К ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРОСТРАНСТВА P_4

Гергана Енева

I. Получение двумерной поверхности третьего порядка пространства P^4 косым проектированием в пятимерном проективном пространстве P^5.

Пусть в P^5 даны три двумерные плоскости α^2, β^2, γ^2, не имеющие попарно общих точек. Существует двухпараметрическое множество G_{∞^2} прямых, пересекающих эти три плоскости. Действительно, пусть A произвольная точка плоскости α^2. Трехмерная плоскость (A, β^2) пересечет γ^2 в некоторой точке C. Прямая AC трехмерной плоскости (A, β^2) пересечет β^2 в точке B и таким образом она пересекает все три даные плоскости. При этом никакие две прямые множества G_{∞^2} не пересекаются, так как плоскости α^2, β^2, γ^2 не пересекаются.

Существует однопараметрическое множество G_{∞^1} плоскостей, пересекающих все прямые множества G_{∞^2}. Пусть a, b, c три прямые, принадлежащие G_{∞^2} и пересекающие α^2 соответственно в точках A_1, B_1, C_1, β^2 — в точках A_2, B_2, C_2, γ^2 — в точках A_3, B_3, C_3. Скрещивающиеся прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 определяют гиперболоид H_2^1, лежащий в трехмерной плоскости (a, b), а B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 — гиперболоид $\bar{H}_2^2$ в (b, c).

Пусть B_4 произвольная точка прямой b $(B_4 \neq B_1, B_2, B_3)$. Проведем через B_4 образующие H_2^2 и $\bar{H}_2^2$, отличные от b, т. е. прямые x и y, пересекающие a и c соответственно в точках A_4 и C_4. Тогда $(A_1A_2A_3A_4)=(B_1B_2B_3B_4)=(C_1C_2C_3C_4)$. Двумерная плоскость (x, y) пересечет все прямые множества G_{∞^2}. Действительно, пусть z произвольная прямая в (x, y), пересекающая x в точке X, а y — в точке Y. Через X проходит образующая H_2^2, отличная от x, т. е. прямая, пересекающая A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 соответственно в точках L_1, L_2, L_3 и $(L_1L_2L_3X)=(A_1A_2A_3A_4)=(B_1B_2B_3B_4)$. Аналогично через Y проходит образующая $\bar{H}_2^2$, отличная от y, прямая p, пересекающая B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 в точках P_1, P_2, P_3 и $(P_1P_2P_3Y)=(B_1B_2B_3B_4)=(C_1C_2C_3C_4)$. Итак имеем $(L_1L_2L_3X)=(P_1P_2P_3Y)$, т. е. прямые L_1P_1, L_2P_2, L_3P_3, $XY=z$ являются образующими одной серии, а прямые l и p — второй серии некоторого гиперболоида. При этом l и p принадлежат G_{∞^2}. Следовательно, через произвольную точку

на $z=XY$ можно провести прямую, пересекающую L_1P_1, L_2P_2, L_3P_3, т. е. прямую, пересекающую α^2, β^2, γ^2.

Прямые a, b, l, · · ·, а также прямые b, c, p, · · · высекают соответственно на прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, · · · ; B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, · · · проективные ряды. Следовательно, прямые множества G_{∞^3} пересекают плоскости α^2, β^2, γ^2, · · · по коллинеарным полям.

Прямые G_{∞^2} и плоскости G_{∞^3} образуют трехмерную поверхность третьего порядка F_3^3 в P^5. Чтобы показать это, возьмем двумерную плоскость ρ^2 общего положения (не принадлежащую $G_\infty{}^1$). Пусть X произвольная точка плоскости α^2. Индуцируемая прямыми G_{∞^2} коллинеация φ между плоскими полями α^2 и γ^2 ставит в соответствии точке X некоторую точку X' плоскости γ^2. Трехмерная плоскость (ρ^2, X) пересечет плоскость γ^2 в точке X'' и соответствие между точками X и X'' есть некоторая перспективность π. Тогда произведение $\psi=\pi^{-1}\varphi$ есть коллинеация в плоскости γ^2, отличная от тождественного преобразования. Пусть U, V, W ее двойные точки. Трехмерная плоскость (U, ρ^2) пересечет плоскость α^2 в точке U_1; этой точке U_1 соответствует при φ точка U. Прямая UU_1 принадлежит множеству G_{∞^2} и лежит в (U, ρ^2). Рассуждая так и для точек V и W, мы получим, что три прямые множества G_{∞^2} пересекают плоскость ρ^2, т. е. рассматриваемая поверхность действительно имеет порядок три.

Теперь возьмем произвольную гиперплоскость P^4 пространства P^5, не проходящую через плоскость множества G_{∞^3}. Она пересекает трехмерную поверхность третьего порядка F_3^3 по двумерной поверхности третьего порядка.

Как мы показали в [1] все двумерные поверхности третьего порядка пространства P^4 проективно эквивалентны. Следовательно, полученную таким образом поверхность в P^4 можно рассматривать как совокупность прямых, соединяющих пары соответственных точек в проективном соответствии между точками фиксированной коники c_2^0 и фиксированной прямой u, не принадлежащих одной трехмерной плоскости.

Каждая плоскость множества G_{∞^3} оставляет в P^4 след в виде прямой. Эти прямые являются образующими двумерной поверхности третьего порядка F_3^2. Три такие прямые имеют одну общую секущую, которая пересечет три, а следовательно и все двумерные образующие поверхности F_3^2, т. е. она является ее одномерной образующей, лежащей в P^4. Эта прямая очевидно совпадает с прямой u для полученой поверхности F_3^2.

В заключении отметим, что указанный нами способ получения двумерной поверхности третьего порядка основан только на понятии инцидентности в P^4 и P^5.

II. Отображение одной плоскости на другую посредством плоскостей, пересекающих F_3^2 по коникам.

В специальной проективной системе координат двумерная поверхность третьего порядка F_3^2 имеет параметрическое задание [2]:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \mu : \lambda\mu : 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Через каждые две точки поверхности F_3^2, не лежащие одновременно на прямой u, проходит единственная коника, лежащая на F_3^2. Через каждую фиксированную точку поверхности проходят ∞^1 коник, которые целиком покрывают поверхность, а через каждую точку L пространства P^4, не лежащую на F_3^2, проходит единственная плоскость, пересекающая F_3^2 по конике. При этом коники на F_3^2 получаются, если в параметрическом задании поверхности параметры λ и μ связаны линейно $\mu = k\lambda + l$. Плоскость коники тогда имеет уравнения [2]:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 - lx_3 - kx_5 = 0 \\ x_2 - kx_4 - lx_5 = 0. \end{cases}$$

Если через каждую точку прямой p, не имеющей общих точек с F_3^2, проведем единственную плоскость, пересекающей F_3^2 по конике, получим некоторую гиперповерхность в P^4. Определим ее порядок. Относительно выбранной системе координат точки прямой p будут иметь координаты $x_i = a_i + sb$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, где $A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $B(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ две точки на p. Подставляя эти значения в уравнения (1) и исключая параметр s, мы получаем, что для плоскостей, проходящих через точки прямой p и пересекающих F_3^2 по коникам, связь между параметрами k и l имеет следующий вид:

$$D_1k^2 + D_2l^2 + D_3kl + D_4k + D_5l + D_6 = 0,$$

где коэффициенты D_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ определяются однозначно координатами точек A и B. Определяя из (1) k и l в зависимости от x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и подставляя эти значения в последнее равенство, мы получаем:

$$\begin{gathered} D_1(x_2x_3 - x_1x_5)^2 + D_2(x_1x_4 - x_2x_5)^2 + D_3(x_1x_4 - x_2x_5)(x_2x_3 - x_1x_5) \\ + D_4(x_3x_4 - x_5^2)(x_2x_3 - x_1x_5) + D_4(x_1x_4 - x_2x_5)(x_3x_4 - x_5^2) \\ + D_6(x_3x_4 - x_5^2)^2 = 0. \end{gathered}$$

Это есть уравнение рассматриваемой поверхности. Оно показывает, что ее порядок равен четырем.

Итак, если через точки произвольной прямой, не пересекающей F_3^2, проведем все плоскости, пересекающие F_3^2 по коникам, то их совокупность есть гиперповерхность четвертого порядка.

Пусть α^2 и β^2 две плоскости, пересекающие F_3^2 соответственно в точках M_1, M_2, M_3 и M_1', M_2', M_3' [1], а X произвольная точка в α^2, отличная от M_1, M_2, M_3. Единственная плоскость через X, пересекающая F_3^2 по конике, пресечет β^2 в некоторой точке X', которую ставим в соответствие точке X. Из доказанного раньше следует, что произвольной прямой, не проходящей через M_1, M_2, M_3 в рассматриваемом соответствии T будет вообще соответствовать в β^2 кривая четвертого порядка, т. е. T есть кремоново преобразование четвертого порядка [3].

Найдем точку, соответствующую M_1. Так как $M_1 \in F_3^2$, через нее проходят ∞^1 плоскостей, пересекающих F_3^2 по коникам. Они пересекут β^2 в точках одной кривой второго порядка. (Эти плоскости образуют конус с вершиной M_1 и плоскими образующими, определенными точкой M_1 и образующими гиперболоида, который является сечением проекции F_3^2 из M_1 с произвольной гиперплоскостью [1].) Эта кривая пройдет через точки M_1', M_2', M_3', так как через M_1 и M_1' например проходит единственная коника, лежащая на F_3^2. Следовательно, M_1 фундаментальная двойная точка преобразования. Такие и точки M_2, M_3. Тогда точки M_1', M_2', M_3' являются фундаментальными двойными точками преобразования T_4^{-1}. Если точке M_1' соответствует коника $k_2^{M_1'}$, точке M_2' — коника $k^{M_2'}$, точке M_3' — коника $k_2^{M_3'}$, то эти коники проходят через M_1, M_2, M_3 и пересекаются попарно еще в трех точках M_4, M_5, M_6 ($M_4 = k_2^{M_1'} \cap k_2^{M_2'}$, $M_5 = k_2^{M_2'} \cap k_2^{M_3'}$, $M_6 = k_2^{M_3'} \cap k_2^{M_1'}$). В преобразовании T_4^{-1} точка M_4 соответствует прямой $M_1'M_2'$, точка M_5— прямой $M_2'M_3'$, точка M_6 — прямой $M_1'M_3'$. В α^2 точки M_4, M_5, M_6 обыкновенные фундаментальные. Аналогично получаются обыкновенные фундаментальные точки M_4', M_5', M_6' в β^2.

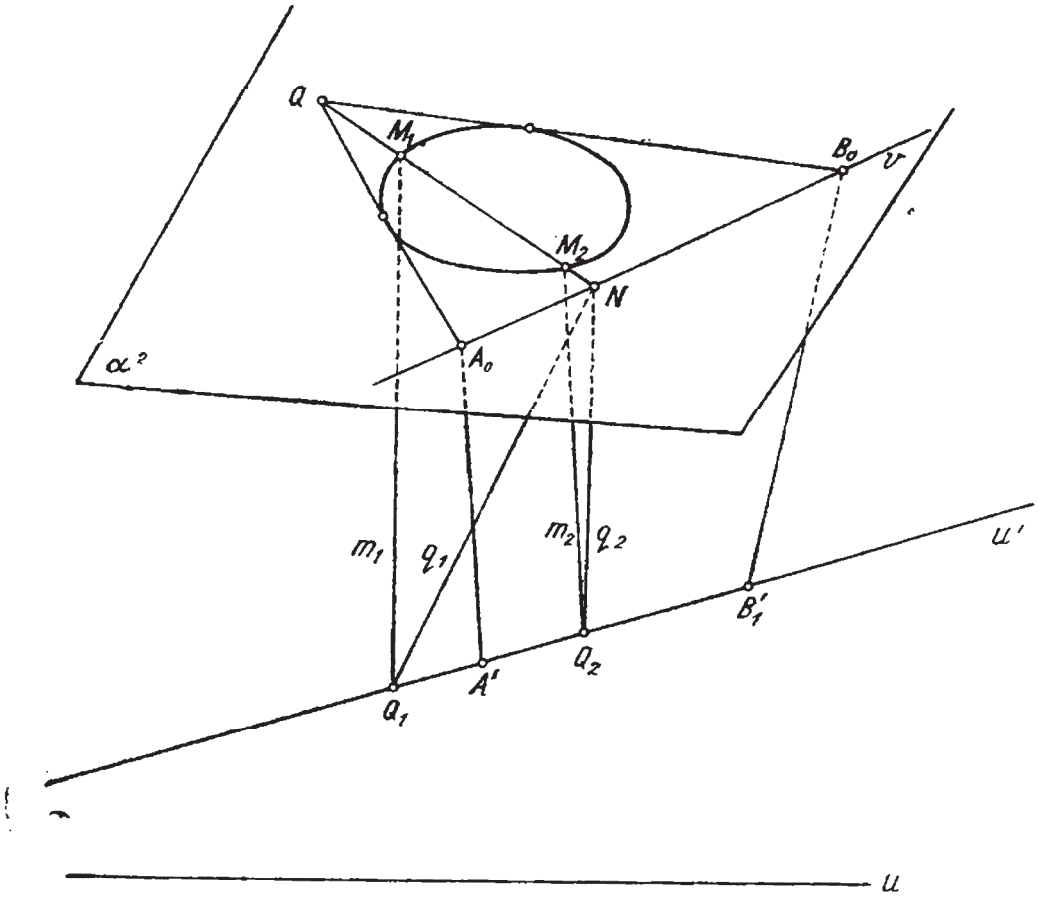
Приводим таблицу фундаментальных точек и кривых преобразования

III. Центральная проекция F_3^2 на p^3.

Пусть Q произвольная точка пространства P^4, не лежащая на F_3^2. Плоскости, соединяющие Q с прямолинейными образующими F_3, принадлежат гиперконусу с вершиной Q. Пересекая этот гиперконус произвольной гиперплоскостью P^3 ($Q \notin P^3$), получаем в P^3 линейчатую кубику-центральная проекция F_3^2 из Q на P^3.

Через Q проходит единственная плоскость α^2, пересекающая F_3^2 по конике c_2. Рассмотрим случай когда c_2 нераспавшаяся. Обозначим через v и u' следы в P^3 плоскостей α^2 и (Q, u). Пусть ψ инволюция на c_2 с центром в Q. Она индуцирует инволюцию ψ' на u'. Если M_1 и M_2 пара соответственных точек при ψ, а m_1 и m_2 образующие F_3^2, на которых лежат соответственно эти точки, плоскости (Q, m_1) и (Q, m_2) пересекут u' в точках Q_1 и Q_2, соответственных при ψ'. Проекции q_1 и q_2 прямых m_1 и m_2 из Q проходят через Q_1 и Q_2. Пусть точка N, лежащая на v, общая точка прямой QM_1M_2 и P^3. Тогда N лежит и на q_1 и q_2 и q_1 и q_2 соединяют пару соответственных точек в инволюции ψ на u' с точкой прямой v. Следовательно q_1 и q_2 лежат на общей линейчатой кубике с направляющими u' и v [4]. На ней имеются две униплaнарные точки. Они соединяют двойные точки ψ' с точками пересечения v и касательных к c_2 через Q (черт. 1).

Пусть c_2 распадается на прямую u и на образующую поверхности F_3^2 [1]. Тогда $v \equiv u'$ и проекция F_3^2 из Q на P^3 есть кубика Кэли [4].



Черт. 1

T	Фундаментальные точки	Фундаментальные кривые: порядок кривой	Фундаментальные кривые: проходит через точки
T_4	M_4 — обыкновенная	первый	M_1', M_2'
	M_5 — обыкновенная	первый	M_2', M_3'
	M_6 — обыкновенная	первый	M_3', M_1'
	M_1 — двойная	второй	M_1', M_2', M_3', M_4', M_6'
	M_2 — двойная	второй	M_1', M_2', M_3', M_4', M_5'
	M_3 — двойная	второй	M_1', M_2', M_3', M_5', M_6'
T_4^{-1}	M_4' — обыкновенная	первый	M_1, M_2
	M_5' — обыкновенная	первый	M_2, M_3
	M_6' — обыкновенная	первый	M_3, M_1
	M_1' — двойная	второй	M_1, M_2, M_3, M_4, M_6
	M_2' — двойная	второй	M_1, M_2, M_3, M_4, M_5
	M_3' — двойная	второй	M_1, M_2, M_3, M_5, M_6

ЛИТЕРАТУРА

1. Енева, Г.: Некоторые вопросы теории нормповерхности третьего порядка четырехмерного проективного пространства. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **64** (1971).
2. Енева, Г., З. Скопец: Построение плоской модели четырехмерного проективного пространства изотропным проектированием нормповерхности третьего порядка. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1969), 243—260.
3. Hudson, H.: Cremona transformation in plan and space. Cambridge, 1927.
4. Burau, W.: Algebraische Kurven und Flächen. Bd II. Berlin, 1962, 47—57.

Постъпила на 8. XI. 1971 г.

ZUR THEORIE DER ZWEIDIMENSIONALEN FLÄCHE DRITTER ORDNUNG IN P^4

G. Enewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die Arbeit ist eine Fortsetzung von [1].

I. Erzeugung einer zweidimensionalen Fläche dritter Ordnung in P^5.

Im 5-dimensionalen projektiven Raum P^5 seien drei zweidimensionale Ebenen α^2, β^2, γ^2 gegeben, die zu je zwei windschief sind. Dann existiert eine zweiparametrige Geradenmenge G_{∞^2}, deren Geraden die Ebenen α^2, β^2, γ^2 schneiden, und eine einparametrige Ebenenmenge G_{∞^1}, deren Ebenen die Geraden von G_{∞^2} schneiden. Die Geraden von G_{∞^2} und die Ebenen von G_{∞^1} bilden eine dreidimensionale Fläche dritter Ordnung F_3^3 in P^5. Der Durschschnitt von F_3^3 mit einer Hyperebene P^4 in P^5, die keine unter den Ebenen von G_{∞^1} enthält, ist eine zweidimensionale Fläche dritter Ordnung F_3^2 in P^4.

II. Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene mit Hilfe der Ebenen, die F_3^2 in Kegelschnitten treffen.

Durch jeden Punkt, der nicht auf F_3^2 liegt, gibt es genau eine Ebene, die F_3^2 in einem Kegelschnitt schneidet. Es sei g eine Gerade, die keine Punkte von F_3^2 enthält. Durch jeden Punkt von g konstruiert man die entsprechende Ebene, die F_3^2 in einem Kegelschnitt schneidet. Die Menge aller solchen Ebenen ist eine Hyperfläche vierter Ordnung. Die Korrespondenz zwischen den Punkten einer Ebene α^2 und ihren Proektionen auf eine andere Ebene β^2 mit Hilfe der Ebenen, die F_3^2 in Kegelschnitten treffen, ist eine Cremonasche Korrespondenz vierter Ordnung vom Typus z^2z^1. Es wurden deren Fundamentalpunkte gefunden.

III. Zentralprojektion von F_3^2 auf P^3.

Es wird gezeigt, daß die Zentralprojektion von F_3^2 auf P^3 aus einem nicht auf F_3^2 liegenden Punkt eine lineare Kubik ist. Wenn der einzige Kegelschnitt auf F_3^2, der in einer Ebene mit dem Projektionszentrum liegt, zerfällt, bekommt man die Kubik von Cayley.