\bar{p}_1^0+\dot{p}_2\bar{p}_2^0)+\dot{p}_3\bar{p}_3^0. \tag{194}$$

От (190), (104), (100), (97), (184), (189) следва

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^3}\left\{\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2\dot{p}_1+\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{\partial p_2}{\partial x}}{\frac{\partial p_1}{\partial x}}\right)\dot{p}_2\right]\bar{p}_1^0 \tag{195}$$

$$+\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2\dot{p}_2+\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dp_1}{\partial x}}{\frac{\partial p_2}{\partial x}}\right)\dot{p}_1\right]\overset{0}{\bar{p}_2}\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}(\ddot{p}_1\overset{0}{\bar{p}_1}+\ddot{p}_2\overset{0}{\bar{p}_2})+\ddot{p}_3\overset{0}{p_3}.$$

В случая (115) от (116) следва

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=p_1,\quad \frac{\partial p_2}{\partial x}=p_2. \tag{196}$$

От (195), (196), (121) следва

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{-1}{(p_1^2+p_2^2)^{3/2}}\Big\{[p_1(\dot{p}_1^2-\dot{p}_2^2)+2p_2\dot{p}_1\dot{p}_2]\overset{0}{\bar{p}_1} \tag{197}$$

$$+[p_2(\dot{p}_2^2-\dot{p}_1^2)-2p_1\dot{p}_1\dot{p}_2]\overset{0}{\bar{p}_2}+\frac{\ddot{p}_1\overset{0}{\bar{p}_1}+\ddot{p}_2\overset{0}{\bar{p}_2}}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}+\ddot{p}_3\overset{0}{p_3}.$$

В случая (125) от (193), (184) следва

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=e^{p_1}[(\dot{p}_1^2+\dot{p}_2^2+\ddot{p}_1)\overset{0}{\bar{p}_1}+\ddot{p}_2\overset{0}{\bar{p}_2}]+\ddot{p}_3\overset{0}{p_3}. \tag{198}$$

В случая (134) от (136), (140) следва

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=n\rho^{n-1}\cos(n-1)\theta,\quad \frac{\partial p_2}{\partial x}=n\rho^{n-1}\sin(n-1)\theta. \tag{199}$$

От (195), (199), (148), (146), (139) следва

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{1-n}{n^2(p_1^2+p_2^2)^{\frac{3n-1}{2n}}}\Big\{[p_1(\dot{p}_1^2-\dot{p}_2^2)+2p_2\dot{p}_1\dot{p}_2]\overset{0}{\bar{p}_1} \tag{200}$$

$$+[p_2(\dot{p}_2^2-\dot{p}_1^2)+2p_1\dot{p}_1\dot{p}_2]\overset{0}{\bar{p}_2}+\frac{\ddot{p}_1\overset{0}{\bar{p}_1}+\ddot{p}_2\overset{0}{\bar{p}_2}}{n(p_1^2+p_2^2)^{\frac{n-1}{2n}}}+\ddot{p}_3\overset{0}{\bar{p}_3}.$$

11. Разбира се, за намирането на ускорението в случая на система криволинейни координати, породена от аналитична функция (95), можем да си послужим и с формулите

$$w_\nu=\frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\dot{p}_\nu}-\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial p_\nu}\right)\quad(\nu=1,\ 2) \tag{201}$$

поради

$$\frac{\partial r}{\partial p_\nu} = \rho_\nu = \rho_\nu^{-1} = \operatorname{grad} p_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{202}$$

съгласно (38), теорема 5, (42), (104). От (190) следва

$$v^2 = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2}(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2) + \dot{p}_3^2. \tag{203}$$

От (203) следва

$$\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{p}_\nu} = \frac{\dot{p}_\nu}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2} \qquad (\nu = 1,\ 2), \tag{204}$$

$$\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial p_\nu} = -(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2)\frac{\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^3} \qquad (\nu = 1,\ 2). \tag{205}$$

От (204) следва

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{p}_\nu} = \frac{\ddot{p}_\nu}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^2} - 2\dot{p}_\nu \frac{\frac{\partial}{\partial p_1}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\dot{p}_1 + \frac{\partial}{\partial p_2}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\dot{p}_2}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^3} \tag{206}$$

($\nu = 1,\ 2$). От (201), (205), (206) следва

$$w_\nu = \frac{1}{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|^4}\left\{\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\ddot{p}_\nu - 2p_\nu\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\dot{p}_1 + \frac{\partial}{\partial p_2}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\dot{p}_2\right)\right.$$
$$\left. + (\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2)\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\right\} \qquad (\nu = 1,\ 2). \tag{207}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанов Ив., Р. Стоянова: Към кинематиката на точка в криволинейни координати. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **64** (1969/1970).

Постъпила на 28. X. 1971 г.

UBER DIE PUNKTKINEMATIK IN KRUMMLINIGEN KOORDINATEN

Iw. Hristowa u. Iw. Tschobanow

(ZUSAMMENFASSUNG)

Indem man im wesentlichen die reziproken Vektoren von Gibbs verwendet, werden in dieser Arbeit einige Betrachtungen gemacht, die mit der dreidimensionalen Kinematik in krummlinigen Koordinaten verbunden sind. Die letzteren werden ohne Hilfe eines vergleichenden Koordinatensystems definiert und die Cartesischen Koordinaten werden als Spezialfall nach passender Argumentation eingeführt. Bei (1), (38) spielt die Relation (42) eine wesentliche Rolle. Es wird die Darstellung (155) des Radiusvektors $\bar{r}$ eines beliebigen Punktes bei (21) erzielt, ohne das Gleichungssystem (34) bzw. (35) oder (36) zu lösen. Diese Tendenz wird durch das Beispiel mit den elliptischen Koordinaten (74) und den verallgemeinerten zylindrischen Koordinaten illustriert; die letzteren werden mit Hilfe einer analytischen Funktion (95) durch (98), (99) eingeführt. Im Falle, wo eine Funktion (109) existiert, für die (110) gilt, bekommt man für den Radiusvektor $\bar{r}$ eines beliebigen Punktes die Entwicklung (108) bzw. (111). Als Beispiel werden die krummlinigen zylindrischen Koordinaten betrachtet, welche durch die Funktionen (115), (125) und (134) eingeführt sind; für diese sind entsprechend die tangentialen Einheitsvektoren (118), (131) und (144), (145) bei (146), wie auch die Zerlegungen (124), (133), (149) erhalten. Im Falle eines allgemeinen Systems von krummlinigen Koordinaten, anstelle der in der früheren Arbeit [1] gegebene Zerlegung (159), gibt man hier die Zerlegung (168) bei (160), (166) und man gelangt so zum Ausdruck (169) mit (166) für die Geschwindigkeit. Für die Beschleunigung bekommt man entsprechend (157) mit (173) bei (172), (166). Nachdem man die Gleichungen (178) mit (189) aufstellt, es wird gezeigt, daß bei einem System von krummlinigen Koordinaten, die aus der analytischen Funktion (95) entstehen, die Geschwindigkeit durch (190) gegeben wird. Für die Fälle (115), (125), (134) sind (191), (192) und (194) die entsprechenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit. Für die Beschleunigung wird die Entwicklung (195) vorgeschlagen, welche in den Fällen (115), (125), (134) entsprechend die Form (197), (198) annimmt. Mit Hilfe der Relationen (201) werden die Gleichungen (207) aufgestellt für den Fall eines verallgemeinerten Systems von zylindrischen Koordinaten.