АНАЛИТИЧНО ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ХИДРАВЛИЧНИЯ УДАР С ОТЧИТАНЕ НА ХИДРАВЛИЧНИТЕ ЗАГУБИ ПО ДЪЛЖИНАТА НА ТРЪБОПРОВОДА

Иван Стоянов Иванов

Хидравличният удар като явление на водния поток в напорните тръбопроводи с постоянно сечение и водно количество по дължината се изследва с помощта на нелинейна система частни диференциални уравнения от първи ред

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \beta \frac{\partial q}{\partial t} - \beta_1 q^2 = 0,$$

(1)

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a^2 \beta \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

където h е относителният напор, q—относителното водно количество,

$$\beta = \frac{Q_\delta}{gH_\delta F} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \lambda \frac{Q_\delta^2}{2DgH_\delta F^2}$$

са коефициенти, от които β с дименсия $\left[\frac{\text{сек}}{\text{м}}\right]$, а β_1 с дименсия $\left[\frac{1}{\text{м}}\right]$.

Q_δ е водното количество в напорните тръбопроводи до момента на неустановеното движение при напор H_δ. D и F са диаметърът и сечението на напорния тръбопровод, които приемаме, че са постоянни по дължината на тръбопровода, λ е коефициентът на хидравлическите загуби на триене по дължината на тръбопровода.

Уравненията в системата (1) при наличието $\beta_1 q^2$ не се интегрират в точни квадратури. При точното и пълно изследване на хидравличния удар не е възможно да се пренебрегнат $\beta_1 q^2$, за да се направи системата линейна, тъй като този член изразява влиянието на хидравличните загуби на триене по дължината на тръбопровода върху величината на удара.

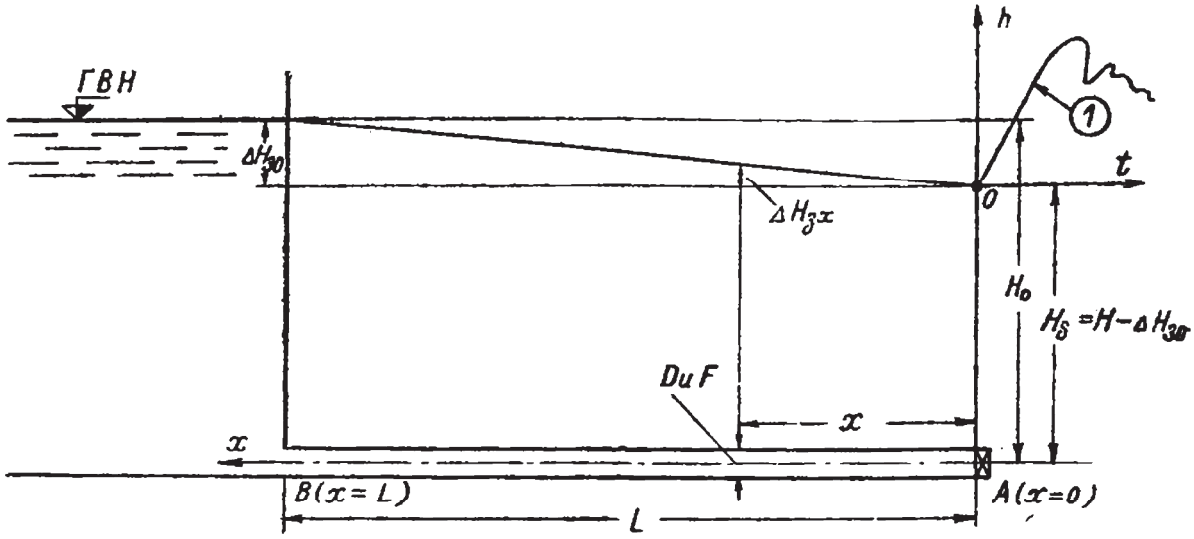
За да можем с помощта на (1) да пресметнем величината на хидравличния удар ($h-1$), стойностите на $q(x, t)$ и $h(x, t)$ трябва да удовлетворяват:

а) началните условия

(2) $$q(x,0)=1,\ h(0,0)=1,\ h(L,\ 0)=1+h_{30};$$

б) граничните условия

(3) $$h(L,t)=1+h_{30},\ \frac{\partial h(L,t)}{\partial t}=0,\ \frac{\partial q(L,t)}{\partial x}=0.$$



Черт. 1

Схема на прост напорен тръбопровод.
$A(x=0)$ — затворено (регулиращо) устройство, изменящо водното количество в тръбопровода от Q_δ до нула за време от $t=0$ до $t=T_S$.
$B(x=L)$ — входно сечение в напорния тръбопровод, (1) — $h(0,t)$— крива (условно начертана), изразяваща изменението на относителния напор пред входа на затворния орган.

Ако приемем, че хидравличните загуби по дължината на тръбопровода се изменят линейно $h_{3x}=\frac{x}{L}h_{30}$ (черт. 1), то

$$h(x,0)=1+\frac{xh_{30}}{L}.$$

Следователно към условията (2) може да прибавим и

$$\frac{\partial h(x,0)}{\partial x}=\frac{h_{30}}{L}.$$

От първото уравнение на системата (1) при $\frac{\partial h(x,0)}{\partial x}=\frac{h_{30}}{L}$ получаваме

(3) $$\frac{\partial q(x,0)}{\partial t}=-\frac{\beta_1}{\beta}+\frac{h_{30}}{\beta L},$$

където $h_{30}=\frac{\Delta H_{30}}{H_\delta}=\beta_1 L$ са хидравличните загуби пред входа на регулиращото устройство $(x=0)$ до началото на неустановеното движение.

Независимо от това, че системата (1) не допуска интегриране в точни квадратури, ще се опитаме да намерим аналитично решение, макар и за някои частни случаи.

Ако диференцираме първото уравнение от (1) по t, а второто по x и от получените изрази изключим производната $\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial x}$, ще намерим следното диференциално уравнение от втори ред относно зависимата променлива q:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+2c\frac{dq}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Аналогично, т. е. като диференцираме първото уравнение по x, а второто по t и от получените изрази изключим производната $\frac{\partial^2 q}{\partial t\,\partial x}$ и като вземем под внимание, че $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{1}{\alpha^2\beta}\frac{\partial h}{\partial t}$, намираме

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+2c\frac{\partial h}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tag{5}$$

където $2c=2\frac{\beta_1}{\beta}q$ е коефициент, който отчита хидравличното триене на потока по дължината на тръбопровода.

Коефициентът c вследствие на това, че зависи от q, е променлив и следователно (4) и (5) са нелинейни диференциални уравнения от втори ред. Ако обаче приемем, че коефициентът c е константа [1], то горните две уравнения се линеаризират; при тази постановка на задачата ще се помъчим да дадем аналитично решение за някои частни случаи.

Уравнението (4) дава възможност да изследваме изменението на относителното водно количество в напорния тръбопровод с отчитане влиянието на хидравличните загуби на потока по дължината на тръбопровода, взети в линеаризиран вид. Тъй като хидравличните загуби по дължината на тръбопровода се линеаризират, то не бива да се забравя, че уравнението (4) при $c=\text{const}$ не е еквивалентно на действителното уравнение. Следователно, решавайки (4) при $c=\text{const}$, ще получим закономерност $q(x, t)$ с определена неточност вследствие линеаризирането на загубите.

Ако по някакъв начин чрез решаване на (4) ни се удаде възможност да намерим аналитичен израз за изменението на относителното водно количество $q(x, t)$, то аналитичен израз за изменението на относителния напор h (определянето на h е основна цел при решаване на задачи от хидравличния удар), намираме от линеаризираното уравнение на непрекъснатостта на потока в тръбопровода, т. е. от второто уравнение на системата (1)

$$\frac{\partial h}{\partial t}=a^2\beta\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{6}$$

Ако двете страни на уравнението (6) умножим на dt и интегрираме в граници от нула до t и положим, че относителният напор до момента на неустановеното движение е $h(x, 0)=h_0$, за определяне на h намираме

(7) $$h(x, t) = h_0 + a^2 \beta \int_0^t \frac{\partial q}{\partial x} dt.$$

От израза (7) става ясно, че за да намерим аналитичен израз за величината на хидравличния удар, е нужно да разполагаме с израза за $q(x, t)$, т. е. това ще рече да намерим решение на уравнението (4) при $c = \text{const}$, удовлетворяващо:

а) началните условия

(8) $$q(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial q(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\beta_1}{\beta} + \frac{h_{30}}{\beta L};$$

б) граничните условия

(9) $$q(0, t) = f(t), \quad \frac{\partial q(L, t)}{\partial x} = 0.$$

С помощта на функцията

(10) $$q = e^{-ct} u(x, t)$$

уравнението (4) и условията (8) и (9) приемат следния вид:

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

начални условия

(12) $$u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -\beta_1/\beta + \frac{h_{30}}{\beta L} + c;$$

гранични условия

13) $$u(0, t) = e^{ct} f(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0.$$

Граничните условия (13) са нехомогенни. За да ги направим хомогенни, при $f(t) = 1 - \frac{t}{T_s}$ въвеждаме функцията

(14) $$u(x, t) = e^{ct} f(t) + v(x, t).$$

С въвеждането на (14) при

(15) $$f(t) = 1 - \frac{t}{T_s}$$

уравнението (11) и условията (12) и (13) приемат следния вид:

(16) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 v - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2c}{T_s} e^{ct};$$

начални условия

(17) $$v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\beta_1/\beta + \frac{h_{30}}{\beta L} + \frac{1}{T_s};$$

гранични условия

(18) $$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0.$$

Тъй като условията (18) са хомогенни, то решението на нехомогенното диференциално уравнение от втори ред (16) ще търсим във вида

$$v = y + w, \tag{19}$$

където y е решение на нехомогенното диференциално уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 y - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2c}{T_s} e^{ct}, \tag{20}$$

удовлетворяващо нулеви гранични и начални условия:

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0; \tag{21}$$

$$y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

а функцията w подбираме така, че тя да бъде решение на хомогенното уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 w = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{23}$$

удовлетворяващо граничните условия

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

и началните условия

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\beta_1}{\beta} + \frac{h_{30}}{\beta^2} + \frac{1}{T_s} = \alpha. \tag{25}$$

Решението y на уравнението (20) търсим като ред

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L} \tag{26}$$

Ако редът (26) е равномерно сходящ, то граничните условия (21) се удовлетворяват от само себе си. Нека да определим функцията $T_k(t)$ така, че редът (26) да удовлетворява уравнението (20) и началните условия (22).

Поставяйки реда (26) в уравнението (20), намираме

$$\sum_{k=0}^{\infty} [T_k''(t) + P_k^2 T_k(t)] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L} = \frac{2c}{T_s} e^{ct}, \tag{27}$$

където

$$P_k = \sqrt{a^2 \frac{[(2k+1)\pi]^2}{2L} - c^2}.$$

Да разложим функцията $\frac{2c}{T_s} e^{ct}$ в интервала $(0, L)$ в синусов ред по аргумента x

(28) $$\frac{2c}{T_s} e^{ct} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

където

(29) $$g_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{2c}{T_s} e^{ct} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L} dx.$$

От (27) и (28) за определяне на неизвестните функции $T_k(t)$ съставяме следното диференциално уравнение:

(30) $$T_k'(t) + P_k^2 T_k(t) = g_k(t),$$

което е нехомогенно от втори ред и трябва да удовлетворява началните условия (22):

(31) $$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0.$$

Преди да пристъпим към решаването на (30) при условията (31), ще определим вида на функцията $g_k(t)$.

От (29), пред вид на това, че $\frac{2c}{T_s} e^{ct}$ е функция само на t, намираме

(32) $$g_k(t) = \frac{8c}{T_s (2k+1)\pi} e^{ct}.$$

При положение, че знаем $g_k(t)$, решението на (30) ще търсим като сбор от едно негово частно решение $\overline{T}_k(t)$ и общото решение $T_k^*(t)$ на хомогенното уравнение $T_k''(t) + P_k^2 T_k(t) = 0$, т. е.

(33) $$T_k(t) = \overline{T}_k(t) + T_k^*(t).$$

Общото решение на хомогенното уравнение, съответствуващо на уравнението (30), има вида

(34) $$T_k^*(t) = A_k \cos P_k t + B_k \sin P_k t.$$

Тъй като уравнението (30) е нехомогенно с постоянни коефициенти, а $g_k(t)$ е произведение на показателната функция с константа (32), при това c не е корен на характеристичното уравнение $r^2 + P_k^2 = 0$, то частното решение $T_k(t)$ ще търсим във вид

(35) $$\overline{T}_k(t) = D(t)\, e^{ct},$$

където $D(t)$ е многочлен със степен, равна на степента на много-

члена пред показателната функция [2]. Тъй като в нашата задача множителят пред показателната функция e^{ct} е константа, то $D(t)$ е многочлен от нулева степен, чиято величина определяме, като заместим (35) в (30) и приравним коефициентите пред еднаквите степени на t

$$D=\frac{8c}{T_s\left(c^2+P_k^2\right)(2k+1)\pi}. \tag{36}$$

Следователно частното решение има вида

$$\overline{T}_k(t)=\frac{8c}{T_s\left(c^2+P_k^2\right)(2k+1)\pi}e^{ct}. \tag{37}$$

Като се вземе под внимание (34) и (37), общото решение на уравнението (30), удовлетворяващо условията (31), има следния вид:

$$T_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8c}{T_s(2k+1)\left(c^2+P_k^2\right)\pi}\left(e^{ct}-\cos P_k t-\frac{c}{P_k}\sin P_k t\right). \tag{38}$$

Като заместим значението на $T_k(t)$ от (38) в (26), ще получим търсената функция $y(x, t)$:

$$y(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8c}{T_s\left(c^2+P_k^2\right)(2k+1)\pi}\left(e^{ct}-\cos P_k t-\frac{c}{P_k}\sin P_k t\right) \tag{39}$$

$$\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

За да намерим функцията $v(x, t)$, съгласно (19) трябва да знаем функцията $w(x, t)$. За да намерим аналитичен израз за $w(x, t)$, ще трябва да решим диференциалното уравнение (23) при условията (24) и (25).

Тъй като граничните условия (24) са хомогенни, решението на (23) ще търсим по метода на Фурие. Полагайки $w(x, t)=X(x).T(t)$, от (23) ще получим

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{T''+2cT'}{T}\right)=\frac{X''}{X}. \tag{40}$$

От израза (40) по известните начини за $X_k(x)$ ще намерим

$$X_k(x)=C_k\sin\lambda_k x, \tag{11}$$

където C_k е произволна константа, а $\lambda_k=\frac{(2k+1)\pi}{2L}$ са собствени стойности ($k=0, 1, 2, 3\ldots$).

За определяне на функцията $T_k(t)$ при $\lambda_k=\frac{(2k+1)\pi}{2L}$ от (40) получаваме диференциалното уравнение

$$T_k''+2c\,T_k'+\lambda_k^2 a^2 T_k=0, \tag{42}$$

чието характеристично уравнение има корени

$$r_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - \lambda_k^2 a^2}.$$

На практика коефициентът на хидравличното триене c е много малка величина и почти винаги е налице $\lambda_k a > c$, при всички значения на k. В такъв случай подкоренната величина на корените $r_{1,2}$ е отрицателна и ако я означим с $\delta_k^2 = \lambda_k^2 a^2 - c^2$, ще получим

$$r_{1,2} = -c \pm i\,\delta_k.$$

Следователно общото решение на уравнението (42) е

$$T_k(t) = e^{-ct}(A_k \cos \delta_k t + B_k \sin \delta_k t). \tag{43}$$

Като заместим $X_k(x)$ и $T_k(t)$ от (41) и (43) във $w(x, t) = X_k(x)\, T_k(t)$, ще намерим

$$w(x, t) = e^{-ct}[a_k \cos \delta_k t + b_k \sin \delta_k t] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L}, \tag{44}$$

където $a_k = A_k C_k$ и $b_k = B_k C_k$ са произволни константи. Тъй като диференциалното уравнение (23) е линейно и хомогенно, то и безкрайният ред

$$w(x, t) = e^{-ct} \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos \delta_k t + b_k \sin \delta_k t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L} \tag{45}$$

при условие, че той е сходящ, е също така негово решение, удовлетворяващо граничните условия (24).

Ако в (45) коефициентите a_k и b_k подоберем така, че $w(x, t)$ да удовлетворява и началните условия (25), т. е.

$$a_k = 0,\ b_k = \frac{4\alpha}{\delta_k (2k+1)\pi},$$

ще получим израза

$$w(x, t) = \frac{4\alpha}{\pi} e^{-ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\delta_k} \sin \delta_k t \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L}. \tag{46}$$

Като заместим $y(x, t)$ и $w(x, t)$ от (39) и (46) в (19), за функцията $v(x, t)$ намираме

$$v(x, t) = \frac{8c}{T_s \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + P_k^2)(2k+1)} \left(e^{ct} - \cos P_k t - \frac{c}{P_k} \sin P_k t\right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

$$(47)\qquad +\frac{4\alpha}{\pi}e^{-ct}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\delta_k}\sin\delta_k t\,\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Като се знае функцията $v(x,t)$, при $f(t)=1-\frac{t}{T_s}$, от (14) и (10) намираме изменението на относителното водно колчество $q(x,t)$:

$$q(x,t)=1-\frac{t}{T_s}+\frac{8c}{T_s\pi}e^{-ct}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(c^2+P_k^2)(2k+1)}\left(e^{ct}-\cos P_k t-\frac{c}{P_k}\sin P_k t\right)\times$$

$$(48)\qquad \times\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+\frac{4\alpha}{\pi}e^{-2ct}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\delta_k}\sin\delta_k t\,\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

След като разполагаме с аналитичен израз за $q(x,t)$, за определяне на относителния напор $h(x,t)$ чрез интегралния израз (7) получаваме

$$h(x,t)=h(x,0)+\frac{4a^2\beta c}{T_s L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{c^2+P_k^2}\left[t-\frac{P_k e^{-ct}}{P_k^2+c^2}\left(\sin P_k t-\frac{c}{P_k}\cos P_k t\right)\right.$$

$$(49)\qquad \left.+\frac{ce^{-ct}}{P_k^2+c^2}\left(\cos P_k t+\frac{c}{P_k}\sin P_k t\right)-\frac{2c}{P_k^2+c^2}\right]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}-\frac{2\alpha a^2\beta}{L}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4c^2+\delta_k^2}\left[e^{-2ct}\left(\cos\delta_k t+\frac{2c}{\delta_k}\sin\delta_k t\right)-1\right]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

С помощта на (49) може да се определи изменението на относителния напор в ксй да е момент от време $0\leqq t\leqq\frac{2L}{a}$ и в кое да е сечение по дължината на тръбопровода $0\leqq x\leqq L$ при линейно изменение на водното количество в регулиращия орган. Изразът (49) е точно аналитично решение на уравненията на хидравличния удар, без каквото и да е ограничение на времето t в един частен случай—безкрайно дълъг прост напорен тръбопровод, в който хидравличните загуби се линеаризират.

Обикновено интерес представлява максималната величина на хидравличния удар, която се получава в сечението пред регулиращия орган ($x=0$). С помощта на максималната величина на удара $[h(0,t)-h(0,0)]$ е сравнително по-удобно да се направи количествен и качествен анализ на влиянието на хидравличните загуби по дължината на тръбопровода върху величината на удара.

От (49) при $x=0$ получаваме

$$h(x,t)=h(0,0)+\frac{4a^2\beta c}{T_s L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{c^2+P_k^2}\left[t-\frac{P_k e^{-ct}}{P_k^2+c^2}\left(\sin P_k t-\frac{c}{P_k}\cos P_k t\right)\right.$$

$$+\frac{ce^{-ct}}{P_k^2+c^2}\left(\cos P_k t+\frac{c}{P_k}\sin P_k t\right)-\frac{2c}{P_k^2+c^2}\Bigg]-\frac{2\alpha a^2\beta}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4c^2+\delta_k^2}\cdot$$

$$\left[e^{-2ct}\left(\cos\delta_k t+\frac{2c}{\delta_k}\sin\delta_k t\right)-1\right]. \tag{50}$$

Като заместим значенията на P_k и δ_k, формулата (50) придобива следния вид:

$$h(0,t)=h(0,0)+\frac{16L\beta c^2}{T_s\pi}t\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2+\frac{128L^3\beta c^2}{T_s a^2\pi^4}\left[e^{-ct}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^4\times\right.$$

$$\left.\times(\cos P_k t-1)\right]+\frac{256L^4\beta c^3}{T_s a^3\pi^5}e^{-ct}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^4\frac{\sin P_k t}{\sqrt{(2k+1)^2-4\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}}$$

$$-\frac{32L^2\beta c}{T_s a\pi^3}e^{-ct}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin P_k t}{(2k+1)^2\sqrt{(2k+1)^2-4\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}}+\frac{8\beta L\alpha}{\pi^2}\times \tag{51}$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2+12\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}\left(1-e^{-2ct}\left(\cos\delta_k t+\frac{2c}{\delta_k}\sin\delta_k t\right)\right)\right].$$

Тъй като ентите членовете в редовете на (51) при $k\to\infty$ са нули то тези редове са сходящи и безкрайните суми може да заменим с крайни. Парциалните суми на безкрайните редове

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^4\cos P_k t \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^4$$

при $k=1$ са почти равни на нула.

В останалите безкрайни редове на (51) парциалните суми при $k=2$ са почти равни на нула. Като се държи сметка за това свойство на редовете в (51) и се вземе под внимание, че коефициентите пред безкрайните редове са малки величини, то за определяне на $h(0,t)$ получаваме

$$h(0,t)=h(0,0)+\frac{1{,}15.16L\beta c^2}{T_s\pi^2}t+\frac{128L^3\beta c^2}{T_s a^2\pi^4}\left(e^{-ct}\cos t\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}-1\right)$$

$$\frac{256L^4\beta c^3}{T_s a^3\pi^5}e^{-ct}\frac{\sin t\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{\sqrt{1-4\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}}-\frac{32L^2\beta c}{T_s a\pi^3}e^{-ct}\left(\frac{\sin t\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2Lc}{a\pi}\right)^2}}\right.$$

$$+\frac{\sin t\sqrt{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{9\sqrt{9-\left(\frac{2Lc}{a\pi}\right)^2}}\Bigg)-\frac{8L\beta\alpha}{\pi^2}e^{-2ct}\Bigg[\frac{\cos t\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{1+12\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}$$

$$+\frac{\cos t\sqrt{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{9+12\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}+\frac{2c\sin t\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{\left[1+12\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}+\frac{2c\sin t\sqrt{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}{\left[9+12\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{3a\pi}{2L}\right)^2-c^2}}$$

$$+\frac{8L\beta\alpha}{\pi^2}\left[\frac{10+24\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2}{9+120\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^2+144\left(\frac{Lc}{a\pi}\right)^4}\right],$$

където $\alpha=-\beta_1:\beta+h_{30}:\beta L+1:T_s$.

Да предположим, че в напорния тръбопровод величината на хидравличните загуби е равна на нула ($c=0$). В този случай аналитичен израз за определяне на относителния напор $h(0,t)$ може да получим, решавайки системата (1) при $\beta_1 q^2=0$ или непосредствено от (49) (52) при $c=0$.

От аналитичния израз (52) при $c=0$, като се вземе под внимание' че в случая $h(0,0)=1$, намираме

$$h(0,t)=1+\frac{8L\beta}{T_s\pi^2}\left(\frac{10}{9}-\cos\frac{\pi a}{2L}t-\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi a}{2L}t\right). \tag{53}$$

С помощта на формулите (52) и (53) може да се оцени количествено влиянието на хидравличните загуби по дължината на тръбопровода върху величината на хидравличния удар.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный, И. А.: Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, Гостехтеоретиздат, Москва, 1951.
2. Пискунов, Н. С.: Дифференциальное и интегральнное изчисление. Физматгиз, Москва, 1963.

Постъпила на 1. XI. 1971 г.

ANALYTISCHE BESTIMMUNG DES HYDRAULISCHEN SCHLAGES UNTER RÜCKSICHTNAHME DER HYDRAULISCHEN VERLUSTE LÄNGS DER ROHRLEITUNG

Iw. S. Iwanow

(ZUSAMMENFASSUNG)

Mittels der Methode von Fouriér gibt man eine analytische Lösung der Gleichungen des hydraulischen Schlages in einer endlosen Rohrleitung oder in einer endlichen Rohrleitung für ein Zeitintervall

$$0 \leq l \leq \frac{2L}{v}.$$

Die Grösse des Schlages bestimmt man folgendermassen:
a) unter Rücksichtahme des Einflusses der hydraulischen Verluste längs der Rohrleitung, wobei die Verluste in einer linearen Form angenommen werden;
b) ohne Rücksichtnahme der Verluste.
Es sind analytische Gesetzmässigkeiten erhalten worden, die die Abschätzung des Einflusses der hydraulischen Verluste auf die Grösse des Schlages ermöglichen.