ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ МЕТРИЗУЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

С. Й. Недев и М. М. Чобан

Общая метризационная проблема, то есть проблема нахождения необходимых и достаточных условий для того, чтобы данное топологическое пространство было гомеоморфно метрическому, возникла одновременно с понятием топологического пространства (М. Фреше [39], П. С. Александров и П. С. Урысон [1], [43]; 965 и др.). На протяжении нескольких десятилетий она была в центри внимания многих математиков, и даже после результатов Ю. М. Смирнова [32], Нагаты [25] и Бинга [14], давших ее исчерпывающее решение, открылись новые точки зрения на эту проблему, которые дали повод к новым изысканиям. Поэтому не удивительно, что на пути к решению метризационной проблемы накопилось множество фактов, разрозненных, однако, не только во времени, но и в идейном отношении.

В настоящей работе авторы рассматривают с единой точки зрения все основные результаты, полученные до сих пор в связи с проблемой метризации, и раскрывают связи, существующие между ними. Этот подход позволил выяснить роль „паразита счетности", сопутствующего почти всем более ранним исследованиям* и даже играющего в них основную роль.

Работа состоит из пятнадцати параграфов. В первых двух параграфах вводятся основные понятия: понятия θ-шкалы, θ М-шкалы θ-о-метрики и т. д. В §3 для каждой θ-о-метрики строится равномерно эквивалентная ей правильная θ-о-метрика над тихоновским полуполем R^{θ}. Здесь, прежде всего следует отметить значение этого результата при выборе „структур", над которыми строятся „метрики". Наши редукционные результаты (см. Теорема 3.1 и Замечания 3.1 и 4.3) утвер-

---

* Исключением являются работы М. Фреше [40], Апперта [13], Гомеса [16], Колме [19] и некоторых других. Основная цель названных работ — раскрыть связь между понятием „регулярного отклонения", введенного М. Фреше [40], и понятием равномерной структуры А. Вейля [15].

Намного дальше в своих исследованиях продвинулись М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский и Т. А. Сарымсаков [6] и их ученики, которые рассматривают вопрос метризации над полуполями. Но общий замысел этих работ состоит в основном в приложении метрик над тихоновскими полуполями к различным вопросам функционального анализа, теории меры и т. д.

ждают, что естественным классом М-шкал, над которым следует изучать общие вопросы о-метризации, являются тихоновские полуполя*. Но это еще не означает, что мы должны исключить шкалы из рассмотрения. Именно здесь нам кажется целесообразным следующий подход: из посылок о существовании для данного пространства о-метрик над специальными шкалами выводить заключения о дальнейших свойствах данного топологического пространства Этому подходу и посвящены §§ 6, 13, 14, 15 данной работы**.

В § 4 приводятся критерии θ-о-метризуемости, θ-симметризуемости. θ-Δ-метризуемости и θ-метризуемости топологических пространств. Отметим, что понятие θ-метризуемости введено М. Я. Антоновским [7]. Ему и принадлежат первые результаты в этом направлении.

§§ 5 и 6 посвящены произведению о-метризуемых пространств. В §§ 7-10 изучаются топологические свойства θ-о-метризуемых пространств.

В §§ 11, 12 нам удалось все основные метризационные критерии разбить на два класа (рП) и (П) таким образом, что условия любого критерия класса (рП) обеспечивают θ-метризуемость при любом θ, а условия критериев класса (П) — только для случая $\theta = \mathbf{a}_0$.*** Следует отметить, что, несмотря на такую предельную общность при $\theta = \mathbf{a}_0$, мы получаем известные о-метризуемые, Δ-метризуемые и метризуемые пространства [26]. Таким образом, проблема θ-метризации содержит в себе классическую проблему метризации. Кроме того, эта общность позволила получить новые результаты даже для $\theta = \mathbf{a}_0$ и одновременно очертить границы содержательности понятий, возникших в классической теории метризуемых, симметризуемых и о-метризуемых пространств.

Типичные представители класса критериев (рП) — метризационный критерий Читтендена 44 и его эквивалент на языке покрытий — критерий Александрова-Урысона [1]. Условия этих критериев даже в самых общих ситуациях эквивалентны аксиоме треугольника и поэтому долгое время считались неудовлетворительными. Их содержательность раскрылась с возникновением понятия равномерного пространства и появлением изящной работы мадам Фринк [41].

Классу (П) принадлежат критерий В. В. Немыцкого [29] и его эквивалент на языке покрытий — критерий А. В. Архангельского [9] и А. Стоуна [33]. Это более тонкие критерии и при $\theta > \mathbf{a}_0$ они не всегда обеспечивают θ-метризуемость.

В заключение отметим следующие обозначения: если γ-семейство подмножеств X и $A \subseteq X$, то $\gamma A = \cup \{ U \in \gamma \mid U \cap A \neq \varnothing \}$ и $\gamma^n A = \gamma\gamma^{n-1} A$. Через R мы всегда обозначаем поле действительных чисел, а через $\{ R_\alpha \mid \alpha \in A \}$ — семейства полей действительных чисел. Кроме того,

* Поэтому задача метризации топологических пространств над частично упорядоченными полугруппами [24] или над М-шкалами не может быть более общей, чем задача метризации над тихоновскими полуполями.

** Этому подходу посвящена работа М. Я. Антоновского [8], работы [34], [37] и некоторые параграфы книги Мамузича [23].

*** $\mathbf{a}_0$ — мощность натурального ряда.

точки из R_α будем снабжать индексом α внизу, $R^A = \Pi\{R_\alpha \mid \alpha \in A\}$, нуль и единица в R^A всегда обозначается через $0 = \{0_\alpha\}$ и $1 = \{1_\alpha\}$, а произвольная точка $x \in R^A$ через $x = \{x_\alpha\}$.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. В. Архангельскому за ценные указания при выполнении настоящей работы, а также глубокую благодарность М. Я. Антоновскому, ознакомившемуся с работой в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

§ 1. М-шкалы

В этом параграфе мы введем те объекты, которые будут играть роль „расстояния". Упорядоченную тройку (E, o, V_E), где E — некоторое множество, $o \in E$ и V_E — система подмножеств множества E, назовем шкалой, если $\{o\} = \bigcap\{v \mid v \in V_E\}$ и для любых двух елементов $v_1, v_2 \in V_E$ существует $u_3 \in V_E$ такой, что $v_3 \subseteq v_1 \cap v_2$.

Пример шкалы. Пусть E — T_1-пространство и o — произвольная фиксированная точка E. Обозначим через V_E некоторый фиксированный базис окрестностей точки o. Тогда тройка (E, o, V_E) является шкалой.

В таком виде понятие шкалы не пригодно для рассмотрения метрик со значениями в E и удовлетворяющих аксиоме треугольника. Поэтому мы рассмотрим более специальный класс шкал.

Шкалу (E, o, V_E) назовем M-шкалой, если на E определены операция суммы „+" двух элементов из E и частичный порядок „$\leq$" (или „$\geq$"), удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. $x + 0 = 0 + x = x$ для любой точки $x \in E$;
2. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$. Кроме того, если $x \geq y$ и $x \neq y$, то будем писать $x > y$;
3. Если $x \geq x_1$ и $y \geq y_1$, то $x + y \geq x_1 + y_1$.
4. Для каждого $v \in V_E$ существует $w = w(v) \in V_E$ такой, что $w + w \subseteq v$.
5. Для любого элемента $v \in V_E$ существует элемент $w \in V_E$ такой, что если $a \leq x \leq b$ и $a, b \in w$, то $x \in v$. Для краткости элемент w будем называть v-заполненным.

М-шкалы можно классифицировать естественным образом. Пусть θ — некоторое бесконечное кардинальное число. М-шкалу (E, o, V_E) (в частности и шкалу) назовем θ-М-шкалой (соответственно θ-шкалой), если card $V_E \leq \theta$.

Обозначим через R^θ тихоновское произведение θ штук действительных прямых R с естественными порядком и операцией суммы. Тройка $(R^\theta, 0, V_{R^\theta})$, где V_{R^θ} — базис выпуклых окрестностей нуля в R^θ мощности θ, является θ-М-шкалой. М-шкала $(R^\theta, 0, V_{R^\theta})$ будет играть особо важную роль в дальнейших исследованиях. Следуя терминологии работы [6], М-шкалу $(R^\theta, 0, V_{R^\theta})$ будем называть тихоновским θ-полуполем (или θ-полуполем) и для краткости будем обозначать через R^θ. Вместо V_{R^θ} всегда будем писать V_θ.

Примером М-шкалы может служить и любое полуполе (см. [6]).

Пусть $\{(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha}) \mid \alpha \in A\}$ — семейство шкал. Положим $E = \Pi\{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $o = \{o_\alpha\}$ и $V_E = \{\prod_{i=1}^{n} v_i \times \Pi\{E_\alpha \mid \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\} \mid v_i \in V_{E_{\alpha_i}}, \alpha_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Тройка (E, o, V_E) является шкалой и называется тихоновским произведением шкал $(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha})$. Очевидно, что тихоновское произведение не более чем θ θ-шкал есть θ-шкала. Кроме того, если каждое $(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha})$ является М-шкалой, то на E можно ввести естественным образом сложение $\{x_\alpha\} + \{y_\alpha\} = \{x_\alpha + y_\alpha\}$ и порядок $\{x_\alpha\} \leq \{y_\alpha\}$ в том и только в том случае, если $x_\alpha \leq y_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. М-шкала (E, o, V_E) с указанным сложением и порядком называется тихоновским произведением М-шкал $(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha})$. Таким образом, θ-полуполе $(R^\theta, 0, V_\theta)$ является тихоновским произведением θ полей $(R_\alpha, 0_\alpha, V_{R_\alpha})$, где $V_{R_\alpha} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2 \ldots\right\}$.

В заключение отметим, что любую шкалу $(E, 0, V_E)$ можно превратить в М-шкалу. Порядок берется тривиальный: каждая точка $x \geq 0$ и любые две различные точки, отличные от 0, несравнимы. Для того, чтобы определить операцию сложения, множество E вполне упорядочивается таким образом, чтобы 0 была первой точкой по порядку. Тогда $x + y = \max\{x, y\}$ по последнему порядку.* В таком случае всякое $v \in V_E$ v-заполнено и $v + v = v$.

§ 2. Основные понятия и обозначения

Пусть X — произвольное множество и (E, o, V_E) — М-шкала. Отображение $\rho: X \times X \to E$, отображающее $X \times X$ в E, называется о-метрикой на множестве X над шкалой (E, o, V_E) если $\rho(x, x) = o$ для каждой точки $x \in X$.

Множество X вместе с заданной на нем о-метрикой $\rho: X \times X \to E$, называется о-метрическим пространством над М-шкалой (E, o, V_E), которое мы будем обозначать символом $\{X, \rho, (E, o, V_E)\}$.

Пусть задано о-метрическое пространство $\{X, \rho, (E, o, V_E)\}$. Для каждых $A \subseteq X$ и $v \in V_E$ положим $O_v^\rho A = \{x \in X \mid \rho(y, x) \in v$ для некоторого $y \in A\}$. Если $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ и для некоторого $v \in V_E$ имеем $O_v^\rho A \cap B = \varnothing$, то будем писать $\rho[A, B] \geq v$ или $\rho[A, B] > o$. Таким образом, неравенство $\rho[A, B] > o$ означает, что $O_v^\rho A \cap B = \varnothing$ для некоторого $v \in V_E$. Если же $O_v^\rho A \cap B \neq \varnothing$ для любого $v \in V_E$, то будем писать $\rho[A, B] = o$.

Пусть $\{X, \rho, (E, o, V_E)\}$ — о-метрическое пространство. С о-метрикой ρ можно каноническим образом связать топологию τ_ρ на X по

* Операция „+“ будет ассоциативна и коммутативна.

следующему правилу: множество $F \subseteq X$ объявляется замкнутым в том и только в том случае, если $\rho[x, F] > o$ для каждой точки $x \notin F$. Таким образом, $U \in \tau_\varrho$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in U$ имеем $O_v^\varrho x \subseteq U$ для некоторого $v \in V_E$.

Пусть $A \subseteq X$. Положим $[A]_\varrho^1 = \{x \in X \mid \rho[x, A] = o\}$ и $[A]_\varrho^\alpha = [\cup\{[A]_\varrho^\beta \mid \beta < \alpha\}]_\varrho^1$ для любого порядкового числа α. Очевидно, что для некоторого порядкового числа α имеем $[A]_\varrho^\alpha = [A]_{\tau_\varrho}$.

о-метрику ρ назовем сильной, если $[A]_{\tau_\varrho} = [A]_\varrho^1$ для любого $A \subseteq X$. Легко заметить, что о-метрика ρ является сильной тогда и только тогда, когда $x \in \cap\{\mathrm{Int}\, O_v^\varrho x \mid v \in V_E\}$ для любой точки $x \in X$.

Топологическое пространство (X, τ) называется о-метризуемым о-метрикой $\rho: X \times X \to E$, если $\tau = \tau_\varrho$.

Введем следующие ограничения.

Аксиома симметрии (С): $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$. О-метрики, удовлетворяющие аксиоме (С), будем называть симметрическими.

Аксиома (T_1): $\rho(x, y) = o$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Аксиома (T_2): если $x \neq y$, то $O_v^\varrho x \cap O_v^\varrho y = \varnothing$ для некоторого $v \in V_E$.

Условие (сК): если A не замкнуто в (X, τ_ϱ), то для любого $v \in V_E$ существуют $x, y \in A$ такие, что $\rho(x, y) \in v$ и $x \neq y$.

Условие (АН) (Александрова-Немыцкого): для любых $x \in X$ и $v \in V_E$ существует $w = w(v, x) \in V_E$ такой, что если $y \in O_w^\varrho x$ и $z \in O_w^\varrho x$, то $z \in O_v^\varrho y$.

Условие (рП) (Фреше): для любого $v \in V_E$ существует $w = w(v) \in V_{E\theta}$ такое, что если $y \in O_w^\varrho x$ и $z \in O_w^\varrho y$, то $z \in O_v^\varrho x$.

Условие (П) (Немыцкого): Для любых $v \in V_E$ и $x \in X$ существует $w = w(v, x) \in V_E$ такое, что если $y \in O_w^\varrho x$ и $z \in O_w^\varrho y$, то $z \in O_v^\varrho x$

Лемма 2.1. Пусть $\{X, \rho, (E, o, V_E)\}$ — о-метрическое пространство. Тогда: а) ρ удовлетворяет аксиоме (T_1) тогда и только тогда, когда (X, τ_ϱ) — T_1-пространство.

б) если ρ удовлетворяет условию (сК), то ρ удовлетворяет и аксиоме (T_1).

в) если (X, τ_ϱ) — T_2-пространство, то ρ удовлетворяет аксиоме (T_2).

г) если ρ-сильная о-метрика, удовлетворяющая (T_2), то (X, τ_ϱ) — T_2-пространство.

д) если ρ удовлетворяет (рП), то ρ удовлетворяет и (П).

е) если ρ удовлетворяет (П), то ρ—сильная о-метрика на X.

ж) если ρ удовлетворяет (АН) и (T_1), то ρ удовлетворяет и (сК).

Доказательство. Утверждения а) — д) очевидны.

Проверим утверждение е). Пусть $A \subseteq X$ и $[A]_\varrho^1$ не замкнуто в (X, τ_ϱ). Тогда $\rho[x, [A]_\varrho^1] = o$ для некоторой точки $x \notin [A]_\varrho^1$. Существует v такой, что $O_v^\varrho x \cap A = \varnothing$, так как $\rho[x, A] > o$. Выберем $w = w(v, x) \in V_E$ по

условию (П). Пусть $y \in O^{\varrho}_{w} x \cap [A]^{1}_{\varrho}$. Тогда $z \in O^{\varrho}_{w} y$ для некоторого $z \in A$. По условию (П) $\rho(x, z) \in v$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения е). Утверждение ж) — очевидно. Лемма доказана.

Теорема 2. 1. Пусть пространство X о-метризуемо о-метрикой ρ над м-шкалой (E, o, V_E). Тогда ρ является сильной о-метрикой в том и только в том случае, если любое подпространство X_1 пространства X о-метризуемо о-метрикой ρ.

Доказательство. Пусть о-метрика ρ сильная, $L \subseteq X_1 \subseteq X$ и L не замкнуто в X_1. Поскольку $[L]_{X, \tau_\varrho} = \{x \in X \mid \rho[x, L] = o\}$, то для любой точки $x \in [L] \cap X_1$ имеем $\rho[x, L] = o$. Если же $F \subseteq X_1$, F замкнуто в X_1 и $x \in X_1 \setminus F$, то $x \notin [F]_{x, \tau_\varrho}$. Поэтому $O^{\varrho}_{v} x \cap F = \varnothing$ для некоторого $v \in V_E$. Таким образом, X_1 о-метризуемо о-метрикой ρ (точнее, ее сужением на $X_1 \times X_1$).

Предположим теперь, что всякое подпространство пространства X о-метризуемо о-метрикой ρ. Докажем, что $[A]_{\tau_\varrho} = \{x \in X \mid \rho[x, A] = o\}$ для любого подмножества $A \subseteq X$. Пусть $A \subseteq X$ и $x \in [A]_{\tau_\varrho}$. Положим $X_1 = A \cup \{x\}$. Поскольку X_1 о-метризуемо о-метрикой ρ и $[A]_{X_1} = A \cup \{x\}$ то $\rho[x, A] = o$. Теорема доказана.

0-метрики $\rho_i : X \times X \to (E_i, o, V_{E_i})$ $(i = 1, 2)$ называются эквивалентными, если для любых $x \in X$, $v_1 \in V_{E_1}$ и $v_2 \in V_{E_2}$ существуют такие элементы $w_2 \in V_{E_2}$ и $w_1 \in V_{E_1}$, что $O^{\varrho_1}_{w_1} x \subseteq O^{\varrho_2}_{v_2} x$ и $O^{\varrho_2}_{w_2} x \subseteq O^{\varrho_1}_{v_1} x$. 0-метрики ρ_1 и ρ_2 будем называть равномерно эквивалентными, если для любых $v_1 \in V_{E_1}$ и $v_2 \in V_{E_2}$ существуют такие элементы $w_1 \in V_{E_1}$ и $w_2 \in VE_2$, что $O^{\varrho_1}_{w_1} x \subseteq O^{\varrho_2}_{v} x$ и $O^{\varrho_2}_{w_2} x \subseteq O^{\varrho_1}_{v_1} x$ для любой точки $x \in X$.

Без труда устанавливается следующая

Лемма 2. 2. 0-метрики $\rho_i : X \times X \to (E_i, o, V_{E_i})$ $(i = 1, 2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $[A]^{1}_{\varrho_1} = [A]^{1}_{\varrho_2}$ для любого множества $A \subseteq X$.

Следствие 2. 1. Если о-метрики ρ_1 и ρ_2 сильные и $\tau_{\rho_1} = \tau_{\varrho_2}$, то о-метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

Теорема 2. 2. Пусть даны о-метрики $\rho : X \times X \to (E_1, o, V_{E_1})$ и $d : X \times X \to (E_2, o, V_{E_2})$. Если о-метрики ρ и d эквивалентны, то:

1. $[A]^{\alpha}_{\varrho} = [A]^{\alpha}_{d}$ для любых $A \subseteq X$ и порядкового числа α.
2. $\tau_\varrho = \tau_d$.
3. ρ сильная тогда и только тогда, когда d сильная.
4. ρ удовлетворяет аксиоме (T_1) или (T_2) тогда и только тогда когда d удовлетворяет той же аксиоме.
5. Если, кроме того, о-метрики ρ и d равномерно эквивалентны то ρ удовлетворяет некоторому из условий (АН), (рП), (П), (сК) в том и только в том случае, если d удовлетворяет тому же условию.

Доказательство. 1. Вытекает из леммы 2. 2.

2. Следует из утверждения 1.

3. Вытекает из леммы 2. 2.

4. Очевидно.

5. Пусть ρ удовлетворяет условию (сК), $v_2 \in V_{E_2}$ и множество A не замкнуто в (X, τ_ρ). По определению, найдутся элемент $w_1 \in V_{E_1}$ и точки $x, y \in A$, для которых $\rho(x, y) \in w_1$, $x \neq y$ и $O^\rho_{w_1} x \subseteq O^d_{v_2} x$. Тогда $d(x, y) \in v_2$, то есть $y \in O^\rho_{w_1} x \subseteq O^d_{u_2} x$. Таким образом и d удовлетворяет условию (сК).

Пусть ρ удовлетворяет условию (П), $v_2 \in V_{E_2}$ и $x \in X$. По условиям теоремы найдутся $w_1, v_1 \in V_{E_1}$ такие, что $O^\rho_{\tau_1} z \subseteq O^d_{v_2} z$ для любой точки $z \in X$ и, если $y \in O^\rho_{w_1} x$, $z \in O^\rho_{w_1} y$, то $z \in O^\rho_{v_1} x$. Фиксируем такой элемент $w_2 \in V_{E_2}$, что $O^d_{w_2} z \subseteq O^\rho_{w_1} z$ для любой точки $z \in X$. Тогда, если $y \in O^d_{w_2} x$ и $z \in O^d_{w_2} y$, то $y \in O^\rho_{w_1} x$ и $z \in O^\rho_{w_1} y$. Следовательно, $z \in O^\rho_{v_1} x \subseteq O^d_{v_2} x$. Этим показано, что и d удовлетворяет условию (П).

Условия (АН) и (рП) проверяются аналогичным образом. Теорема доказана.

Пример 2. 1. Пусть $X = \{0, 1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots, {}^1/_n, \ldots\}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ для любых $x, y \in X$. Симметрика d вводится следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{если } 0 \in \{x, y\}, \\ 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } 0 \neq x \neq y \neq 0. \end{cases}$$

0-метрики ρ и d сильные и порождают одну и ту же топологию на множестве X. 0-метрика ρ является метрикой в обычном смысле и поэтому она удовлетворяет всем условиям (сК), (АН), (рП) и (П). Множество $A = \{1, {}^1/_2, \ldots, {}^1/_n, \ldots\}$ не замкнуто, но для любых двух различных точек $x, y \in A$ имеем $d(x, y) = 0$. Таким образом, d не удовлетворяет условиям (сК) и (АН). По лемме 2. 2 о-метрики ρ и d эквивалентны. Значит существуют две эквивалентные о-метрики ρ, d (даже на компактном пространстве), одна из которых удовлетворяет условиям (сК) и (АН), а другая нет.

Пример 2. 2. Существуют две эквивалентные симметрики, одна из которых удовлетворяет условию (рП), а другая не удовлетворяет даже условию (П).

Действительно, пусть X — сильно симметризуемое неметризуемое (в классическом смысле) вполне-регулярное пространство. Пусть $\rho: X \times X \to R$ — одна из симметрик на X. В силу следствия 4.5 существует метрика $d: X \times X \to R^\theta$, для которой $\tau_\rho = \tau_d$. На основании следствия 2.1 о-метрики ρ и d эквивалентны. О-метрика d удовлетворяет условию (рП). Симметрика ρ не удовлетворяет условию (П), поскольку в противном случае пространство X метризуемо (см. теорему 12.3).

Пусть (E, o, V_E) — М-шкала и $\rho: X \times X \to E$ — о-метрика.

Аксиома (Δ). $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Неотрицательные о-метрики, удовлетворяющие аксиоме (Δ), будем называть **Δ-метриками**, а симметрики, удовлетворяющие аксиоме (Δ) — **метриками**.

Замечание 2.1. Каждая метрика неотрицательна (т. е. $\rho(x, y) \geq o$ для любых $x, y \in X$) и, следовательно, является Δ-метрикой.

Лемма 2.3. Любая Δ-метрика удовлетворяет условию (рП).

Доказательство. Пусть $\rho: X \times X \to E$ — Δ-метрика над М-шкалой (E, o, V_E) и $v \in V_E$. Существуют $w, w_1 \in V_E$ такие, что $w + w \subseteq w_1 \subseteq v$ и w_1 v-заполнен. Предположим, что $\rho(x, y) \in w$ и $\rho(y, z) \in w$. Тогда $\rho(x, y) + \rho(y, z) \in w_1$. Поскольку $o \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) \in v$. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Всякая Δ-метрика является сильной о-метрикой. О-метрику $\rho: X \times X \to E$ назовем θ-о-метрикой, а пространство (X, τ_ρ) — θ-о-метризуемым о-метрикой ρ, если (E, o, V_E) является θ-М-шкалой, т. е. card $V_E \leq \theta$. Аналогичным образом вводятся понятия θ-симметрики, θ-Δ-метрики и θ-метрики.

Лемма 2.4. Пусть пространство (X, τ) о-метризуемо некоторой $\mathbf{a}_0$-о-метрикой, удовлетворяющей аксиоме (T_2). Тогда любые две $\mathbf{a}_0$-о-метрики, порождающие топологию τ на X, эквивалентны между собой.

Доказательство. Поскольку на X существует некоторая $\mathbf{a}_0$-о-метрика, удовлетворяющая (T_2), то любая сходящаяся последовательность $\{x_n \mid n = 1, 2 \ldots\}$ сходится только к одной точке в X. Пусть $\rho: X \times X \to E$ и $d: X \times X \to E'$ — две $\mathbf{a}_0$-о-метрики, для которых $\tau = \tau_\rho = \tau_d$. Покажем, что для любого $A \subseteq X$ имеется $[A]^1_\rho = [A]^1_d$. Пусть $\rho[x_0, A] = o$. Тогда существует последовательность $B = \{x_n \mid n = 1, 2 \ldots\}$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_0, x_n) = o$. Множество B не замкнуто в X и x_0 — единственная предельная точка для него. Следовательно и $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_0, x_n) = o$. Этим показано, что $[A]^1_\rho = [A]^1_d$ для любого $A \subseteq X$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2.3. Если (X, τ) — T_2-пространство, то любые две $\mathbf{a}_0$-о-метрики на X эквивалентны.

Пример 2.3. На бикомпактном T_1-пространстве могут существовать две неэквивалентные $\mathbf{a}_0$-симметрики.

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Положим

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = m, \\ \dfrac{1}{n+m}, & \text{если } n \neq m; \end{cases}$$

$$d(n, m) = \begin{cases} \rho(n, m), & \text{если } (n+m) \text{ — четное число}, \\ 1, & \text{если } (n+m) \text{ — нечетное число}. \end{cases}$$

О-метрики ρ и d порождают одну и ту же топологию, в которой множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно конечно. О-метрика ρ сильная, а о-метрика d не сильная, поэтому они не эквивалентны.

§ 3. Редукционные о-метрики

Пусть $\rho: X\times X \to E$ — о-метрика над М-шкалой (E, o, V_E). Для каждого $v \in V_E$ и любых $x, y \in X$ положим

$$\rho_v(x, y)=\begin{cases} 0, \text{ если } y \in O^{\rho}_{v} x, \\ 1, \text{ если } y \notin O^{\rho}_{v} x. \end{cases}$$

Рассмотрим $\hat{\rho}: X\times X \to R^{V_E}$, где $\hat{\rho}(x, y)=\{\rho_v(x, y)\}$. 0-метрику $\hat{\rho}: X\times X \to R^{V_E}$ назовем **редуцирующей** для ρ.

Теорема 3. 1. Для любой о-метрики $\rho: X\times X \to E$ справедливы следующие утверждения:

1. 0-метрики ρ и $\hat{\rho}$ равномерно эквивалентны.
2. Если ρ удовлетворяет аксиоме (С), то и $\hat{\rho}$ удовлетворяет аксиоме (С).
3. Если ρ — θ-о-метрика, то и $\hat{\rho}$ — θ-о-метрика.

Доказательство. 1. Пусть $v_1 \in V_E$. Положим $w=(-1_{v_1}, 1_{v_1})\times \Pi\{R_v \mid v \in V_E \setminus \{V_1\}\}$. Существует элемент $w_2 \in V_{R^{V_E}}$ для которого $w_2 \subseteq w$. Тогда $O^{\hat{\rho}}_{w_2} x \subseteq O^{\hat{\rho}}_{w} x = O^{\hat{\rho}}_{v_1} x$ для любой точки $x \in X$. Пусть $v_2=\prod_{i=1}^{n} (-\varepsilon_{v_i}, \varepsilon_{v_i})\times \Pi\{R_v \; v \in V_E \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}\}$. Найдется $w_1 \in V_E$, для которого $w_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} v_i$. Тогда $O^{\rho}_{w_1} x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} O^{\rho}_{v_i} x = O^{\hat{\rho}}_{v_2} x$ для любой точки $x \in X$. Следовательно, о-метрики $\hat{\rho}$, ρ равномерно эквивалентны.

Утверждения 2 и 3 очевидны. Теорема доказана.

О-метрика $\rho: X\times X \to R^{\theta}$ называется **правильной**, если:

1) $\rho(x, y)\geq 0$ для любых $x, y \in X$;
2) $\rho[x, A]=0$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, A)=\inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}=0$;
3) $\varphi(x, y)\leq 1=\{1_\alpha\} \in R^{\theta}$ для любых $x, y \in X$.

Существование правильных о-метрик позволяет ввести на множестве $F(X)$ всех замкнутых непустых подмножеств о-метрику Хаусдорфа d:

$d(A, B)=\sup\{\max\{\rho(a, B), \rho(A, b)\} \mid a \in A, b \in B\}$, где
$\rho(a, B)=\inf\{\rho(a, y) \mid y \in B\}$,
$\rho(A, b)=\inf\{\rho(x, b) \mid x \in A\}$.

Теорема 3.2. Для любой о-метрики $\rho: X\times X \to E$, о-метрика $\hat{\rho}$ правильная.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $A \subseteq X$ произвольны. Если $\rho[x, A]=0$, то в силу теоремы 3.1, и $\hat{\rho}[x, A]=0$. Поэтому $\hat{\rho}(x, A)=0$.

Если $\rho[x, A]>o$, то $O^{\rho}_{v_0} x \cap A=\varnothing$ для некоторого $v_0 \in V_E$. Положим $\alpha=\{a_v \mid a_v=0, \text{ если } v\neq v_0 \text{ и } a_{v_0}=1\} \in R^{V_E}$. Ясно, что $\alpha>0$. Кроме того, $\hat{\rho}(x, y)\geq \alpha$ для любого $y \in A$. Поэтому $\hat{\rho}(x, A)=\inf\{\hat{\rho}(x, y) \mid y \in A\}\geq \alpha$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Всякая θ-о-метрика равномерно эквивалентна некоторой правильной θ-о-метрике над полуполем R^{θ}.

Замечание 3.1. Если $\theta=\mathbf{a}_0$, то есть $V_E=\{v_1, v_2, \ldots\}$, то вместо о-метрики $\hat{\rho}$ можно взять о-метрику $\hat{\hat{\rho}}(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_{v_n}(x, y)$. В этом специальном случае теоремы 2.1 и 2.2 остаются в силе, если в их формулировках заменить $\hat{\rho}$ на $\hat{\hat{\rho}}$. Заметим, что $\hat{\hat{\rho}}(x, y)\geq 0$, то есть является о-метрикой в обычном смысле (см. [26]).

Результаты этого параграфа позволяют нам рассматривать в дальнейшем о-метрики в основном только над тихоновскими полуполями. Только в тех случаях, где важны некоторые дополнительные свойства шкал, редукционные теоремы не применимы.

§ 4. Критерии θ-о-метризуемости

Будем говорить, что пространство X обладает θg-сетью, если существует система подмножеств (не обязательно открытых) $\Omega=\{H_\alpha x \mid x\in X, \alpha\in A;\ \operatorname{card} A\leq\theta\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $x\in\bigcap\{H_\alpha x \mid \alpha\in A\}$ для любой точки $x\in X$;
2. для любых $\alpha_1, \alpha_2\in A$ и $x\in X$ существует $\alpha_3=\alpha(\alpha_1, \alpha_2, x)\in A$ такой, что $H_{\alpha_3}x\subseteq H_{\alpha_1}x\cap H_{\alpha_2}x$;
3. множество U открыто в X тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in U$ существует $\alpha=\alpha(x, U)\in A$ такой, что $H_\alpha x\subseteq U$.

Теорема 4.1. Пространство X—θ-о-метризуемо тогда и только тогда, когда оно обладает θg-сетью.

Доказательство. Пусть X о-метризуемо о-метрикой ρ над θ-полуполем R^θ. Тогда легко проверить, что семейство $\Omega=\{H_v x=O_v^\rho x \mid x\in X, v\in V_\theta\}$ является θg-сетью в X.

Пусть теперь $\Omega=\{H_\alpha x \mid x\in X, \alpha\in A;\ \operatorname{card} A\leq\theta\}$ — θg-сеть в пространстве X. Для каждого $\alpha\in A$ и любых $x, y\in X$ положим

$$\rho_\alpha(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{если } y\notin H_\alpha x, \\ 0, & \text{если } y\in H_\alpha x. \end{cases}$$

Рассмотрим о-метрику $\rho: X\times X\to \mathbf{R}^A$, где $\rho(x, y)=\{\rho_\alpha(x, y)\}$ для любых $x, y\in X$. Если $v\in V_A$ и $\prod_{i=1}^{n}(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)\times\prod\{R_\alpha \mid \alpha\in A\setminus\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}\subseteq v\subseteq\prod_{i=1}^{n}(-1, 1)\times\prod\{R_\alpha \mid \alpha\in A\setminus\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}$, где $\varepsilon_i>0$ для любого $i=1, 2, \ldots, n$, то имеет место равенство

$$O_v^\rho x=\bigcap_{i=1}^{n} H_{\alpha_i} x \tag{I}$$

для любой точки $x\in X$. Поэтому топология τ_ρ совпадает с заданной на X топологией. Теорема доказана. Кроме того, равенство (I) позволяет получить следующую теорему.

Теорема 4.2. Топологическое пространство X сильно θ-о-метризуемо тогда и только тогда, когда характер $\chi_x X \leq \theta$ для любого $x \in X$.

Следствие 4.1. Пространство X сильно a_0-о-метризуемо тогда и только тогда, когда X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Следствие 4.2. Любое топологическое пространство X сильно θ-о-метризуемо для некоторого θ, а именно для $\theta = \sup\{\chi_x X \mid x \in X\}$.

Предложение 4.1. Пусть X — T_2-пространство Фреше-Урысона. Тогда всякая о-метрика на X сильная.

Доказательство. Пусть $\rho: X \times X \to R^\theta$ — о-метрика над полуполем R^θ. Допустим, что ρ — не сильная. Тогда для некоторых $x \in X$ и $v \in V_\theta$ имеем $x \notin \operatorname{Int} O_v^\rho x$, т. е. $x \in [X \setminus O_v^\rho x]$. Тогда существует последовательность $L = \{x_n \in X \setminus O_v^\rho x \mid n = 1, 2, \cdots\}$ такая, что $[L] = L \cup \{x\}$ Поскольку L не замкнуто в X и $\{x\} = [L] \setminus L$, то $\rho[x, L] = 0$. Следовательно, $\rho[x, X \setminus O_v^\rho x] = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Замечание 4.1. Из существования на топологическом пространстве X некоторой сильной θ-о-метрики, где $\theta > a_0$, еще не следует, что все о-метерики на X сильны (см. пример 9.1 из § 9).

В дальнейшем нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Предложение 4.2. Пусть ρ — о-метрика на X. Тогда всякое открытое и всякое замкнутое множество пространства (X, τ_ρ) о-метризуемо о-метрикой ρ.

Теорема 4.3. Пространство X — θ-симметризуемо тогда и только тогда, когда в X существует θg-сеть $\Omega = \{H_\alpha x \mid x \in X, \alpha \in A; \operatorname{card} A \leq \theta\}$ со следующими свойствами:

1. Множество A направлено некоторым порядком „$\leq$".
2. Если $\alpha, \beta \in A$ и $\alpha < \beta$, то $H_\beta x \subseteq H_\alpha x$ для любой точки $x \in X$.
3. Ели $x \in \bigcap\{H_\alpha x_\alpha \ \alpha \in A\}$, то $x = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Далее, пространство X сильное θ-симметризуемо в том и только в том случае, если, кроме условий 1—3, Ω удовлетворяет еще условию

4. $x \in \bigcap\{\operatorname{Jnt} H_\alpha x \mid \alpha \in A\}$ для любой точки $x \in X$.

Доказательство. Пусть ρ — θ-симметрика над полуполем R^θ. На множестве V_θ вводим естественный порядок: $v_1 \leq v_2$, если $v_1 \supseteq v_2$. Тогда θg-сеть $\Omega = \{O_v^\rho x \mid x \in X, v \in V_\theta\}$ удовлетворяет условиям 1—3. Кроме того, если ρ — сильная о-материка, то, очевидно, выполнено и условие 4.

Предположим теперь, что пространство X обладает θg-сетью $\Omega = \{H_\alpha x \mid x \in X, \alpha \in A; \operatorname{card} A = \theta\}$, удовлетворяющей условиям 1—3. Для каждого $\alpha \in A$ и любых $x, y \in X$ положим

$$\rho_\alpha(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } (\{x\} \cap H_\alpha y) \cup (\{y\} \cap H_\alpha x) \neq \varnothing; \\ 1, \text{ если } (\{x\} \cap H_\alpha y) \cup (\{y\} \cap H_\alpha x) = \varnothing. \end{cases}$$

По построению, отображение $\rho: X\times X\to R^A=R^\theta$ является θ-симметрикой на множестве X. Покажем, что τ_ρ совпадает с заданной на X топологией. Пусть F-замкнутое подмножество X и $x\in X\setminus F$. Допустим, что $\rho[x, F]=0$, то есть, что $O_v^\rho x\cap F\neq\emptyset$ для любого $v\in V_\theta$. Тогда для каждого $\alpha\in A$ существует точка $x_\alpha\in F$ такая, что $\rho_\alpha(x, x_\alpha)=0$. Поскольку Ω — θg-сеть, то для некоторого $\alpha_0\in A$ имеем $H_{\alpha_0}x\cap F=\emptyset$. Поэтому для всех $\alpha\geq\alpha_0$ $x\in H_\alpha x_\alpha$. Тогда в силу условия 3, $x=\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$, то есть $x\in[F]=F$. Полученное противоречие показывает, что $\rho[x, F]>0$. Пусть $v\in V_\theta$ и

$$\prod_{i=1}^{n}(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)\times\prod\{R_\alpha\mid\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\}\subseteq v\subseteq\prod_{i=1}^{n}(-1, 1)$$

$$\times\prod\{R_\alpha\mid\alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\},$$

где $\varepsilon_i>0$ для любого $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда имеет место следующее неравенство

$$O_v^\rho x\supset\bigcap_{i=1}^{n}H_{\alpha_i}x \tag{2}$$

для любой точки $x\in X$. Поэтому, если $L\subseteq X$ и L не замкнуто в X, то $\rho[x, L]=0$ для некоторой точки $x\in X\setminus L$. Этим доказано, что топология τ_ρ совпадает с заданной X топологией. Кроме того, если Ω удовлетворяет еще условию 4, то, в силу неравенства (2), симметрика ρ сильная. Теорема доказана.

Теорема 4. 4. Если пространство X обладает базой $B=\cup\{B_\alpha\mid\alpha\in A, \text{card } A\leq\theta\}$ такой, что $x\in H(\alpha, x)=\text{Jnt}\cap\{U\in B_\alpha\mid x\in U\}$ для любых $x\in X$ и $\alpha\in A$, то X—θ-Δ-метризуемо.

Доказательство. Для любых $x, y\in X$ и каждого $\alpha\in A$ положим

$$\rho_\alpha=(x, y)=\begin{cases}1, & \text{если } y\notin H(\alpha, x)\\ 0, & \text{если } y\in H(\alpha, x).\end{cases}$$

Поскольку из $y\in H(\alpha, x)$ следует $H(\alpha, y)\subseteq H(\alpha, x)$, то ρ_α есть Δ-метрика для каждого $\alpha\in A$. Δ-метрика $\rho: X\times X\to R^A$, где $\rho(x, y)=\{\rho_\alpha(x, y)\}$, является θ-Δ-метрикой на X и τ_ρ совпадает с заданной на X топологией.

Следствие 4.3. Если пространство X обладает θ-точечноконечной базой, то X θ-Δ-метризуемо.

Следствие 4.4.* Любое топологическое пространство веса $\leq\theta$ θ-Δ-метризуемо.

Замечание 4.2. В связи со следствиями 4.2 и 4.4, следует отметить, что существует не a_0 — Δ-метризуемое сильно a_0-о-метризуемое пространсво.

* Эквивалентный результат содержится в книге Чассара [42].

Теорема 4.5* Топологическое пространство X θ-метризуемо тогда и только тогда, когда на X существует семейство $\{\gamma_\alpha | \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \leq \theta\}$ открытых покрытий со следующими свойствами:

1. Для любых $x \in X$ и Ox — точки и ее окрестности в X — имеем $\gamma_\alpha x \subseteq Ox$ для некоторого $\alpha \in A$.
2. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует $\alpha_3 \in A$ такой, что для любой точки $x \in X$ $\gamma_{\alpha_3} x \subseteq U_1 \cap U_2$ для некоторых $U_1 \in \gamma_{\alpha_1}$ и $U_2 \in \gamma_{\alpha_2}$.

Доказательство. Пусть $\rho: X \times X \to E$ — θ-метрика над θ-М-шкалой (E, o, V_E). Для любого $v \in V_E$ положим $\gamma_v = \{\operatorname{Jnt} O_v^\rho x \mid x \in X\}$. Семейство $\{\gamma_v \mid v \in V_E\}$ искомое. Обратное утверждение является следствие известных результатов теории равномерных пространств [17]. Прямое доказательство этого факта дано в [7].

Условия теоремы 4. 5 эквивалентны такому условию: топология пространства X порождается некоторой равномерной структурой равномерного веса θ. Таким образом, имеет место.

Следствие 4. 5. Всякое вполне регулярное пространство веса θ θ-метризуемо.

Замечание 4.3. Методом Читтендена-Фринк можно доказать, что всякая θ-метрика равномерно эквивалентна некоторой θ-метрике над R^θ.

§ 5. Произведение о-метризуемых пространств

Предложение 5.1. Пусть $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств. Обозначим через X произведение $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ в тихоновской топологии. Пусть, далее, $\rho_\alpha: X_\alpha \times X_\alpha \to E_\alpha$ — о-метрика над М-шкалой $(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha})$, порождающая топологию пространства X_α. Рассмотрим $(E, o, V_E) = \Pi\{(E_\alpha, o_\alpha, V_{E_\alpha}) \mid \alpha \in A\}$ и о-метрику $\rho_p: X \times X \to E$, где $\rho_p(x, y) = \rho_p(\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\}) = \{\rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\}$ для любых двух точек $x, y \in X$. Тогда

1. ρ_p — о-метрика на множестве $X \times X$,
2. ρ_p — симметрика тогда и только тогда, когда ρ_α является симметрикой для каждого $\alpha \in A$.
3. ρ_p — Δ-метрика в том и только в том случае, если ρ_α является Δ-метрикой для каждого $\alpha \in A$.
4. ρ_p является сильной о-метрикой, порождающей топологию пространства X, если для любого $\alpha \in A$ ρ_α является сильной о-метрикой на X_α.
5. ρ_p удовлетворяет некоторому из условий (АН), (П), (рП), если ρ_α удовлетворяет тому же условию для любого $\alpha \in A$.

Доказательство. Утверждения 1—3 очевидны.

4. Пусть $x = \{x_\alpha\} \in X$ и $v \in V_E$. Тогда

$$v = \prod_{i=1}^{n} v_i \times \prod \{E_\alpha \mid \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}\}.$$

* Этот результат в одну сторону содержится в работе [7]. М. Я. Антоновский такую систему покрытий называет полной θ-цепью.

Поэтому

$$x \in \operatorname{Jnt} O_v^{\rho_p} x \supseteq \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Jnt}, \; O_{v_i}^{\rho_{\alpha_i}} x_{\alpha_i} \times \prod \{X_\alpha \; \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n\}\}.$$

5. Проверим только утверждение, относящееся к условию (П). Пусть $x = \{x_\alpha\} \in X$ и $v \in V_E$. Тогда

$$v = \prod_{i=1}^{n} v_i \times \prod \{E_\alpha \; \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\}.$$

Для каждого $i = 1, 2, \cdots, n$ берем $w_i = w_i(v_i, x_{\alpha_i}) \in V_{E_{\alpha_i}}$ по условию (П). Множество

$$w = \prod_{i=1}^{n} w_i \times \prod \{E_\alpha \mid \alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}\} \in V_E$$

искомое. Предложение доказано. Из предложения 5. 1 вытекает

Теорема 5.1. Для любого кардинального числа θ имеет место
1. Произведение не более, чем θ сильно θ-о-метризуемых пространств сильно θ-о-метризуемо.
2. Произведение не более, чем θ сильно θ-симметризуемых пространств сильно θ-симметризуемо.
3. Произведение не более, чем θ θ-Δ-метризуемых пространств θ-Δ-метризуемо.
4. Произведение не более, чем θ θ-метризуемых пространств θ-метризуемо.

Топологическое пространство X называется секвенциальным если для любого незамкнутого в X множества L существуют точка $x \in X \setminus L$ и последовательность $\{x_n \in L \mid n = 1, 2, \cdots\}$ такие, что $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Теорема 5.2. Произведение

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

счетного семейства $\{X_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ a_0-о-метризуемых T_2-пространств является a_0-о-метризуемым тогда и только тогда, когда X секвенциально.

Доказательство. Поскольку всякое a_0—о-метризуемое пространство секвенциально, то из a_0-о—метризуемости X следует его секвенциальность. Пусть теперь X секвенциально и $\rho_n : X_n \times X_n \to E_n$ —

$\mathbf{a}_0$—о-метрика пространства X_n над $\mathbf{a}_0$—М-шкалой (E_n, o_n, V_{E_n}), где $n=1, 2, \cdots$. Положим

$$(E, o, V_E)=\prod_{n=1}^{\infty}(E_n, o_n, V_E)$$

и рассмотрим $\mathbf{a}_0$—о-метрику $\rho: X\times X\to E$, где $\rho(\{x_n\}, \{y_n\})=\rho_n(x_n, y_n)\}$. Поскольку (E, o, V_E) — $\mathbf{a}_0$—М-шкала, то ρ является $\mathbf{a}_0$—о-метрикой на множестве X. Покажем, что τ_ρ совпадает с заданной на X топологией. Ясно, что из замкнутости $F\subseteq X$ в X следует $\rho[x, F]>0$ для любой точки $x\in X\setminus F$. Пусть L — незамкнутое подмножество пространства X. Тогда, в силу секвенциальности X, существуют последовательность $\{x^k\in L \mid k=1, 2, \cdots\}$ и точка $x^0\in X\setminus L$ такие, что $x^0=\lim\limits_{k\to\infty} x^k$. Поскольку

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n,$$

то $x^0=\{x_n^0\}$ и $x^k=\{x_n^k\}$. Очевидно, что $x_n^0=\lim\limits_{k\to\infty} x_n^k$ и, в силу хаусдорфовости

$$X_n, \lim_{k\to\infty}\rho_n(x_n^0, x_n^k)=o$$

для любого $n=1, 2, \cdots$. Поэтому и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^0, x^k)=o$.

Предложение 5.2. (Е. Майкл). Произведение $X\times Y$ секвенциального пространства X на регулярного счетнокомпактное секвенциальное пространство Y является секвенциальным пространством.

Следствие 5.1 Произведение конечного числа регулярных счетнокомпактных $\mathbf{a}_0$—о-метризуемых пространств $\mathbf{a}_0$—о-метризуемо.

Следствие 5. 2. Произведение

$$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$$

конечного числа хаусдорфовых $\mathbf{a}_0$—о-метризуемых пространств а-о-метризуемо тогда и только тогда, когда оно есть k-пространство.

Лемма 5.1. Пусть X—θ-компактное* пространство и $\{x_\alpha\in X \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$ — последовательност Шатуновского в X. Тогда существует точка $x_0\in X$ такая, что для любых окрестности Ox_0 точки x_0 в X и $\alpha\in A$ найдется $\beta\in A$ такой, что $\beta>\alpha$ и $x_\beta\in Ox_0$.

Доказательство. Допустим противное. Положим $U_\alpha=X\setminus[\{x_\beta \mid \beta<\alpha\}]$, $\alpha\in A$. Система $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ образует открытое покрытие X мощности $\leq\theta$. Из покрытия $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ выбираем конечное покрытие X мощности $\leq\theta$. Из покрытия $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ выбираем конечное покрытие

* Пространство X называется θ-к о п а к т н ы м, если любое его открытое покрытие мощности $\leq\theta$ содержит конечное покрытие.

$\{U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}\}$ пространства X. Если $\alpha_0 \geq \alpha_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, то $x_\beta \notin X$ при $\beta > \beta_0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Предложение 5.3. Пусть X—θ-о-метризуемое пространство и Y—регулярное сильно θ-о-метризуемое θ-компактное пространство. Тогда пространство $Z = X \times Y$ θ-о-метризуемо.

Доказательство. Пусть $\rho_1: X \times X \to E_1$ — θ-о-метрика над θ-М-шкалой (E_1, o_1, V_{E_1}) и $\rho_2: Y \times Y \to E_2$ — сильная θ-о-метрика над θ-М-шкалой (E_2, o_2, V_{E_2}). Рассмотрим θ-М-шкалу

$$(E, o, V_E) = \prod_{i=1}^{2} (E_i, o_i, V_{E_i})$$

и θ-о-метрику $\rho: Z \times Z \to E$, где $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \{\rho_1(x_1, x_2) \rho_2(y_1, y_2)\}$. Покажем, что τ_ρ совпадает с заданной на X топологией Пусть L — незамкнутое подмножество Z. Если для некоторой точки $x \in X$ множество $(\{x\} \times Y) \cap L$ не замкнуто в $\{x\} \times Y$, то легко найти точку $z \in Z \setminus L$, для которой $\rho(z, L) = o$. Пусть множество $(\{x\} \times Y) \cap L$ замкнуто в $\{x\} \times Y$ для любой точки $x \in X$. Найдутся точка $z = (x, y) \in [L] \setminus L$ и окрестность Oy точки y в Y, для которых $(X \times [Oy]) \cap L \cap (\{x\} \times Y) = \emptyset$. Положим $L_1 = L \cap (X \times [Oy])$. Тогда множество $\pi_X L_1$ не замкнуто в X. Поэтому $\rho_1(x_0, \pi_X L_1) = o_1$ для некоторой точки $x_0 \in X \setminus \pi_X L_1$. Для любого $v \in V_{E_1}$ фиксируем такие точки $x_v \in \pi_X L$ и $y_v \in Y$, что $\rho_1(x_0, x_v) \in v$ и $(x_v, y_v) \in L_1$. По лемме 5.1 найдется $y_0 \in [Oy]$ такая, что для любых Oy_0 и $v \in V_{E_1}$ существует $w \in V_{E_1}$, для которого $y_w \in Oy_0$ и $w \subseteq v$. Точка (x_0, y_0) такова, что $\rho[(x_0, y_0), L] = o$ и $(x_0, y_0) \in Z \setminus L$.

§ 6. Произведение конечного числа о-метризуемых пространств

Пусть $\{\{X_i, \rho_i, (E, o, V_E)\} \mid i=1, 2, \cdots, n\}$ — конечное семейство о-метрических пространств над М-шкалой* (E, o, V_E). Положим

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i .$$

На множестве X рассмотрим о-метрику

$$\rho_\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (x_i, y_i)$$

* В этом параграфе предполагается, что операция „+" в E ассоциативна и коммутативна.

для любых двух точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества X. Имеет место

Предложение 6.1. а) Если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ удовлетворяют аксиоме (С), то и о-метрика ρ_Σ удовлетворяет аксиоме (С).
б) Если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ неотрицательны и удовлетворяют аксиоме (T_1) или (T_2), то и о-метрика ρ_Σ неотрицательна и удовлетворяет той же аксиоме.
в) Если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ неотрицательны и удовлетворяют некоторому условию (АН), (рП), (П), то и ρ_Σ удовлетворяет тому же условию.
г) Если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ удовлетворяют аксиоме (Δ), то и ρ_Σ удовлетворяет аксиоме (Δ).

Доказательство. а) Очевидно.
б) Если о-метрики $\rho_1, \cdots, \rho_n$ удовлетворяют аксиоме (T_1), то, очевидно, что и ρ_Σ удовлетворяет аксиоме (T_1). Пусть $\rho_1, \cdots, \rho_n$ удовлетворяют аксиоме (T_2) и $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Существуют число i и $v \in V_E$, для которых $O_v^{\rho_i} x_i \cap O_v^{\rho_i} y_i = \varnothing$. Далее, существует v-заполненный элемент $w \in V_E$. Покажем, что $O_w^{\rho_\Sigma} x \cap O_w^{\rho_\Sigma} y = \varnothing$. Заметим, что для любых точек $x'=(x_1', \cdots, x_n')$, $y'=(y_1', \cdots, y_n')$ имеем $o \leq \rho_j(x_j', y_j') \leq \rho_\Sigma(x', y')$, где $j=1, 2, \cdots, n$. Этот факт вытекает из аксиомы 3 М-шкал и неотрицательности о-метрик $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_n$ Поэтому, если $z=(z_1, \cdots, z_n) \in O_w^{\rho_\Sigma} x \cap O_w^{\rho_\Sigma} y$, то $\rho(x, z), \rho(y, z) \in w$, $o \leq \rho_i(x_i, z_i) \leq \rho(x, z)$ и $o \leq \rho(y_i, z_i) \leq \rho(y, z)$. Следовательно, $\rho_i(x_i, z) \in V$ и $\rho_i(y_i, z_i) \in V$, то есть $z_i \in O_v^{\rho_i} x_i \cap O_v^{\rho_i} y_i$. Значит $O_w^{\rho_\Sigma} x \cap O_w^{\rho_\Sigma} y = \varnothing$
в) Проверим утверждение, относящееся к условию (АН). Пусть $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $v \in V_E$. Выбираем элемент $v_1 \in V_E$, для которого $nv_1 \subseteq v$. По условию, найдется элемент $w_1 \in V_E$ такой, что для любого $i=1, 2, \cdots, n$ имеем: если $y_i, z_i \in O_w^{\rho_i} x_i$, то $z_i \in O_{w_1}^{\rho_i} y_i$. Пусть елемент $w \in V_E$ w_1-заполнен и $y=(y_1, \cdots, y_n)$, $z=(z_1, \cdots, z_n) \in O_w^{\rho_\Sigma} x$. Тогда $y_i, z_i \in O_{w_1}^{\rho_i} x_i$ для любого $i=1, 2, \cdots, n$. Следовательно $z_i \in O_{v_i}^{\rho_i} y_i$. Тогда

$$\rho_\Sigma(y, z) = \prod_{i=1}^{n} \rho_i(y_i, z_i) \in nv_1 \subseteq v.$$

г) Докажем для $n=2$. Пусть о-метрики ρ_1, ρ_2 удовлетворяют аксиоме (Δ) и $x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2), z=(z_1, z_2) \in X=X_1 \times X_2$. Тогда по аксиоме 3 М-шкал имеем $\rho_\Sigma(x, z)=\rho_1(x_1, z_1)+\rho_2(x_2, z_2) \leq (\rho_1(x_1, y_1)+\rho_1(y_1, z_1)] + (\rho_2(x_2, y_2)+\rho_2(y_2, z_2)) = \rho_\Sigma(x, v)+\rho_\Sigma(y, z)$.
Предложение доказано.

Предложение 6.2. Пусть о-метрики $\rho_i: X_i \times X_i \to E$, где $i=1, 2, \ldots, n$, неотрицательны. Тогда о-метрики ρ_p и ρ_Σ равномерно эквивалентны.

Доказательство проведем для $n=2$. Напомним, что

$$\rho_p(x, y)=(\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)) \in E\times E,$$

$$\rho_\Sigma(x, y)=\rho_1(x_1, y_1)+\rho_2(x_2, y_2) \in E$$

для любых $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2) \in X=X_1\times X_2$. Пусть $v_1 \in V_E$. Тогда существует элемент $w \in V_E$, для которого $w+w\subseteq v_1$. Положим $w_2=w\times w \in V_{E\times E}$. Если $\rho_p(x, y) \in w_2$, то $\rho_1(x_1, y_1) \in w$ и $\rho_2(x_2, y_2) \in w$. Поэтому $\rho_\Sigma(x, y)=\rho_1(x_1, y_1)+\rho_2(x_2, y_2) \in w+w\subseteq v$. Это означает, что $O^{\rho_p}_{w_2} x\subseteq O^{\rho_e}_{v_1} x$ для любой точки $x=(x_1, x_2) \in X$.

Пусть $v_2=v_1'\times v_2' \in V_{E\times E}$. Найдется элемент $w_1 \in V_E$, который, одновременно v_1'-заполнен и v_2'-заполнен. Пусть $\rho_\Sigma(x, y) \in w_1$. Тогда $\rho_1(x_1, y_1) \in v_1'$ и $\rho_2(x_2, y_2) \in v_2'$, то есть $\rho_p(x, y) \in v_2$. Это означает что $O^{\rho_\Sigma}_{w_1} x\subseteq O^{\rho}_{v_2}, x$ для любой точки $x \in X$. Предложение доказано.

Мы знаем, что любую шкалу можно превратить в М-шкалу таким образом, что все элементы будут неотрицательны и операция „+" будет ассоциативной и коммутативной. Теорема 5.1 в совокупности с предложением 6.2 позволяет нам получить

Теорема 6.1. Пусть топологические пространства $X_1, X_2, \ldots, X_n$ о-метризуемы сильными о-метриками $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ над шкалой (E, o, V_E). Тогда пространство $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ сильно о-метризуемо такой о-метрикой ρ над шкалой (E, o, V_E), что:

1) если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ удовлетворяют одной из аксиом (T_1) (T_2), (С), то и ρ удовлетворяет той же аксиоме;

2) если о-метрики $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ удовлетворяют одному из условий (АН), (рП), (П), то и ρ удовлетворяет тому же условию.

Теорема 6.2. Если пространства $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Δ-метризуемы над М-шкалой (E, o, V_E), то и пространство $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ Δ-метризуемо над М-шкалой (E, o, V_E).

Теорема 6.3. Если пространства $X_1, X_2, \ldots, X_n$ метризуемы над М-шкалой (E, o, V_E), то и пространство $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ метризуемо над М-шкалой (E, o, V_E).

§ 7. Симметризуемые пространства

Система $\{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X называется слабо дискретной если любая система точек вида $\{x_\alpha \in P_\alpha \mid \alpha \in A\}$ дискретна в X. Заметим, что любая слабодискретная система множеств дизъюнктна.

Теорема 7.1. В любое открытое покрытие θ-симметризуемого пространства можно вписать θ-слабодискретное* покрытие.

Доказательство. Пусть $\rho: X\times X\to R^{\theta}$ — θ-симметрика на X и $\omega=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ — открытое покрытие T_1 — пространства X, причем множество A вполне упорядочено порядком „$\leq$". Для любого $v\in V_\theta$ и каждого $\alpha\in A$ положим $M_\alpha^v=\{x\in X \mid x\in U_\alpha\setminus\cup\{U_\beta<\alpha\}, O_v^\rho x\subseteq U_\alpha\}$. Покажем, что при каждом фиксированном $v\in V_\theta$ семейство множеств $\omega_v=\{M_\alpha^v \mid \alpha\in A\}$ слабодискретно. Для этого покажем сначала, что семейство ω_v ρ-дискретно, то есть для любого $x\in X$ съществует $w\in V_E$ такой, что $O_w^\rho x$ пресекается не более, чем с одним элементом семейства ω_v. Итак' пусть $x\in X$ и α_0 — первый элемент из A, для которого $x\in U_{\alpha_0}$. Так как множество U_{α_0} открыто в X, то $O_w^\rho x\subseteq U_{\alpha_0}$ для некоторого $w\in V_E$ и $w\subseteq v$. Предположим теперь, что $O_w^\rho x\cap M_\beta^v\neq\emptyset$ для некоторого $\beta\in A$. Если допустим, что $\beta>\alpha_0$, то придем к противоречию, так как в этом случае

$$O_w^\rho x\cap M_\beta^v\subseteq U_{\alpha_0}\cap M_\beta^v\subseteq U_{\alpha_0}\cap(U_\beta\setminus\cup\{U_\alpha \mid \alpha<\beta\})\subseteq U_{\alpha_0}\cap(U_\beta\setminus U_{\alpha_0})=\emptyset.$$

Допустим теперь, что $\beta<\alpha_0$. Тогда, выбирая точку $y\in O_w^\rho x\cap M_\beta^v$, получим $x\in O_w^\rho y\subseteq U_\beta$, что противоречит включения $x\in U_{\alpha_0}\setminus U_\beta$. Итак, $O_w^\rho x$ может пересекаться только с $M_{\alpha_0}^v$, то есть семейство ω_v ρ-дискретно.

Пусть теперь $p: Z\times Z\to R^{\theta_1}$ — о-метрика на T_1-пространстве Z и семейство $\{M_\alpha \mid \alpha\in A\}$ p-дискретно. Пусть, далее, для каждого $\alpha\in A$ фиксированна точка $z_\alpha\in M_\alpha$. Допустим, что семейство $\{z_\alpha \mid \alpha\in A\}$ не дискретно в Z. Тогда для некоторого подмножества $A_1\subseteq A$ множество $L=\{z_\alpha \mid \alpha\in A_1\}$ не замкнуто в Z. Поэтому имеется точка $z\in Z\setminus L$ такая, что множество $O_v^p z\cap L$ бесконечно для любого $v\in V_{\theta_1}$, что противоречит p-дискретности семейства $\{M_\alpha \mid \alpha\in A\}$.

Таким образом, семейства ω_v $(v\in V_\theta)$ слабодискретны. Теперь покажем, что они покрывают X. Пусть $x\in X$ и α_0 — первый элемент из A, для которого $x\in U_{\alpha_0}$. Так как U_{α_0} открыто, то $O_v^\rho x\subseteq U_{\alpha_0}$ для некоторого $v\in V_\theta$. Следовательно, $x\in M_\alpha^v$. Теорема доказана.

Лемма 7.1 Пусть T_1-пространство X θ-симметризуемо и множество U открыто в X. Если семейство множеств $\{M_\alpha\subseteq U \mid \alpha\in A\}$ слабодискретно в точках множества U, то съществует семейство $\{M_\alpha^v \mid \alpha\in A, v\in V_\theta, \operatorname{card} V_\theta=\theta\}$ со следующими свойствами:

1. $M_\alpha=\cup\{M_\alpha^v \mid v\in V_\theta\}$ для каждого $\alpha\in A$;
2. семейство $\{M_\alpha^v \mid \alpha\in A\}$ слабодискретно в X для любого $v\in V_\theta$.

Доказательство. Пусть $\rho: X\times X\to R^{\theta}$ — θ-симметрика на X. Для любых $v\in V_\theta$ и $\alpha\in A$ положим $M_\alpha^v=M_\alpha\setminus O_v^\rho(X\setminus U)$. Семейство $\{M_\alpha^v \mid \alpha\in A, v\in V_\theta\}$ искомое.

* Система называется θ-слабодискретной, если она является объединением θ слабодискретных подсистем

Из предложения 4.2, теоремы 7.1 и леммы 7.1 вытекает

Следствие 7.1. В любую систему $\omega=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ открытых подмножеств θ-симметризуемого T_1-пространства X можно вписать θ-слабодискретное семейство множеств, покрывающее тело $\cup\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ системы ω.

Следствие 7.2. Для любого θ-симметризуемого T_1-пространства X и любого кардинального числа $\theta_1\geqq\theta$ следующие условия равносильны:

1. Пространство X (θ_1, ∞)-компактно*.
2. Пространство X наследственно (θ_1, ∞)-компактно.
3. Для любого $X_1\subseteq X$ число Суслина** $sX_1\leqq\theta_1$.
4. Мощность любой дискретной системы подмножеств любого подпространства $X_1\subseteq X$ не превосходит θ_1.

В частности получаем

Следствие 7.3. Пусть X — θ-симметризуемое T_1-пространство и θ_1 — некоторое кардинальное число $\geqq\theta$. Если для каждого $X_1\subseteq X$ плотность*** $dX_1\leqq\theta_1$, то X (θ_1, ∞)-компактно.

Следствие 7.4. Любое θ-компактное θ-симметризуемое T_1-пространство бикомпактно.

Теорема 7.2. Пусть пространство X θ-симметризуемо некоторой симметрикой, удовлетворяющей условию (cK). Тогда для любого $\theta_1\geqq\theta$ следующие условия эквивалентны;

1. X (θ_1, ∞)-компактно.
2. X наследственно (θ_1, ∞)-компактно.
3. В каждом подпространстве $X_1\subseteq X$ мощность любой дискретной системы точек не превосходит θ_1.
4. $sX_1\leqq\theta_1$ для любых $X_1\subseteq X$.
5. $dX_1\leqq\theta_1$ для любых $X_1\subseteq X$.

Доказательство. $5\longrightarrow 1$. Вытекает из следствия 7.3 и леммы 2.1.

$1\longrightarrow 2\longrightarrow 3\longrightarrow 4$. Вытекает из следствия 7.2 и леммы 2.1.

$4\longrightarrow 5$. Пусть $X_1\subseteq X$ и $\rho: X\times X\longrightarrow R^\theta$ — θ-симметрика с условием (cK). Во-первых, для каждого $v\in V_\theta$ построим множество точек $M_v=\{x_\alpha\in X_1 \mid \alpha\in A\}$ такое, что

1. A вполне упорядочено,
2. $X\subseteq\cup\{O_v^\rho x_\alpha \mid \alpha\in A\}$,
3. $x_\alpha\in X_1\setminus\cup\{O_v^\rho x_\beta \mid \beta<\alpha\}$.

Такое множество легко строится по трансфинитной индукции. Поскольку $\rho(x_\alpha, x_\beta)\notin v$ для любых $\alpha, \beta\in A$ и $\alpha\neq\beta$, то множество M_v дискретно, в силу условия (cK). Следовательно, $\operatorname{card} M_v\leqq\theta_1$ для любого $v\in V_E$. Положим $M=\cup\{M_v \mid v\in V_\theta\}$ и покажем, что $[M]_{X_1}=X_1$. Пусть $x\in X_1$ и Ox — произвольная окрестность точки x в X_1. Для не-

---

* Т. е. каждое открытое покрытие пространства X содержит покрытие мощности $\leqq\theta_1$.

** $sX=\sup\{\operatorname{card}\gamma \mid \gamma$ -дизъюнктное семейство открытых подмножеств X$\}$.

*** $dX=\min\{\operatorname{card} X' \mid [X']_X=X\}$.

которого $v \in V_E$ имеем $O_v^o x \cap X_1 \subseteq Ox$. Тогда существует такая точка $x_\alpha \in M_v$, что $x \in O_v^o x_\alpha$. Поскольку $\rho(x, x_\alpha) = \rho(x_\alpha, x)$, то $x_\alpha \in O_v^o x \cap X_1 \subseteq Ox$.

§ 8. Бисети и сильные симметрики

Семейство пар $\{(P'_\alpha, P''_\alpha)\ \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X называется бисетью на X, если:

1. $[P'_\alpha] \subseteq P''_\alpha$ для любого $\alpha \in A$;
2. для любых точки $x \in X$ и ее окрестности Ox в X существует такой $\alpha \in A$, что $x \in P'_\alpha \subseteq P''_\alpha \subseteq Ox$.

Бисеть $\{(P'_\alpha, P''_\alpha)\ \alpha \in A\}$ называется θ-r-консервативной, если $A = \cup\{A_\beta\ \beta \in B \operatorname{card} B \leq \theta\}$ и для любых $\beta \in B$ и $A' \subseteq A_\beta$ имеем $[\cup\{P'_\alpha\ \alpha \in A'\}] \subseteq \cup\{P''_\alpha\ \alpha \in A'\}$. Семейства типа $\{(P'_\alpha, P''_\alpha)\ \alpha \in A_\beta\}$ будем называть r-консервативными.

Замечание 8.1. Всякая бисеть θ-r-консервативна для некоторого θ.

Лемма 8.1. Топологическое пространство X обладает бисетью тогда и только тогда, когда любое открытое в X множество является объединением замкнутых в X множеств.

Доказательство. Если $\{(P'_\alpha, P''_\alpha)\ \alpha \in A\}$ — бисеть в X и U открыто в X, то $U = \cup\{[P'_\alpha]\ \alpha \in A$ и $P''_\alpha \subseteq U\}$. Пусть любое открытое в X множество является объединением замкнутых в X множеств. Семейство $\{(F, U) \mid F \subseteq U$, F замкнуто и U открыто в $X\}$ образует бисеть в пространстве X.

Следствие 8.2. Любое T_1-пространство обладает бисетью.

Замечание 8.2. Если пространство X обладает θ-r-консервативной бисетью, то всякое замкнутое в X множество является G_θ-множеством, то есть пересечением θ открытых в X множеств, а всякое открытое в X множество является F_θ — множеством.

Лемма 8.2. Если пространство X обладает замкнутой сетью*, то X обладает бисетью. Если X обладает θ-консервативной сетью, то X обладает и θ-r-консервативной бисетью.

Действительно, если семейство множеств $S = \{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — замкнутая сеть в X, то семейство пар $\{(P_\alpha, P_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ является нужной нам бисетью.

Лемма 8.3. Если пространство X является объединением некоторого множества своих замкнутых подпространств, каждое из которых обладает бисетью, то и пространство X обладает бисетью; если

* Система S подмножеств пространства X называется сетью в X, если для любых x и Ox — точки и ее окрестности в X - найдется $P \in S$, для которого $x \in P \subseteq Ox$. Понятие сети ввел А. В. Архангельский [11]. Очевидно, что понятие бисети является естественным обобщением понятия сети.

X является объединением не более чем θ своих замкнутых подпространств, каждое из которых обладает θ-r-консервативной бисетью то θ-r-консервативной бисетью обладает и X.

Доказательство. Пусть $X=\cup\{F_\alpha \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leqq\theta\}$ и $\{(P'_{\alpha\gamma}, P''_{\alpha\gamma}] \gamma\in\Gamma_\alpha\}$ — θ-r-консервативная бисеть в замкнутом подпространстве F_α. Тогда семейство $\{(P'_{\alpha\gamma}, P''_{\alpha\gamma}) \mid \alpha\in A, \gamma\in\Gamma_\alpha\}$ образует θ-r-консервативную бисеть в X.

Теорема 8.1. Пусть $f: X\to Y$ — замкнутое непрерывное отображение пространства X на Y. Если X обладает θ-r-консервативной бисетью, то и Y обладает θ-r-консервативной бисетью.

Доказательство. Пусть $\{(P'_\alpha, P''_\alpha) \mid \alpha\in A=\cup\{A_\beta \mid \beta\in B\}, \operatorname{card} B\leqq\theta\}$ — θ-r-консервативная бисеть в X, то есть для любых $\beta\in B$ и $A'\subseteq A_\beta$ имеем $[\cup\{P'_\alpha \mid \alpha\in A'\}]\subseteq\cup\{P''_\alpha \mid \alpha\in A'\}$. Рассмотрим в Y семейство пар $\Omega=\{(fP'_\alpha, fP''_\alpha) \mid \alpha\in A\}$. Очевидно, что Ω является бисетью. Если $\beta\in B$ и $A'\subseteq A_\beta$ фиксированы, то, в силу замкнутости отображения f имеем $f[\cup\{P'_\alpha \mid \alpha\in A'\}]=[\cup\{fP'_\alpha \mid \alpha\in A'\}]\subseteq\cup\{fP''_\alpha \mid \alpha\in A'\}$. Теорема доказана.

Теорема 8.2. Произведение не более, чем θ пространств с θ-r-консервативными бисетями обладает θ-r-консервативной бисетью.

Доказательство. Пусть $X=\Pi\{X_\alpha \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leqq\theta\}$ и пусть $\{(P'_{\alpha\beta}, P''_{\alpha\beta}) \mid \beta\in B_\alpha\}$ — θ-r-консервативная бисеть в X_α, $\alpha\in A$. Для каждого конечного набора $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in A$ положим $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=\{(\Phi'_\gamma, \Phi''_\gamma) \mid \gamma\in\prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}\}$ где $\gamma=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\Phi'_\gamma=\prod_{i=1}^{n} P'_{\alpha_i\beta_i}\times\Pi\{X_\alpha \mid \alpha\in A\setminus\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}\}$ и $\Phi''_\gamma=\prod_{i=1}^{n} P''_{\alpha_i\beta_i}\times\Pi\{X_\alpha \mid \alpha\in A\setminus\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}\}$. Семейство $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ по построению r-консервативно. Поскольку $\omega=\cup\{\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n\in A\}$ является бисетью (по определению тихоновской топологии в X) и ω является объединением не более чем θ-r-консервативных семейств, то теорема доказана.

Предложение 8.1. Любое подпространство пространства с θ-r-консервативной бисетью обладает θ-r-консервативной бисетью.

Теорема 8.3. Пусть пространство X обладает θ-r-консервативной бисетью. Тогда в любое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое θ-дискретное покрытие.

Доказательство. Пусть $\omega=\{U_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ — некоторое открытое покрытие пространства X, и допустим, что множество Λ вполне упорядочено. Пусть $\Omega=\{(P'_\alpha, P''_\alpha) \mid \alpha\in\cup\{A_\beta \mid \beta\in B\}, \operatorname{card} B\leqq\theta\}$ — бисеть в X, где для любого $\beta\in B$ семейство $\{(P'_\alpha, P''_\alpha) \mid \alpha\in A_\beta\}$ r-консервативно, то есть $[\cup\{P'_\alpha \mid \alpha\in A'\}]\subseteq\cup\{P''_\alpha \mid \alpha\in A'\}$ для любого $A'\subseteq A_\beta$. Для каждого $\beta\in B$ положим $\omega_\beta=\{H^\beta_\lambda=[\cup\{P'_\alpha \mid \alpha\in A_\beta, P''_\alpha\subseteq U_\lambda\}]\setminus U_\mu \mid \mu<\lambda\} \mid \lambda\in\Lambda\}$. Очевидно, что всякое семейство ω_β состоит из замкнутых множеств и вписано в ω. Поскольку $U_\lambda\setminus[\cup\{P'_\alpha \mid \alpha\in A_\beta, P''_\alpha\subseteq\cup\{U_\mu \mid \mu<\lambda\}\}]$ пересека-

ется не более, чем с одним элементом из ω_β (а именно с H_λ^β), то семейство ω_β дискретно для любого $\beta \in B$. Покажем теперь, что $\omega' = \cup\{\omega_\beta \mid \beta \in B\}$ покрывает X. Пусть $x \in X$ и λ_0 — первый элемент Λ такой, что $x \in U_{\lambda_0}$. Так как Ω является бисетью, то для некоторых $\beta_0 \in B$ и $\alpha_0 \in A_{\beta_0}$ $x \in P'_{\alpha_0} \subseteq P''_{\alpha_0}, \subseteq U_{\lambda_0}$, откуда заключаем, что $x \in H_{\lambda_0}^{\beta_0}$. Теорема доказана.

Из теоремы 8.3, замечания 8.2 и предложения 8.1 вытекает

Следствие 8.2. Во всякую систему γ открытых множеств пространства X с θ-r-консервативной бисетью можно вписать θ-дискретную в X систему замкнутых множеств, покрывающих тело системы γ.

Теорема 8.4. Следующие свойства для пространства X с θ-r-консервативной бисетью и любого кардинального числа $\theta_1 \geqq \theta$ эквивалентны:

1. X (θ_1, ∞)-компактно.
2. X-наследственно (θ_1, ∞)-компактно.
3. Для любого $X_1 \subseteq X$ число Суслина $sX_1 \leqq \theta$.
4. Мощность любой дискретной системы подмножество любого подпространства X_1 пространства X не превосходит θ_1.
5. Для любого $X_1 \subseteq X$ плотность $dX_1 \leqq \theta_1$.

Доказательство будем проводить в следующем порядке:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2 \to 5 \to 1$$

$1 \to 2$. Вытекает из того, что любое открытое подмножество X является F_θ-множеством и (θ_1, ∞)-компактность наследственна по замкнутым подмножествам.

Импликации $2 \to 3$ и $3 \to 4$ очевидны.

$4 \to 1$. Вытекает из теоремы 8.3.

$2 \to 5$. Система $\gamma_\beta = \{O_\beta x = X \setminus [\cup\{P'_\alpha \ \alpha \in A_\beta, P''_\alpha \not\ni x\}] \mid x \in X_1\}$ образует открытое покрытие пространства X_1. Поскольку (θ_1, ∞)-компактно, то γ_β содержит подпокрытие $\varphi_\beta = \{O_\beta x_\mu \mid \mu \in M_\beta, \operatorname{card} M_\beta \leqq \theta_1\}$ мощности θ_1. Рассмотрим множество $L = \{x_\mu \mid \mu \in M_\beta, \beta \in B\}$. Ясно, что $\operatorname{card} L \leqq \theta_1$. Докажем, что множество L всюду плотно в X_1. Пусть x и Ox — точка и ее окрестность в X_1. По условиям, найдутся $\beta \in B$ и $\alpha \in A_\beta$ такие, что $x \in P'_\alpha \cap X_1 \subseteq P''_\alpha \cap X_1 \subseteq Ox$. Так как φ_β покрывает X_1, то $x \in O_\beta x_\mu$ для некоторого $\mu \in M_\beta$. Следовательно, $x_\mu \in P''_\alpha \cap X_1 \subseteq Ox$. Тем самым доказано, что множество L всюду плотно в X_1 и, так как $\operatorname{card} L \leqq \theta_1$, то $dX_1 \leqq \theta_1$.

$5 \to 1$. Вытекает из теоремы 8.3.

Предложение 8.2. Пусть $f: X \to Y$ — открытое конечнократное* отображение T_2-пространства X на пространство Y с θ-r-консервативной бисетью. Тогда существует такая система $\{X_\mu \mid \mu \in M, \operatorname{card} M \leqq \theta\}$ замкнутых подмножеств пространства X, что:

---

* Отображение $f: X \to Y$ конечнократно, если для любого $y \in Y$ множество $f^{-1} y$ конечно. Если для любого $y \in Y$ $f^{-1} y$ состоит ровно из n элементов, то отображение f называется строго n-кратным.

1. Множество fX_μ замкнуто в Y для любого $\mu \in M$.
2. $X = \cup\{X_\mu \mid \mu \in M\}$.
3. $f \mid X_\mu$ — гомеоморфизм для любого $\mu \in M$.

Доказательство. Положим $Y_n = \{y \in Y \mid f^{-1}y$ состоит ровно из n точек$\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Кроме того $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ замкнуто в Y для любого $n = 1, 2, \ldots$ (см. теорему 1 из [4]). Следовательно, всякое Y_n является F_θ-множеством, то есть $Y_n = \cup\{H_\alpha^n \mid \alpha \in A_n, \operatorname{card} A_n \leq \theta\}$, $n = 1, 2, \ldots$, где множества H_α^n замкнуты в Y. Положим $K_\alpha^n = f^{-1} H_\alpha^n$ и $f_{n_\alpha} = f \mid K_\alpha^n$. Отображения f_{n_α} открыты и строго n-кратны. Нам достаточно доказать теперь предложение 8.2 для случая, когда f строго n-кратно, для некоторого натурального числа n. В таком случае $f_y^{-1} = \{x_y^i, i = 1, \ldots, n\}$ для любой точки $y \in Y$. Кроме того, для каждой точки $y \in Y$ существуют такие окрестности Oy и Ox_y^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что:

а) $fOx_y^i = Oy$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

б) $Ox_y^i \cap Ox_y^j = \varnothing$, если $i \neq j$,

в) $f \mid Ox_y^i$-гомеоморфизм.

Система $\omega = \{Oy \mid y \in Y\}$ образует открытое покрытие пространства Y. По теореме 4.5 в ω можно вписать замкнутое θ-дискретное покрытие $\{F_\alpha^\beta \mid \alpha \in A_\beta, \beta \in B, \operatorname{card} B \leq \theta\}$. Для каждого $\alpha \in A_\beta$ существует точка $y_{\alpha\beta} \in Y$ такая, что $F_\alpha^\beta \subseteq Oy_{\alpha\beta}$. Положим $M_\alpha^{\beta i} = f^{-1} F_\alpha^\beta \cap Ox_{y_{\alpha\beta}}^i$ и $X_\beta^i = \cup\{M_\alpha^{\beta i} \mid \alpha \in A_\beta\}$. Множества $\{X_\beta^i \mid \beta \in B, i = 1, 2, \ldots\}$ искомые.

Теорема 8.5. Пусть $f: X \to Y$ открытое конечнократное отображение T_2-пространства X на Y. Тогда пространство X обладает θ-r-консервативной бисетью в том и только в том случае, если пространство Y обладает θ-r-консервативной бисетью.

Доказательство. Пусть пространство Y обладает θ-r-консервативной бисетью. Тогда, в силу леммы 8.3 и предложения 8.2, и X обладает θ-r-консервативной бисетью.

Предположим теперь, что пространство X обладает θ-r-консервативной бисетью. Тогда всякое открытое в X множество является F_θ — множеством. Поскольку отображение f открыто и конечнократно, то и всякое открытое в Y множество является F_θ-множеством. Положим $Y_n = \{y \in Y \mid f_y^{-1}$ состоит равно из n точек$\}$. Как мы заметили при доказательстве предложения 8.2, $Y_n = \cup\{F_\alpha^n \mid \alpha \in A_n, \operatorname{card} A_n \leq \theta\}$ и множества F_α^n замкнуты в Y. Положим $K_\alpha^n = f^{-1} F_\alpha^n$ и $f_{n_\alpha} = f \mid K_\alpha^n$. Отображение f_{n_α} строго n-кратно и открыто $(\alpha \in A_n, n = 1, 2, \ldots)$, поэтому оно совершенно (см. [12]). По теореме 8.1 всякое подпространство F_α^n обладает θ-r-консервативной бисетью. Лемма 8.3 завершает доказательство.

Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X в Y и ω — открытое покрытие пространства X. Отображение f называется

ω-отображением, если существует открытое семейство ω_1 пространства Y такое, что $f^{-1}\omega_1=\{f^{-1}U \mid U\in\omega_1\}$ вписано в ω и покрывает X.

Замечание 8.3. Если $f:X\to Y$ — ω-отображение, то $fx\neq fy$ как только $y\notin\omega x$. Именно это свойство ω-отображений мы будем использовать в дальнейшем.

Предложение 8.3. Пусть X — коллективно-нормальное пространство с θ-r-консервативной бисетью. Тогда для любого открытого в X покрытия ω существует непрерывное ω-отображение $f_\omega:X\to Y_\omega$ в θ-метризуемое пространство Y_ω.

Доказательство. Пусть $\omega=\{U\}$ — открытое покрытие пространства X. По теореме 8.3 в ω можно вписать θ-дискретное замкнутое покрытие $\gamma=\{\gamma_\alpha=\{F^\alpha_\beta \mid \beta\in B_\alpha\}\mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$, где всякое γ_α дискретно. В силу коллективной нормальности X для каждого $\alpha\in A$ существует дискретная в X система $\varphi_\alpha=\{U^\alpha_\beta \mid \beta\in B_\alpha\}$ открытых множеств такая, что для любого $\beta\in B_\alpha$ имеем $F^\alpha_\beta\subseteq U^\alpha_\beta\subseteq U$ для некоторого $U\in\omega$. Пусть M — некоторое множество. Через $C(M)$ обозначим совокупность всех таких неотрицательных функций f на M, что множество $M_f=\{x\in M \mid fx\neq 0\}$ конечно для любого $f\in C(M)$. На множестве $C(M)$ вводим расстояние $\rho_M(f, g)=\sum\{|f(x)-g(x)| : x\in M\}$. Получаем $\mathbf{a}_0$ — метрическое пространство $\{C(M), \rho_M, R\}$.

Теперь для каждых $\alpha\in A$ и $\beta\in B_\alpha$ через $f_{\alpha\beta}(x)$ обозначим такую непрерывную на X функцию, что: а) $0\leq f_{\alpha\beta}(x)\leq 1$; б) $f_{\alpha\beta}(x)=0$ для любой точки $x\in X\setminus U^\alpha_\beta$; в) $f_{\alpha\beta}(x)=1$ для каждой точки $x\in F^\alpha_\beta$.

Рассмотрим отображения $f_\alpha:X\to C(B_\alpha)$, где $f_\alpha(x)=g^x_\alpha$ и $g^x_\alpha(\beta)=f_{\alpha\beta}(x)$ для любых $x\in X$ и $\beta\in B$. Поскольку системы φ_α дискретны, то отображения f_α непрерывны. Положим $G^\alpha_\beta=O^{\rho_{B_\alpha}}_{\frac{1}{2}}a^\alpha_\beta$, где

$$a^\alpha_\beta(\mu)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu=\beta;\\ 0, & \text{если } \mu\in B_\alpha\setminus\{\beta\}.\end{cases}$$

Легко заметить, что для любых $\alpha\in A$ и $\beta\in B_\alpha$ имеем $F^\alpha_\beta\subseteq f^{-1}_\alpha G^\alpha_\beta\subseteq U^\alpha_\beta$. Теперь рассмотрим отображение $f_\omega:X\to Y_\omega=\Pi\{C(B_\alpha)\mid\alpha\in A\}$, где $f_\omega x=\{f_\alpha x\}\in Y_\omega$ для любого $x\in X$. По определению, отображение f_ω непрерывно, а пространство Y_ω θ-метризуемо. Положим $H^\alpha_\beta=G^\alpha_\beta\times\Pi\{C(B_\lambda)\mid\lambda\in A\setminus\{\alpha\}\}$. Множества H^α_β открыты в Y_ω и $F^\alpha_\beta\subseteq f^{-1}_\omega H^\alpha_\beta\subseteq U^\alpha_\beta$ для любых $\alpha\in A$ и $\beta\in B_\alpha$. Следовательно, f_ω есть ω-отображение. Предложение доказано.

Из теоремы 8.2 и замечания 8.2 вытекает

Лемма 8.4. Пусть T_2-пространство X обладает θ-r-консервативной бисетью. Тогда диагональ $D(X)=\{(x, x)\mid x\in X\}$ является G_θ-множеством в $X\times X$, то есть существует семейство $\{\gamma_\alpha\mid\alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$ открытых покрытий X такое, что $\{x\}=\cap\{\gamma_\alpha x\mid\alpha\in A\}$ для любой точки $x\in X$.

Теорема 8.6. Коллективно нормальное пространство X с θ-r-

консервативной бисетью уплотняется на некоторое θ-метризуемое пространство.

Доказательство. На основании предыдущей леммы, в X существует семейство $\{\omega_\alpha | \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \theta\}$ открытых покрытий пространства X такое, что $\{x\} = \bigcap \{\omega_\alpha x | \alpha \in A\}$ для любой точки $x \in X$. В силу предложения 8.3, для каждого $\alpha \in A$ существует непрерывное ω_α-отображение $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ в θ метризуемое пространство Y_α. Рассмотрим отображение $f : X \to Y = fX \subseteq \Pi\{Y_\alpha | \alpha \in A\}$, где $fx = \{f_\alpha x\}$ для любой точки $x \in X$. Отображение f непрерывно, а пространство Y θ-метризуемо в силу теоремы 5.1. Покажем, что отображение f взаимно однозначно. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Тогда $y \notin \omega_\alpha x$ для некоторого $\alpha \in A$. На основании замечания 8.3, $f_\alpha x \neq f_\alpha y$. Следовательно, и $f(x) \neq f(y)$.

Теорема 8.7. Если пространство X с θ-r-консервативной бисетью обладает θg-сетью, то оно θ-симметризуемо.

Доказательство. В силу теоремы 4.1, пространство X θ-o-метризуемо, и пусть $\rho : X \times X \to R^\theta$ — некоторая θ-o-метрика на X. Пусть далее, $\{(P'_\alpha, P''_\alpha) | \alpha \in \cup\{\Lambda_\lambda | \lambda \in A\}, \operatorname{card} A \leq \theta\}$—$\theta$-$r$-консервативная бисеть на X. Для любой пары $(v, \lambda) \in V_\theta \times A$ и любого $x \in X$ положим $F^\lambda_v x = O^\rho_v x \setminus [\cup\{P'_\alpha | \alpha \in \Lambda_\lambda, x \notin P''_\alpha\}]$. Легко проверить, что семейство множеств $\varphi = \{F^\lambda_v x | x \in X, (v, \lambda) \in V_\theta \times A\}$ является θg-сетью в λ. Для любых $x, y \in X$ и каждой пары $(v, \lambda) \in V_\theta \times A$ положим

$$d^\lambda_v(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } (\{y\} \cap F^\lambda_v x) \cup (\{x\} \cap F^\lambda_v y) \neq \varnothing, \\ 1, \text{ если } (\{y\} \cap F^\lambda_v x) \cup (\{x\} \cap F^\lambda_v y) = \varnothing. \end{cases}$$

Покажем, что отображение $d = \{d^\lambda_v\} : X \times X \to \Pi\{R_{(v,\lambda)} | (v, \lambda) \in V_\theta \times A\} = R^{V_\theta \times A}$ является симметрикой на пространстве X. Пусть множество $F \subseteq X$ замкнуто и $x \notin F$. В этом случае существуют $v \in V_\theta$ и $\lambda \in A$ такие, что $O^\rho_v x \cap F = \varnothing$ и $x \in P'_\alpha \subseteq P''_\alpha \subseteq X \setminus F$ для некоторого $\alpha \in \Lambda_\lambda$. Поэтому $d^\lambda_v(x, F) = 1$, то есть $d[x, F] > 0$. Если F не замкнуто в X, то поскольку φ является θg-сетью, найдется $x \in X \setminus F$ такая, что $F^\lambda_v x \cap F \neq \varnothing$ для любой пары $(v, \lambda) \in V_\theta \times A$, то есть $d[x, F] = 0$. Теорема доказана. Заметим, что для любой пары $(v, \lambda) \in V_\theta \times A$ имеет место включение

$$O^{d^\lambda_v}_\varepsilon x \supseteq F^\lambda_v x \tag{3}$$

при любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Поэтому симметрика d сильная, как только сильной является о-метрика ρ.

Теорема 8.8. Топологическое пространство X тогда и только тогда сильно θ-симметризуемо, когда оно обладает θ-r-консервативной бисетью и характер каждой точки в X не превосходит θ.

Доказательство. В силу включения 3, достаточно доказать, что всякое сильно θ-симметризуемое пространство обладает θ-r-консервативной бисетью.

Пусть $\rho: X\times X\to R^{\theta}$ — сильная θ-симметрика на X. Тогда семейство пар $\{(O^{\rho}_{v}x\setminus O^{\rho}_{w}(X\setminus O^{\rho}_{v}x), O^{\rho}_{v}x) \mid x\in X, (v, w)\in V_{\theta}\times V_{\theta}\}$ является, очевидно, θ-r-консервативной бисетью на X.

Следствие 8.3. Всякое пространство с бисетью сильно θ-симметризуемо при некотором θ.

Следствие 8.4. Всякое T_1-пространство сильно θ-симметризуемо при некотором θ.

Следствие 8.5. Пусть $f: X\to Y$ — замкнутое непрерывное отображение сильно θ-симметризуемого пространства X на θ-о-метризуемое пространство Y. Тогда Y θ-симетризуемо. Если, кроме того, Y сильно θ-о-метризуемо, то Y сильно θ-симметризуемо.

Следствие 8.6. Открыто-замкнутый образ сильно θ-симметризуемого пространства сильно θ-симметризуем.

Следствие 8.7. Пусть $f: X\to Y$ — открытое конечнократное отображение сильно θ-о-метризуемого T_2-пространства X на Y. Пространство X сильно θ-симметризуемо тогда и только тогда, когда Y сильно θ-симметризуемо.

Следствие 8.8. Для любого сильно θ-симметризуемого пространства X и каждого кардинального числа $\theta_1\geqq\theta$ следующие условия эквивалентны:

1. $X(\theta_1, \infty)$ — компактно;
2. X наследственно (θ_1, ∞)-компактно;
3. $sX_1\leqq\theta_1$ для любого $X_1\subseteq X$;
4. $dX_1\leqq\theta_1$ для любого $X_1\subseteq X$.

Следствие 8.9. Любое коллективно нормальное сильно θ-симметризуемое пространство уплотняется на некоторое θ-метризуемое пространство.

§ 9. Измельчения

Пространство X обладает θ-измельчением, если существует такое семейство $\{\gamma_{\alpha} \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leqq\theta\}$ открытых покрытий пространства X, что для любых x и Ox — точки и ее окрестности в X — найдется $\alpha\in A$, для которого $\gamma_{\alpha}x\subseteq Ox$.

Теорема 9.1. Пространство X обладает θ-измельчением тогда и только тогда, когда X сильно θ-симметризуемо некоторой симметрикой, удовлетворящей условию (АН).

Доказательство. Пусть $\rho: X\times X\to R^{\theta}$ — сильная симметрика, удовлетворяющая условию (АН). Для каждого $v\in V_{\theta}$ положим $\gamma_v=\{U\subseteq X/U$ открыто и $\rho(x, y)\in v$ для любых $x, y\in U\}$. Поскольку ρ — сильная симметрика с условием (АН), то γ_v — открытое покрытие X для любого $v\in V_{\theta}$. Очевидно, что $\gamma_v x\subseteq O^{\rho}_{v}x$ для любых $x\in X$ и $v\in V_{\theta}$. Следовательно, система $\{\gamma_v \mid v\in V_{\theta}\}$ образует θ-измельчение на X.

Пусть $\{\gamma_{\alpha} \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leqq\theta\}$-$\theta$-измельчение в X. Для каждого $\alpha\in A$ и любых $x, y\in X$ положим

$$\rho_{\alpha}(x, y)=\begin{cases}1, & \text{если } y\notin\gamma_{\alpha}x,\\ 0, & \text{если } y\in\gamma_{\alpha}x.\end{cases}$$

Таким образом, мы построили сильную θ-симметрику $\rho=\{\rho_\alpha\}: X\times X\to \prod\{R_\alpha \alpha\in A\}\equiv R^\theta$. Покажем, что ρ удовлетворяет условию (АН). Пусть $x\in X$ и $v\in V_\theta$. Тогда

$$v\supseteq\prod_{i=1}^{n}(-\varepsilon_i,\ \varepsilon_i)\times\prod\{R_\alpha \alpha\in A\setminus\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}\},$$

где $0<\varepsilon_i\leq 1$ для любого $i=1,\ 2,\cdots,\ n$. Ясно, что

$$O_v^o\, z\supseteq\{y\in X\ \sum_{i=1}^{n}\rho_{\alpha_i}(z,\ y)=0\}$$

для любого $z\in X$. Фиксируем $U_i\in\gamma_{\alpha_i}$ для любого $i=1,\ 2,\cdots,\ n$ таким образом, что

$$x\in U=\bigcap_{i=1}^{n}U_i.$$

Существует $\alpha_0\in A$, для которого $\gamma_{\alpha_0}x\subseteq U$.

Кроме того, найдется $w\in V_\theta$ такой, что

$$w\subseteq\prod_{i=0}^{n}(-\varepsilon_i,\varepsilon_i)\times\prod\{R_\alpha\ \alpha\in A\setminus\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\},$$

где $\varepsilon_0=1$. Пусть $\{y,\ z\}\subseteq O_w^o\, x$. Тогда $\{y,z\}\subseteq U$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_{\alpha_i}(y,\ z)=0,$$

то есть $z\in O_v^o\, y$. Теорема доказана.

Предложение 9.1. Пусть $\rho: X\times X\to R^\theta$ — неотрицательная θ-о-метрика с условием (АН). Тогда θ-симметрика $d: X\times X\to R^\theta$, где $d(x,y)=\rho(x,\ y)+\rho(y,\ x)$, эквивалентна о-метрике ρ. Кроме того, симметрика d удовлетворяет условию (АН).

Доказательство. Поскольку $d(x,\ y)\geqq\rho(x,\ y)$, то для любой точки $x\in X$ и любого v-заполненного элемента $w\in V_\theta$ имеем $O_w^d\, x\subseteq O_v^o x$.

Пусть $v\in V_\theta$ и $x\in X$. По условию, существуют такие элементы v_1, $w\in V_\theta$, что если $y,\ z\in O_w^o\, x$, то $z\in O_{v_1}^o\, y$ и $w+v_1\subseteq v_1+v_1\subseteq v$. В частности, если $y\in O_w^o\, x$, то $x\in O_{v_1}^o\, y$. Пусть $\rho(x,\ y)\in w$. Тогда $\rho(y,\ x)\in v_1$. Поэтому $d(x,y)=\rho(x,\ y)+\rho(y,\ x)\in w+v_1\subseteq v$. Таким образом, $O_w^o\, x\subseteq O_v^d\, x$. Более того, если $y,z\in O_{w_1}^d\ x$, где w_1 w-запол-

нено, то $y, z \in O^{\rho}_{v} x$. Поэтому $\rho(y, z), \rho(z, y) \in V_1$. Следовательно, $d(y, z) \in v$, то есть $z \in O^{d}_{v} y$. Предложение доказано.

Следствие 9.1. Пусть X — сильно θ-о-метризуемо о-метрикой с условием (АН). Тогда X обладает θ-измельчением.

Теорема 9.2. Пусть X сильно θ-симметризуемо симметрикой d и θ-о-метризуемо о-метрикой ρ с условием (П). Тогда X обладает θ-измельчением.

Доказательство. Мы можем считать, что d и ρ являются отображениями в одно и то же θ-полуполе R'. На основании леммы 2.1, ρ является сильной о-метрикой. Для каждого $v \in V_\theta$ положим $\gamma_v = \{\mathrm{Int}\,(O^{d}_{v} x \cap O^{d}_{v} x \mid x \in X\}$. Пусть x и Ox — произвольные точка и ее окрестность в X. Найдется $v \in V_\theta$, для которого $O^{\rho}_{v} x \cup O^{d}_{v} x \subseteq Ox$. Выберем $w = w(v, x) \in V_\theta$ по условию (П) для ρ. Существует $w_1 \in V_\theta$ такой, что $w_1 \subseteq w$ и $O^{d}_{w_1} x \subseteq O^{\rho}_{w} x$. Покажем, что $\gamma_{w_1} x \subseteq Ox$. Пусть $y \in \gamma_{w_1} x$. Для некоторого $z \in X$ $\{x, y\} \subseteq O^{\rho}_{w_1} z \cap O^{d}_{w_1} z$. Поскольку d-симметрика, то $z \in O^{d}_{w_1} x \subseteq O^{\rho}_{w} x$. Итак, $z \in O^{\rho}_{w} x$ и $y \in O^{\rho}_{w} z$. По условию (П) получаем $y \in O^{\rho}_{v} x \subseteq Ox$. Тем самым показано, что семейство покрытий $\{\gamma_v \mid v \in V_\theta\}$ образует θ-измельчение.

Следствие 9.2. Всякое сильно симметризуемое θ-Δ-метризуемое пространство обладает θ-измельчением.

Теорема 9.3. Коллективно нормальное пространство с θ-измельчением θ-метризуемо.

Доказательство. Пусть $\{\omega_\alpha \mid \alpha \in A \ \mathrm{card}\, A \leq \theta\}$ — измельчение коллективно нормального пространства X. На основании предложения 8.3, для каждого $\alpha \in A$ существует ω_α-отображение $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, где Y_α — θ-метризуемое пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to Y = fX \subseteq \Pi\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где $fx = \{f_\alpha x\}$ для каждой точки $x \in X$. Отображение f непрерывно и является ω_α-отображением для каждого $\alpha \in A$. Покажем, что f — гомеоморфизм, то есть, что f^{-1} непрерывно. Фиксируем $y \in Y$ и $Of^{-1}y$. Тогда $\omega_\alpha f^{-1}y \subseteq Of^{-1}y$ для некоторого $\alpha \in A$. Поскольку f есть ω_α-отображение, то найдется открытое в Y множество U такое, что $y \in U$ и $f^{-1}U \subseteq Of^{-1}y$. Таким образом, f — гомеоморфизм. Так как $\mathrm{card}\, A \leq \theta$, то пространство Y θ-метризуемо. Теорема доказана.

Теорема 9.4. Для всякого линейно упорядоченного пространства X в порядковой топологии следующие условия эквивалентны:

1. X θ-метризуемо;
2. X обладает θ-измельчением;
3. X сильно θ-симметризуемо;
4. X обладает θ-r-консервативной бисетью;
5. диагональ $D(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ является G_θ-множеством в $X \times X$.

Доказательство. Будем проводить в следующем порядке:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2.$$

1 ⟶ 2. Очевидно.
2 ⟶ 1. Как известно (см. [38]), всякое линейно упорядоченное пространство коллективно нормально. Следовательно, можно применить теорему 9.3.
1 ⟶ 3. Очевидно.
3 ⟶ 4. Вытекает из теоремы 8.8.
4 ⟶ 5. Следует из леммы 8.4.
5 ⟶ 2. Пусть $D(X)$ является G_θ-множеством в $X\times X$. Тогда существует система $\{\gamma_\alpha=\{U\}|\alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$ открытых покрытий пространства X таких, что $\{x\}=\cap\{\gamma_\alpha x|\alpha\in A\}$ для каждой точки $x\in X$. Мы можем предполагать, что если $\{a, b\}\subseteq U\in\gamma_\alpha$, то $(a, b)=\{x\in X|a<x<<b\}\subseteq U$. В противном случае мы могли бы вписать в каждое γ_α покрытие из таких множеств. Покажем, что $\{\gamma_\alpha|\alpha\in A\}$ — измельчение. Пусть $x\in X$ и (a, b) — некоторый открытый интервал, содержащий точку x. Мы можем предполагать, что для каждых α_1, $\alpha_2\in A$ существует $\alpha_3\in A$ для которого γ_{α_3} вписано одновременно в γ_{α_1} и γ_{α_2}. Тогда существуют $\alpha_1\in A$ и $\alpha_2\in A$ такие, что $a\notin\gamma_{\alpha_1}$ и $b\notin\gamma_{\alpha_2}$. Следовательно, для некоторого $\alpha_3\in A$ имеем $\{a, b\}\cap\gamma_{\alpha_3}x=\varnothing$. Тогда $\gamma_{\alpha_3}x\subseteq(a, b)$, поскольку $(y_1, y_2)\subseteq\gamma_\alpha x$ если y_1, $y_2\in\gamma_\alpha x$. Следовательно $\{\gamma_\alpha|\alpha\in A\}$ — θ-измельчение.

Предложение 9.2. Пусть X — линейно упорядоченное пространство в порядковой топологии. Если X θ-о-метризуемо, то X сильно θ-о-метризуемо.

Доказательство. Нам достаточно показать, что характер $\chi xX\leq\theta$ для каждого $x\in X$. Пусть $\rho: X\times X\to R^\theta$ — θ-о-метрика. Берем некоторую точку $x\in X$. Пусть точка x не крайняя. Тогда для всякого $v\in V_\theta$ берем интервал (a_v, b_v), где $a_v<x<b_v$ и $\rho(x, a_v)\in v$, $\rho(x, b_v)\in v$. Тогда $x=\lim a_v=\lim b_v$. Поэтому $x=\cap\{(a_v, b_v)|v\in V_\theta\}$, то есть система $\{(a_v, b_v)|v\in V_\theta\}$ образует базу в x.

Вопрос 1. Пусть X — θ-симметризуемое линейно упорядоченное пространство. Является ли оно сильно θ-симметризуемым?

В связи с предложением 9.2 и вопросом 1 следует отметить, что на линейно упорядоченных бикомпактах существуют не сильные симметрики.

Пример 9.1. Обозначим через X совокупность всех порядковых чисел $\leq\omega_1$ в порядковой топологии. Известно, что X — бикомпакт веса $\mathfrak{a}_1$*. На пространстве X существует $\mathfrak{a}_1$ — симметрика d, которая не является сильной.

Доказательство. Поскольку пространство X вполне регулярно и имеет вес $\mathfrak{a}_1$, то X $\mathfrak{a}_1$ — метризуемо. Пусть $\rho: X\times X\to R^{\mathfrak{a}_1}$ — $\mathfrak{a}_1$-метрика над полуполем $R^{\mathfrak{a}_1}$. Обозначим через I единицу в $R^{\mathfrak{a}_1}$, а через L совокупность всех изолированных точек в X. Введем на x следующую $\mathfrak{a}_1$-симметрику:

* Чрез $\mathfrak{a}_1$ обозначаем следующее за $\mathfrak{a}_0$ кардинальное число.

$$d(x, y)=\begin{cases} 1, \text{ если } \{x, y\}\cap L\neq\varnothing \text{ и } \omega_1\in\{x, y\}, \\ \rho(x, y) \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Мы можем считать, что $\rho(x, y)\leq 1$ для любых $x, y\in X$. Тогда по построению имеем $\rho(x, y)\leq d(x, y)$ для любых $x, y\in X$. Поэтому, если множество F замкнуто в топологии τ_ρ, то F замкнуто в топологии τ_d. Пусть F замкнуто в топологии τ_d. Покажем, что F замкнуто в топологии τ_ρ. Допустим, что это не так. Тогда, в силу определения симметрики d, $[F]_{(X,\tau_\rho)}=F\cup\{\omega_1\}$. Поскольку F не замкнуто в τ_ρ, то $\omega_1\notin F$. Поэтому существует окрестность v нуля в R^{a_1}, для которой $O_v^a\,\omega_1\cap F=\varnothing$. Так как $O_v^a\,\omega_1\supseteq O_v^\rho\,\omega_1\setminus L$ и $O_v^\rho\,\omega_1$ открыто в порядковой топологии, то существует $x\in X$ такой, что $(x, \omega_1]\setminus L\subseteq O_v^d\,\omega_1$. В силу счетно-компактности пространства $X\setminus\{\omega_1\}$ множество $(x, \omega_1]\cap F$ конечно. Следовательно, $\omega_1\notin[F]_{(X,\tau_\rho)}$. Полученное противоречие показывает, что топологии τ_d и τ_ρ совпадают, то есть X симметризуемо симметрикой d. Поскольку $\omega_1\in[L]$ и $d(\omega_1, L)\geq 1>0$, то симметрика d не сильная, что и требовалось доказать.

Из предложения 4.1 и следствия 7.2 вытекает, что всякая $\mathbf{a}_0$-симметрика на бикомпакте является сильной. Пример 9.1 показывает нам, что для $\mathbf{a}_1$ — симметрик не линейно упорядоченных бикомпактах, на которых имеются $\mathbf{a}_1$-метрики, это уже не так.

§ 10. Перистые пространства*

Пусть $X\subseteq Y$, X, Y — топологические пространства. Система $\{\gamma_\alpha\,\alpha\in A, \operatorname{card}\leq\theta\}$ открытых в Y покрытий пространства X называется θ-оперением X в Y, если $\cap\{\gamma_\alpha x|\alpha\in A\}\subseteq X$ для любой точки $x\in X$. Топологическое T_1 — пространство X называется p_θ^θ — пространством, если X обладает θ-оперением в некотором θ-компактном пространстве $Y\subseteq\omega X$ (ωX — волменовское расширение пространства X).

Будет доказана

Теорема 10.1. Для любого регулярного p_θ^θ-пространства X следующие условия эквивалентны:

1. X обладает θ-измельчением;
2. X обладает θ-дискретной сетью;
3. X обладает θ-r-консервативной бисетью;
4. X сильно θ-симметризуемо.

Нам понадобится следующее вспомогательное понятие: Топологическое пространство X называется θ-паракомпактным, если для любого открытого покрытия ω пространства X существует такое семейство $\{\gamma_\alpha\,|\,\alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta$ открытых покрытий пространства X, что для любой точки $x\in X$ существует $\alpha\in A$, для которого $[\gamma_\alpha x]\subseteq G\in\omega$.

Лемма 10.1. Пусть X — регулярное пространство. Если в любое

*Перистые пространства были введены А. В. Архангельским (10).

открытое покрытие пространства X можно вписать θ-дискретное покрытие, то X θ-паракомпактно.

Доказательство. Пусть ω — открытое покрытие пространства X. Поскольку X регулярно, то существует открытое покрытие ω_1, замкнуто вписанное в ω. По условиям леммы, в ω_1 можно вписать замкнутое θ-дискретное покрытие $\gamma' = \cup\{\gamma'_\alpha = \{F^\alpha_\beta \ \beta \in B_\alpha\} \ \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \theta\}$, γ'_α — дискретно для каждого $\alpha \in A$. Для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B_\alpha$ существует $u^\alpha_\beta \in \omega_1$ такое, что $F^\alpha_\beta \subseteq U^\alpha_\beta$. Положим $v^\alpha_\beta = U^\alpha_\beta \setminus \cup\{F^\alpha_\delta \ \delta \in B_\alpha \setminus \{\beta\}\}$ и $v_\alpha = X \setminus \cup\{F^\alpha_\beta \mid \beta \in B_\alpha\}$ для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B_\alpha$. Семейство покрытий $\{\gamma_\alpha = \{v_\alpha, \ v^\alpha_\beta \mid \beta \in B_\alpha\} \ \alpha \in A\}$ искомое. Действительно, пусть $x \in X$. Тогда для некоторых $\alpha \in A$ и $\beta \in B_\alpha$ и $x \in F^\alpha_\beta$. По построению $\gamma_\alpha x \ni v^\alpha_\beta \subseteq U^\alpha_\beta \subseteq [U^\alpha_\beta] \subseteq G \in \omega$.

Следствие 10.1. а) Всякое регулярное сильно θ-симметризуемое пространство θ-паракомпактно.
б) Любое регулярное пространство с θ-r-консервативной биссетью θ-паракомпактно.

Предложение 10.1. Пусть X — θ-паракомпактное p^θ_θ - пространство. Если диагональ $D(X)$ является G_θ-множеством в $X \times X$, то X обладает θ-измельчением.

Доказательство. Поскольку X — p^θ_θ-пространство и $D(X)$ — G_θ-множество в $X \times X$, то существует такое θ-оперение $\{\gamma_\alpha \ \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \theta\}$ пространства X в θ-компактном пространстве $Y \subseteq \omega X$, что $\cap\{\gamma_\alpha x \mid \alpha \in A\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$. В силу θ-паракомпактности для любого $\alpha \in A$ существует такое семейство $\omega_\alpha = \{\omega^\alpha_\beta \ \beta \in B_\alpha, \operatorname{card} B_\alpha \leq \theta\}$ открытых в Y покрытий пространства X, что для любой точки $x \in X$ найдется $\beta \in B_\alpha$, для которого $[\omega^\alpha_\beta x]_Y \subseteq \Gamma \in \gamma_\alpha$. Покажем, что $\{\omega^\alpha_\beta \mid \beta \in B_\alpha, \ \alpha \in A, -A\}$ — θ-измельчение на X. Пусть $x \in X$ и Ox — некоторая окрестность точки x в Y. Поскольку $\cap\{\omega^\alpha_\beta x \mid \beta \in B_\alpha \ \alpha \in A\} = \cap\{[\omega^\alpha_\beta x]_Y \ B \in B_\alpha, \ \alpha \in A\}$, то в силу θ-компактности Y, найдутся такие $\alpha \in A$ и $\beta \in B_\alpha$, что $\omega^\alpha_\beta x \subseteq Ox$.

Доказательство теоремы 10.1. 1 $\longrightarrow$ 2. Если $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \theta\}$ — θ-измельчение на X, то в каждое γ_α можно вписать θ-дискретное покрытие ω_α. Очевидно, что $\cup\{\omega_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — θ-дискретная сеть в X.
1 $\longrightarrow$ 4. Вытекает из теоремы 9.1.
2 $\longrightarrow$ 1. Следует из леммы 10.1 и предложения 10.1.
4 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ 1. Вытекает из теоремы 8.8, теоремы 8.3, леммы 10.1 и предложения 10.1. Теорема доказана.

Следствие 10.2. Для любого коллективно нормального p^θ_θ-пространства X следующие условия равносильны.
1. X θ-метризуемо;
2. X обладает θ-измельчением;

3. X сильно θ-симметризуемо;
4. X Обладает θ-r-консервативной бисетью.

Поскольку всякое θ-компактное T_2-пространство является p_θ^θ-пространством, то справедливо.

Следствие 10.3. Всякое сильно θ-симметризуемое θ-компактное T_2-пространство θ-метризуемо и бикомпактно.

Предложение 10.2. Пусть T_2-пространство X о-метризуемо θ-о-метрикой ρ с условием (П). Тогда на множестве X существует такая θ-симметрика d, что d является сильной о-метрикой на каждом θ-компактном подпространстве пространства X.

Доказательство. Пусть $\rho: X\times X\to E$ — о-метрика с условием (П) над θ-шкалой (E, o, V_E). Для каждого $v\in V_E$ положим

$$\rho_v(x, y)=\begin{cases}1, \text{ если } y\notin O_v^\rho x;\\ 0, \text{ если } y\in O_v^\rho x\end{cases}$$

и $d_v(x, y)=\min\{\rho_v(x, y), \rho_v(y, x)\}$ для любых $x, y\in X$. Рассмотрим следующие о-метрики $\hat\rho: X\times X\to \Pi\{R_v\ v\in V_E\}$ и $d: X\times X\to \Pi\{R_v\ v\in V_E\}$, где $\hat\rho(x, y)=\{\rho_v(x, y)\}$ и $d(x, y)=\{d_v(x, y)\}$. Докажем, что v — искомая симметрика. Прежде всего заметим, что, в силу теоремы 3.1, $\hat\rho$ согласуется с топологией X и удовлетворяет условию (П) Поскольку $\hat\rho\geq d$, то $\tau_{\hat\rho}\supset\tau_d$. Пусть Φ — θ-компактное подпространство пространства X. Покажем, что на Φ $\tau_{\hat\rho}=\tau_d$*. Пусть множество $L\subseteq\Phi$ замкнуто в топологии τ_d. Допустим, что L не замкнуто в топологии τ_d. Тогда $d[x, L]=0$ для некоторой точки $x\in\Phi\setminus L$. Обозначим через x_v некоторую точку $x_v\in O_v^d x\cap L$, где $v\in V_R V_E$. На множестве $v_R V_E$ введем порядок: $w\geq v$, если $w\subseteq v$. Таким образом, $V_R v_E$ становится направленным множеством. По лемме 5.1 существует точка $x_0\in L$ такая, что для любой окрестности Ox_0 точки x_0 в (X, τ_ρ) и каждого $v\in V_R w_E$ существует $w\in V_R v_E$, для которого $x_w\in Ox_0$ и $w\geq v$. Теперь покажем, что $\hat\rho(x_0, x)=0$, то есть, что для любого $v\in V_R V_E$ имеем $\hat\rho(x_0, x)=0$. Пусть v фиксировано в $v_R v_E$. Выбираем $w=w(v, x_0)\in V_R V_E$ по условию (П). Тогда имеется $w\in v_R v_E$ и $w_1\subseteq w$ такая, что $O_{w_1}^{\hat\rho} x\cap O_{w_1}^{\hat\rho} x_0=0$ и $O_w^{\hat\rho} x\cap L=\varnothing$. Такое w_1 существует в силу хаусдорфовости X и замкнутости L в $\tau_{\hat\rho}$. Для некоторого $w_2\in V_R v_E$, где $w_2\subseteq w_1$ имеем $x_{w_2}\in O_{w_1}^{\hat\rho} x_0$. Поскольку $x_{w_2}\notin O_{w_1}^{\hat\rho} x$ и $d(x, x_{w_2})\in w_1$, то $x\in O_{w_1}^{\hat\rho} x_{w_1}$. Так как $w_1\subseteq w$, то $\hat\rho(x_0, x)\in v$. Тем самым мы доказали, что $\rho(x_0, x)=0$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Следствие 10.4. Любое θ-компактное θ-Δ-метризуемое T_2-пространство θ-метризуемо и бикомпактно.

* Более того, мы покажем, что $\hat\rho$ и d на Φ эквивалентны.

В заключение отметим, что всякое T_1-пространство с θ-измельчением и, тем более, каждое θ-метризуемое пространство, является p_θ^θ-пространством.

§ 11. Симметрики с условием (П)

Лемма 11. 1. Пусть $\rho: X\times X\to R^\theta$ — симметрика, удовлетворяющая условию (П) и U — открытое в (X, τ_ρ) множество. Тогда существует такое семейство $\{U^v \mid v\in V_\theta\}$ открытых в (X, τ_ρ) множеств, что

$$U=\cup\{U^v \mid \in V_\theta\}=\cup\{[U^v]_{\tau_\rho}, v\in V_\theta\}.$$

Доказательство. Для каждого $v\in V_\theta$ положим $U^v=X\setminus[O_v^\rho(X\setminus U)]_{\tau_\rho}$. По построению, $[U^V]_{\tau_\rho}\subseteq U$ для каждого $v\in V_\theta$. Докажем, что $U\subseteq\cup\{U^v \mid v\in V_\theta\}$. Пусть $x\in U$. Тогда $O_v^\rho x\subseteq U$ для некоторого $v\in V_\theta$. Выбираем $w=w(v, x)\in V_\theta$ по условию (П). Покажем, что $x\in U^w$. Допустим, что $x\notin U^w$. Тогда $O_w^\rho x\cap O_w^\rho(X\setminus U)\neq\varnothing$. Пусть $y\in O_w^\rho x\cap O_w^\rho(X\setminus U)$. Существует $z\in X\setminus U$, для которого $y\in O_w^\rho z$. Тогда по условию (П) $z\in O_v^\rho x\subseteq U$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 11.1. Всякое пространство, симметризуемое симметрикой с условием (П) регулярно.

Лема 11.2. Пуст $\rho: X\times X\to R^\theta$ — симметрика с условием (П) и $\{F_\alpha \mid \alpha\in A\}$ — дискретная система замкнутых подмножеств пространства (X, τ_ρ). Тогда существует система $\{U_\alpha^{vw} \mid \alpha\in A, v, w\in V_\theta\}$ открытых подмножеств пространства (X, τ_ρ) такая, что:

1. Семейство $\{U_\alpha^{vw} \mid \alpha\in A\}$ дискретно в (X, τ_ρ) для любых $v, w\in V_\theta$.
2. $F_\alpha\subset U_\alpha=\cup\{U_\alpha^{vw} \mid v, w\in V_\theta\}$ для любого $\alpha\in A$.

Доказательство. Положим $\tilde{U}_\alpha^v=\{x\in X \mid O_v^\rho x\cap F_\alpha\neq\varnothing,\ O_v^\rho x\cap(\cup\{F_\beta \mid \beta\in A\setminus\{\alpha\}\})$ и $U_\alpha^v=\operatorname{Int}\tilde{U}_\alpha^v$ для любых $\alpha\in A$ и $v\in V_\theta$. Ясно что для каждого $v\in V_\theta$ система $\{U_\alpha^V \mid \alpha\in A\}$ дизъюнктна в X. Покажем, что $F_\alpha\subseteq\cup\{U_\alpha^v \mid v\in V_\theta\}$ для любого $\alpha\in A$. Пусть $x\in F_\alpha$. Существует $V\in V_\theta$, для которого $O_V^\rho x\cap(\cup\{F_\beta \mid \beta\in A\setminus\{\alpha\}\})=\varnothing$. Выберем $w=W(V,x)\in V_\theta$ по условию (П). Покажем, что $O_w^\rho x\subseteq\tilde{U}_\alpha^w$. В самом деле пусть $y\in O_w^\rho x$. Тогда $O_w^\rho y\cap F_\alpha x$. Кроме того, если $O_w^\rho y\cap F_\beta\neq\varnothing$ для некоторого $\beta\neq\alpha$, то, выбрав $z\in O_w^\rho y\cap F_\beta$, получим $z\in O_v^\rho x$, что не верно. Итак, $\operatorname{Int} O_w^\rho x\subseteq U_\alpha^w$.

Теперь для каждого $v\in V_\theta$ положим $U^v=\cup\{U_\beta^v \mid \alpha\in A\}$. По лемме 11.1 $U^v=\cup\{U^{vw} \mid w\in V_\theta\}=\cup\{[U^{vw}] \mid w\in V_\theta\}$. Положим $U_\alpha^{vw}=U_\alpha^v\cap U^{vw}$. Семейство множеств $\{U_\alpha^{vw} \mid \alpha\in A, vw\in V_\theta\}$ искомое.

Теорема 11.1. Для любого регулярного пространства X следующие условия эквивалентны:

1. X симметризуемо θ-симметрикой с условием (П);
2. X обладает θ-дискретной базой;
3. X обладает θ-локально конечной базой;
4. X обладает базой $B=\cup\{B_\alpha=\{U_\lambda^\alpha \mid \lambda\in\Lambda_\alpha\} \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$ со следующими свойствами: а) $x\in \operatorname{Jnt}\cap\{U \mid x\in U\in B_\alpha\}$ для любых $x\in X$ и $\alpha\in A$; б) B_α консервативно для любого $\alpha\in A$.

Доказательство. 1$\longrightarrow$2. По теореме 9.2 пространство X обладает θ-измельчением $\{\gamma_\alpha \mid \alpha\in A, \operatorname{card} A\leq\theta\}$. На основании теорем 8.3, 8.8 и леммы 11.2, в каждое покрытие γ_α можно вписать θ-дискретное открытое покрытие ω_α. Семейство $\omega=\cup\{\omega_\alpha \mid \alpha\in A\}$ является θ-дискретной базой, поскольку $\{\gamma_\alpha \mid \alpha\in A\}$ — θ-измельчение.

2$\longrightarrow$3. Очевидно.

3$\longrightarrow$4. Очевидно.

4$\longrightarrow$1. Пару $(U_\lambda^\alpha, U_\mu^\beta)$, где $\alpha, \beta\in A$, $\lambda\in\Lambda_\alpha$ и $\mu\in\Lambda_\beta$, назовем регулярной, если $[U_\lambda^\alpha]\subseteq U_\mu^\beta$. Каждой регулярной паре $(U_\lambda^\alpha, U_\mu^\beta)$ поставим в соответствие симметрику $d_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}: X\times X\longrightarrow R$, определенную следующим образом:

$$d_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } \{x, y\}\subseteq U_\mu^\beta\\ 0, \text{ если } \{x, y\}\subseteq X\setminus[U_\lambda^\alpha];\\ 1, \text{ если } x\in[U_\lambda^\alpha],\ y\in X\setminus U_\mu^\beta;\\ 1, \text{ если } y\in[U_\lambda^\alpha],\ x\in X\setminus U_\mu^\beta.\end{cases}$$

Положим $d_\alpha^\beta(x, y)=\max\{d_{\alpha\lambda}^{\beta\mu}(x,y) \mid \lambda\in\Lambda_\alpha, \mu\in\Lambda_\beta\}$. Рассмотрим θ-симметрику $d: X\times X\longrightarrow\Pi\{R_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta\in A\}$, где $d(x,y)=\{d_\alpha^\beta(x, y)\}$ для любых $x, y\in X$. Покажем, что топология τ_d совпадает с заданной на X топологией и что симметрика d удовлетворяет условию (П).

Пуст $x\in X$ и Ox—произвольные точка и ее окрестность в X. Поскольку B—база, то $x\in U_\mu^{\beta_0}\subseteq Ox$ для некоторых $\beta_0\in A$ и $\mu\in\Lambda_{\beta_0}$, а поскольку пространство X регулярно, то для некоторых $\alpha_0\in A$ и $\lambda\in\Lambda_{\alpha_0}$ справедливо включение $x\in U_\lambda^{\alpha_0}\subseteq[U_\lambda^{\alpha_0}]\subseteq U_\mu^{\beta_0}$. Тогда, если $v\in V_{R^{A\times A}}$ выбрано так, что $v\subseteq(-1, 1)\times\Pi\{R_{\alpha\beta} \mid (\alpha, \beta)\in A\times A\setminus\{(\alpha_0, \beta_0)\}$, то $O_v^e x\subseteq Ox$. Пусть теперь $v\in V_{R^{A\times A}}$ взято произвольным образом. Тогда $v\supseteq$

$$\supseteq\prod_{i=1}^{n}(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)\times\Pi\{R_{\alpha\beta} \mid (\alpha, \beta)\in A\times A\setminus\{\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha^n, \beta_n)\}\},$$ где $1\geq\varepsilon_i>0$

для любого $i=1, 2, \ldots, n$. Положим $O_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}x=\operatorname{Jnt}\cap\{U_\lambda^\alpha \mid x\in U_\lambda^\alpha,\ \alpha\in$

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\},\ \lambda\in\bigcup_{i=1}^{n}(\Lambda_{\alpha_i}\cup\Lambda_{\beta_i})\}\setminus\cup\{[U_\lambda^\alpha] \mid x\notin[U_\lambda^\alpha], \alpha\in\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

$\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} (\Lambda_{\alpha_i} \cup \Lambda_{\beta_i})\}$. Пусть $y \in O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n} x$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ $d^{\beta_i \mu}_{\alpha_i \lambda}(x, y) = 0$. Отсюда заключаем, что $d^{\beta_i}_{\alpha_i}(x, y) = 0$, то есть $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \subseteq O^{\varrho}_{v} x$. Покажем теперь, что ρ удовлетворяет условию (П), то есть укажем $w = w(v, x) \in V_{R^{A \times A}}$ для v и x. Выберем α_0, $\beta_0 \in A$ и $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda_{\alpha_0} \times \Lambda_{\beta_0}$ таким образом, чтобы $x \in U^{\alpha_0}_{\lambda_0} \subseteq [U^{\alpha_0}_{\lambda_0}] \subseteq U^{\beta_0}_{\mu_0} \subseteq O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n} x$. Пусть $w \in V_{R^{A \times A}}$ удовлетворяет неравенствам $w \subseteq (-1, 1) \times \Pi (R_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \in A \times A \setminus \{(\alpha_0, \beta_0)\}\}$, $w \subseteq v$ и $U^{\alpha_0}_{\lambda_0} \supseteq O^{\alpha}_{w} x$. Тогда, если $y \in O^{\alpha}_{w} x$ и $z \in O^{\alpha}_{w} y$, то $z \in U^{\beta_0}_{\mu_0} \subseteq O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_n} x \subseteq^{\alpha}_{v} x$.

Следствие 11.2. Всякое регулярное пространство веса θ симметризуемо некоторой θ=симметрикой с условием (П).

Семейство $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A, \text{card } A \leq \theta\}$ открытых покрытий пространства X называется фундаментальным θ-измельчением, если $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — θ-измельчение на X и для любых $\alpha \in A$ и $x \in X$ существует такой $\beta \in A$, что $\gamma^2_\beta x \subseteq \Gamma \in \gamma_\alpha$.

Теорема 11.2. Топологическое пространство X обладает фундаментальным θ-измельчением тогда и только тогда, когда оно симметризуемо некоторой θ-симметрикой с условим (П).

Доказательство. Пусть ρ: $X \times X \to R^\theta$ — θ-симметрика с условием (П). Для всякого $v \in V_\theta$ положим $\gamma_v = \{\text{Jnt } O^{\varrho}_{v} x \mid x \in X\}$. Покажем, что $\gamma = \{\gamma_v \mid v \in V_\theta\}$ — фундаментальное θ-измельчение. Пусть $v \in V_\theta$ и $x \in X$ фиксированы. По условию (П) выбираем $w_1 = w(v, x) \in V_\theta$ и $w_2 = w(w_1, x) \in V_\theta$, где $w_2 \subseteq w \subseteq v$. Покажем, что $\gamma_{w_2} O^{\varrho}_{w_2} x \subseteq \text{Jnt } O^{\varrho}_{v} x$. Пусть $z \in \gamma^{\varrho}_{w_2} O^{\varrho}_{w_2} x$. Тогда существует $y \in O^{\varrho}_{w_3} x$ такое, что $z \in \gamma_{w_2} y$. Поэтому существует $y_1 \in X$, для которой $z \in O^{\varrho}_{w_2} y_1$ и $y_1 \in O^{\varrho}_{w_2} y$. В силу условия (П), заключаем, что $y_1 \in O^{\varrho}_{w_1} x$. Поскольку $y_1 \in O^{\varrho}_{w_1} x$. Поскольку $y_1 \in O^{\varrho}_{w_1} x$ и $z \in O^{\varrho}_{w_2} y_1 \subseteq O^{\varrho}_{w_1} y_1$, то $z \in O^{\varrho}_{v} x$. Так как $\gamma_{w_2} O^{\varrho}_{w_2} x$ открыто в X, то $\gamma_{w_2} O^{\varrho}_{w_2} \subseteq \text{Jnt } O^{\varrho}_{v} x$. Этим нами показано, что $\{\gamma_v \mid v \in V_\theta\}$ — θ-измельчение. Поэтому существует $w_3 \in V_\theta$ и $w_3 \subseteq w_2$ такой, что $\gamma_{w_3} x \subseteq O^{\varrho}_{w_2} x$. Так как $w_3 \subseteq w_2$, то покрытие γ_{w_3} вписано в γ_{w_2}. Поэтому $\gamma^2_{w_3} x \subseteq \gamma_{w_3} O^{\varrho}_{w_2} x \subseteq \gamma_{w_3} O^{\varrho}_{w_2} x \subseteq \text{Jnt } O^{\varrho}_{v} x \in \gamma_v$. Таким образом, система γ является фундаментальным θ-измельчением.

Пусть теперь $\gamma = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A, \text{card } A \leq \theta\}$ — фундаментальное θ-измельчение на X. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$\rho_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \notin \gamma_\alpha x; \\ 0, & \text{если } y \in \gamma_\alpha x \end{cases}$$

для любых двух точек x, $y \in X$. Симметрика ρ_α является отображением $\rho_\alpha : X \times X \to R_\alpha$. Рассмотрим θ-симметрику $\rho : X \times X \to \Pi\{R_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где

$\rho(x, y)=\{\rho_\alpha(x, y\} \in \Pi\{R_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Поскольку γ—θ-измельчение, то τ_ρ совпадает с заданной на X топологией [см. доказательство теоремы 9.1]. Покажем, что ρ удовлетворяет условию (П). Пусть $v \in V_{R_A}$ и $x \in X$ заданы. Тогда существует $\alpha \in A$ такой, что $\gamma_\alpha^2 x \subseteq O_v^\rho x$. Положим $w_1=(-1, 1)\times\Pi\{R_\beta \mid \beta \in A\setminus\{\alpha\}\}$. Существует $w \in V_{R^A}$ такой, что $w \subseteq w_1 \cap V$. Пусть $y \in O_w^\rho x$, $z \in O_w^\rho y$, тогда $y \in \gamma_\alpha x$ и $z \in \gamma_\alpha y$. Следовательно, $z \in \gamma_\alpha^2 y \subseteq O_v^\rho x$. Значит искомая $W=W(v, x) \in V_{R^A}$ найдена.

§ 12. Метризационные критерии и соотношения между ними

Следуя П. С. Александрову и П. С. Урысону, назовем полной регулярной θ-цепью* на пространстве X семейство $\{\gamma_\alpha\ \alpha \in A$, $\operatorname{card} A \leqq \theta\}$ открытых покрытий пространства X, если оно удовлетворяет условиям: 1) $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — θ-измельчение; 2) для любого $\alpha \in A$ существует $\beta \in A$ такой, что как только $U_1\ U_2 \in \gamma_\beta$ и $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, найдется $U \in \gamma_\alpha$, для которого $U_1 \cup U_2 \subseteq U$.

Теорема 12.1. Для любого топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

1. X θ-метризуемо;
2. X θ-симметризуемо симметрикой с условием (рП):
3. X-обладает полной регулярной θ-цепью;
4. Топология пространства X задается некоторой равномерной структурой равномерного веса θ.

Доказательство. 1 $\longrightarrow$ 2. Очевидно.

2 $\longrightarrow$ 3. Пусть $\rho: X\times X \longrightarrow R^\theta$ —симметрика с условием (рП). Для каждого $v \in V_\theta$ положим $\gamma_v=\{\operatorname{Int} O_v^\rho x \mid x \in X\}$ и покажем, что $\{\gamma_v \mid v \in V_\theta\}$—полная регулярная θ-цепь. Пусть $v \in V_\theta$ и $w=w(v) \in V_\theta$ выбрано по условию (рП). Пусть, далее, $U_1, U_2 \in \gamma_w$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда $U_1 \subseteq O_w^\rho y_1$ и $U_2 \subseteq O_w^\rho y_2$. Если $z \in U_i (i=1, 2)$, то $y_i \in O_w^\rho x$, $z \in O_w^\rho y_i$ и, по условию (рП), $z \in O_v^\rho x$. Следовательно, $U_1 \cap U_2 \subseteq \operatorname{Int} O_v^\rho x \in \gamma_v$.

3 $\longrightarrow$ 4. Пусть $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A, \operatorname{card} A \leqq \theta\}$ — полная регулярная θ-цепь. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\omega_\alpha=\{\gamma_\alpha x \mid x \in X\}$. Покажем, что $\{\omega_\alpha\ \alpha \in A\}$ — база некоторой равномерной структуры. Пусть $\alpha \in A$. Существует $\beta \in A$ такой, что, если $U_1, U_2 \in \gamma_\beta$ и $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то $U_1 \cup U_2 \subseteq U \in \gamma_\alpha$. Покажем, что $\omega_\beta x \subseteq \gamma_\alpha x \in \omega_\alpha$ для любой точки $x \in X$. Поскольку $\omega_\beta x=\gamma_\beta^2 x$, то достаточно установить включение $\gamma_\beta^2 x \subseteq \gamma_\alpha x$. Пусть $y \in \gamma_\beta^2 x$. Тогда существуют $U_1, U_2 \in \gamma_\beta$ такие, что $x \in U_1$, $y \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. По условию $y \in U_1 \cup U_2 \subseteq U \in \gamma_\alpha$, причем $U \subseteq \gamma_\alpha x$.

4 $\longrightarrow$ 1. Вытекает из теоремы 4.5. Теорема 12.1 доказана.

Итак, любое θ-метризуемое пространство вполне регулярно. Следовательно, всякое регулярное не вполне регулярное пространство веса θ явля-

* Заметим, что всякая полная θ-цепь в смысле Антоновского [7] является полной регулярной θ-цепью. Обратное не всегда так.

ется примером не θ-метризуемого пространства, допускающего θ-симметрику с условием (П). Таким образом, условие (П) существенно слабее условия (рП) при $\theta > \mathbf{a}_0$.

Вопрос 2. Существует ли вполне регулярное не θ-метризуемое пространство, допускающее θ-симметрику с условием (П)?

Как показывает следующая теорема, в классе нормальных пространств ответ на вопрос 2 отрицателен.

Теорема 12.2*. Для любого нормального пространства X следующие условия эквивалентны:

1. X θ-метризуемо;
2. X θ-симметризуемо симметрикой с условием (П);
3. X регулярно и обладает θ-локально-конечной базой;
4. X регулярно и обладает θ-дискретной базой.

Доказательство. $1 \longrightarrow 2$. Очевидно.

$2 \longrightarrow 3$ 4. Вытекает из теоремы 11.1.

$4 \longrightarrow 1$. В силу регулярности X, всякое открытое в X множество является F_θ-множеством. Поэтому, в силу нормальности X и большой леммы Урысона, мы можем предполагать, что X обладает θ-дискретной базой $\{\omega_\alpha = \{U_\alpha^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_\alpha\} \mid \alpha \in A, \operatorname{card} A \leq \theta\}$ со следующими свойствами: 1) ω_α дискретно для любого $\alpha \in A$; 2) для любых $\alpha \in A$ и $\lambda \in \Lambda_\alpha$ существует непрерывная функция $f_{\alpha\lambda}(x)$ такая, что $f_{\alpha\lambda}^{-1}\{0\} = X \setminus U_\alpha^\lambda$ и $0 \leq f_{\alpha\lambda}(x) \leq 1$.

Для каждого $\alpha \in A$ и любых $x, y \in X$ положим $\rho_\alpha(x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\alpha} |f_{\alpha\lambda}(x) - f_{\alpha\lambda}(y)|$. Ясно, что $\rho_\alpha(x, y) \leq 2$ для любых $x, y \in X$. Кроме того, $\rho_\alpha : X \times X \longrightarrow R_\alpha$ является метрикой на множестве X. Рассмотрим метрику $\rho : X \times X \longrightarrow \Pi\{R_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где $\rho(x, y) = \{\rho_\alpha(x, y)\}$ для любых $x, y \in X$. Покажем, что τ_ρ совпадает с заданной на X топологией. Поскольку функции ρ_α непрерывны, то и отображение ρ непрерывно, то есть $x \in \operatorname{Int} O_v^\rho x$ для любых $v \in V_{R^A}$ и $x \in X$. Пусть $x \in X$ и Ox — произвольная точка и ее окрестность в X. Тогда $x \in U_\alpha^\lambda \subseteq Ox$ для некоторых $\alpha \in A$ и $\lambda \in \Lambda_\alpha$. По условию, $f_{\alpha\lambda}(x) = 2\varepsilon > 0$. Пусть $v \in V_{R^A}$ и $v \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Pi\{R_\beta \setminus \beta \in A \setminus \{\alpha\}\}$. Покажем, что $O_v^\beta x \subseteq U_\alpha^\lambda \subseteq Ox$. Пусть $y \in O_v^\rho x$. Тогда $|f_{\alpha\lambda}(x) - f_{\alpha\lambda}(y)| < \varepsilon$ и поэтому $f_{\alpha\lambda}(y) > 0$, то есть $y \in U_\alpha^\lambda$. Теорема доказана.

Из теоремы 12.2 и леммы 13.1 вытекает

Теорема 12.3. Для любого топологического пространства X следующие условия равносильны:

1. X $\mathbf{a}_0$-метризуемо;
2. X симметризуемо $\mathbf{a}_0$-симметрикой с условием (рП);
3. X симметризуемо $\mathbf{a}_0$-симметрикой с условием (П);
4. X регулярно и обладает σ-дискретной базой,
5. X регулярно и обладает σ-локально-конечной базой.

* Эквивалентности $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$ доказаны Р. В. Плыкиным [35].

§ 13. Полуупорядоченные шкалы

Шкала (E, o, V_E) полуупорядочена, если любые два элемента из v_E сравнимы по включению, то есть если $v_1, v_2 \in v_E$, то либо $v_1 \subseteq v_2$, либо $v_2 \subseteq v_1$.

Замечание 13.1. Любую a_0-шкалу можно считать полуупорядоченной.

Лемма 13.1. Пусть пространство X симметризуемо симметрикой $\rho: X \times X \to E$, с условием (П) над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E). Тогда пространство X коллективно нормально.

Доказательство. Пусть $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — дискретная система замкнутых подмножеств пространства X. Положим $\widetilde{U}_\alpha^v = \{x \in X \mid O_v^o x \cap F_\alpha \neq \varnothing$ $O_v^o x \cap F_\beta = \varnothing$ для любого $\beta \in A \setminus \{\alpha\}\}$ и $U_\alpha = \cup\{\mathrm{Int}\, \widetilde{U}_\alpha^v \mid v \in V_E\}$. Ясно, что $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Покажем, что система $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ дизъюнктна. Пусть $\alpha \neq \beta$ и $x \in U_\alpha$. Тогда существует такой елемент $v_1 \in v_E$, что $x \in \widetilde{U}_\alpha^{v_1}$. При $v \supseteq v_1$ либо $x \in \widetilde{U}_\alpha^v$, либо $x \notin \cup\{\widetilde{U}_\beta^v \mid \beta \in A\}$, а при $v \subseteq v_1$ точка $x \in U_\alpha^{v_1}$, либо $x \notin \cup\{\widetilde{U}_\beta^v \mid \beta \in A\}$. Поэтому $x \notin \cup\{U_\beta \mid \beta \in A \setminus \{\alpha\}\}$. Этим показано, что система $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ дизъюнктна. Лемма доказана. Если пространство X симметризуемо некоторой О-метрикой с условием (П), то и любое подпространство симметризуемо симметрикой с условием (П) над той же шкалой. Поэтому лемма 13.1 в совокупности с теоремами 2.1, 6.1 и леммой 2.1 позволяет нам получить следующую теорему

Теорема 13.1. Пусть пространство X симметризуемо симметрикой $\rho: X \times X \to E$, с условием (П) над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E). Тогда для любого натурального числа n пространство X^n наследственно коллективно нормально.

Лема 13.2. Пусть L—линейно упорядоченное множество. Тогда существуют такие регулярное кардинальное число θ и подмножество $L_\theta \subseteq L$ что:

1. $L_\theta = \{x_\alpha \in L \mid \alpha < \theta\}$ и $x_\alpha < x_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha > \beta$.
2. Если $L' \subseteq L$ и $\mathrm{card}\, L' < \theta$, то найдется точка $x_\alpha \in L_\theta$ такая, что $x_\alpha \leqq x$ для любого $x \in L'$.
3. Для любого $x \in L$ существует $x_\alpha \leqq x$, где $x_\alpha \in L_\theta$.

Доказательство. Положим $\theta = \min\{\mathrm{card}\, L' \mid L' \subseteq L$ и для любого x найдется элемент $x' \in L'$ такой, что $x \geqq x'\}$. Ясно, что $\theta \leqq \mathrm{card}\, L$. По условию, существует $L' \subseteq L$ такое, что $\mathrm{card}\, L' = \theta$ и для любого элемента $x \in L$ имеется элемент $x' \in L'$ такой, что $x' \leqq x$. Точки множества L' вполне упорядочим некоторым порядком $\prec$ по всем порядковым числам меньше θ. Пусть x_1 — первая по порядку $\prec$ точка из L'. Пусть далее, для любого $\alpha < \alpha_0$, где $\alpha_0 < \theta$, построен элемент x_α таким образом, что $x_\alpha < x_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha > \beta$. Положим $L^{\alpha_0} = \{x \in L' \mid x < x_\alpha$ для любого $\alpha < \alpha_0\}$. Покажем, что $L^{\alpha_0} \neq \varnothing$. Пусть $L^{\alpha_0} = \varnothing$. Тогда для любого $x \in L'$ найдется $\alpha < \alpha_0$ такой, что $x \geqq x_\alpha$. Следовательно, и для любого $x \in L$ найдется $\alpha < \alpha_0$, для которого $x \geqq x_\alpha$. По построению,

$\theta \leqq \operatorname{card}\{x_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$. Но это невозможно. Значит $L^{\alpha_0} \neq \varnothing$. Через x_{α_0} обозначим первую по порядку $\prec$ точку из L^{α_0}. По принципу трансфинитной индукции для каждого $\alpha < \theta$ построен элемент $x_\alpha \in L'$. Очевидно, что множество $L_\theta = \{x_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ удовлетворяет условиям 1 и 3. Пусть $L_1 \subseteq L$. Если не найдется элемент $x_\alpha \in L_\theta$ такой, что $x_\alpha \leqq x$ для любого $x \in L_1$, то для каждого $x_\alpha \in L_\theta$ существует такой элемент $x \in L_1$, что $x_\alpha \geqq x$. Следовательно, и для каждого $x \in L$ имеется элемент $x_1 \in L_1$ такой, что $x \geqq x_1$. Тогда $\theta \leqq \operatorname{card} L_1$. Таким образом L_θ удовлетворяет и условию 3. Поскольку множество L_θ не конфинально никакому своему подмножеству меньшей мощности, то кардинал θ регулярен. Лемма доказана.

Для каждого кардинального числа θ обозначим через $E(\theta) = \{a_\alpha \mid \alpha \leqq \theta\}$. На множестве $E(\theta)$ введем порядок: $a_\alpha > a_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha < \beta$. Положим $V_{E(\theta)} = \{v_\alpha = \{a_\beta \mid \beta > \alpha\} \mid \alpha < \theta\}$. Теперь на множестве $E(\theta)$ введем суммирование $a_\alpha + a_\beta = \max\{a_\alpha, a_\beta\}$. В этом случае для каждого $\alpha < \theta$ элемент v_α v_α-заполнен и $v_\alpha + v_\alpha = v_\alpha$. Таким образом, мы для каждого кардинального числа θ построили θ-М-шкалу* $(E(\theta), o = a_\theta, V_{E(\theta)})$.

Для любого топологического пространства X положи $o_1(X) = \min\{\theta \mid X$—$\theta$-о-метризуемо$\}$, $o_2(X) = \min\{\operatorname{card} L \; L$ не замкнуто в $X\}$, $\Psi(X) = \sup\{\Psi_x X \mid x \in X\}$, где $\Psi_x X$—псевдохарактер точки x в X, и $o(X) = \min\{o_1(X), o_2(X), \Psi(X)\}$.

Теорема 13.2. Пусть $\rho: X \times X \to E$, —o-метрика, удовлетворяющая аксиоме (T_1), над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E), Пусть, далее, пространство (X, τ_ρ) не дискретно**. Тогда существуют регулярное кардинальное число θ и o-метрика $d: X \times X \to E(\theta)$ такие, что:

1. $\theta = o(X)$ и $\Psi_x X \geqq \theta$ для некоторой $x \in X$.
2. o-метрики ρ и d равномерно эквивалентны.
3. Если ρ удовлетворяет аксиоме (C), то и d удовлетворяет аксиоме (C).

Доказательство. В силу леммы 13.2, существуют такие регулярное кардинальное число θ и подмножество $B = \{w_\alpha \in v_E \mid \alpha < \theta\}$, что:

а) для любого $v \in V_E$ найдется $\alpha < \theta$, для которого $v \supseteq w_\alpha$;

б) если $L \subseteq V_E$ и $\operatorname{card} L < \theta$, то существует $\alpha < \theta$, для которого $w_\alpha \subseteq \cap\{v \in L\}$;

в) $w_\alpha \subseteq w_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqq \beta$.

О-метрику $d: X \times X \to E(\theta)$ строим следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} o = a_\theta, \text{ если } x = y \\ a_\alpha, \text{ где } \alpha = \min\{\beta < \theta \mid y \notin O^\rho_{w_\beta} x\}, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

По построению имеем

$$O^d_{v_\alpha} x = \{y \in X \mid d(x, y) < a_\alpha\} = \{y \in X \mid \rho(x, y) \in w_\alpha\} = O^\rho_{w_\alpha} x \qquad (*)$$

* Построенные шкалы являются шкалами типа Курепа-Фреше (см. § 15).

** Дискретные пространства метризуемы над любой М-шкалой (E, o, V_E), где $\operatorname{card} E > 1$.

для любых $x \in X$ и $\alpha < \theta$. Из равенства (*) и условия а) вытекает равномерная эквивалентность o-метрик ρ и d. Если $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, то и $d(x, y) = d(y, x)$. Поэтому, если o-метрика ρ является симметрикой, то и d является симметрикой.

Докажем, что $\theta = o(X)$. Ясно, что $\theta \geqq o(X)$. Заметим, что для любых топологических пространств $o_1(Z) \geqq o_2(Z)$. Во-первых, покажем, что всякое множество в X мощности $< \theta$ замкнуто. Пусть $A \subseteq X$ и card $A_1 < \theta$. Фиксируем $x \in X \setminus A$. Тогда card $\{d(x, y) \mid y \in A\} < \theta$ и по условию б) найдется $\alpha < \theta$ такой, что $\rho(x, y) \geqq a_\alpha$ для любого $y \in A$. Тогда $O^{d}_{v_\alpha} x \cap A = \varnothing$. Следовательно, A замкнуто в X. Поэтому $\theta = \min \{o_1(x), o_2(x)\}$. Теперь похажем, что $\theta \leqq \Psi(X)$. Пусть $\Psi_x X < \theta$ для некоторой точки $x \in X$. Тогда существует система открытых подмножеств $\{U_\mu \mid \mu \in A, \text{card } A < \theta\}$ такая, что $x = \cap \{U_\mu \mid \mu \in A\}$. Для всякого $\mu \in A$ существует $\alpha(\mu)$ такой, что $O^{d}_{v_{\alpha(\mu)}} \subseteq U_\mu$. По условию б), найдется $\alpha < \theta$ такой, что $\alpha > \alpha(\mu)$ для любого $\mu \in A$. Тогда $O^{d}_{v_\alpha} x = \{x\}$. Следовательно, точка x изолирована. Поэтому $\Psi_x X \geqq \theta$ для некоторой точки $x \in X$, то есть $\theta \leqq \Psi(X)$. Теорема доказана.

Следствие 13.1. Пусть $\rho: X \times X \to E$ — о-метрика, удовлетворяющая аксиоме (T_1), над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E). Пусть далее, либо в (X, τ_ρ) существует счетное незамкнутое множество, либо $\Psi(X) \leqq \mathbf{a}_0$. Тогда:

1. Пространство (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$ — 0-метризуемо некоторой о-метрикой равномерно эквивалентной ρ.
2. Если ρ — симетрика, то (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$ симметризуемо симметрикой, равномерно эквивалентной ρ.
3. Если ρ — симметрика с условием (П), то пространство (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$-метризуемо.

Следствие 13.2. Пусть (X, τ_ρ) — хаусдорфово k-пространство где $\rho: X \times X \to E$ — о-метрика над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E) Тогда:

1. Пространство (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$-о-метризуемо.
2. Если ρ — симметрика, то (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$-симметризуемо.
3. Если ρ — симметрика с условием (П), то пространство (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$ метризуемо.

Следствие 13.3. Пусть (X, τ_ρ) — счетнокомпактное T_2-пространство, где $\rho: X \times X \to E$ — симметрика над полуупорядоченной шкалой (E, o, V_E). Тогда пространство (X, τ_ρ) $\mathbf{a}_0$-метризуемо.

Хорошо известно, что для любого неодноточечного пространства X пространство $X^{\mathbf{a}_0}$ содержит канторово совершенное множество и поэтому в $X^{\mathbf{a}_0}$ имеется счетное незамкнытое множество. Этот факт в совокупности со следствием 13.1 позволяет установить справедливость следующего предложения.

Предложение 13.1. Пусть $\rho: X^{a_0} \times X^{a_0} \to E$ — о-метрика, удовлетворяющая аксиоме (T_1) и согласующаяся с топологией, заданной на X^{a_0}, над полуупорядоченной шкалой $(E\, o\, V_E)$. Тогда:

1. Пространство X a_0-о-метризуемо, если X — T_2-пространство.
2. Пространство X^{a_0} о-метризуемо некоторой a_0-о-метрикой, равномерно эквивалентной ρ.
3. Если ρ-симметрика, то X^{a_0} a_0-симметризуемо симметрикой, равномерно эквивалентной ρ.
4. Если ρ — симметрика с условием (П), то пространство X a_0-метризуемо.

Замечание 13.2. Неметризуемый бикомпакт не симметризуем ни над одной полуупорядоченной шкалой.

Замечание 13.3. Если пространство X не a_0— о-метризуемо, то пространство X^{a_0} не о-метризуемо ни над одной полуупорядоченной шкалой.

В связи с этими замечаниями следует отметить нижеследующее предложение.

Предложение 13.2. Для любого регулярного кардинального числа θ существует такое топологическое пространство X_θ, что:

а) пространство X_θ метризуемо над полуупорядоченной θ-М-шкалой $(E(\theta)\, o\, V_{E(\theta)})$;

б) пространство X_θ не θ_1-о-метризуемо при $\theta_1 < \theta$;

в) при $\theta > a_0$ пространство $X_\theta^{a_0}$ не о-метризуемо ни над одной полуупорядоченной шкалой.

Доказательство. Положим $X_\theta = E_\theta$. На множестве X_θ вводим симметрику

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, \text{ если, } a = b; \\ \max\{a, b\}, \text{ если } a \neq b. \end{cases}$$

Пусть $a, b, c \in X_\theta$. Тогда $\rho(a, b) + \rho(b, c) = \max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\}$

$$= \max\{a, b, c\} \geqq \max\{a, c\} \geqq \rho(a, c).$$

Таким образом, симметрика ρ удовлетворяет аксиоме (Δ), то есть является метрикой. Поскольку кардинал θ регулярен, то в $(X_\theta \tau_\rho)$ всякое подмножество мощности $< \theta$ замкнуто. Поэтому пространство (X, τ_ρ) не может быт θ_1-о-метризуемо при $\theta_1 < \theta$ Следовательно, при $\theta > a_0$ пространство (X_θ, τ_ρ) не a_0-о-метризуемо. В силу предложения 13.1, пространство $X_\theta^{a_0}$ не о-метризуемо ни над одной полуупорядоченной шкалой.

Замечание 13.4. Пуст $\theta > a_0$. Тогда пространства $X_\theta, X_\theta^2, \ldots, X_\theta^n, \ldots$ метризуемы над θ-М-шкалой $(E(\theta), o, V_{E(\theta)})$, а пространство $X_\theta^{a_0}$ над θ-М-шкалой $(E(\theta), o, V_{E(\theta)})$ даже не о-метризуемо. Таким образом, основные результаты § 6 справедливы только для конечного числа сомножителей.

Предложение 13.3. Пусть пространства X_1 и X_2 симетризуемы симметриками с условием (рП) над некоторыми полуупорядоченными шкалами. Тогда следяющие условия равносильны:
1. $o(X_1)=o(X_2)$.
2. Пространство $X_1 \times X_2$ симметризуемо симметрикой с условием (рП) над некоторой полуупорядоченной шкалой.
3. Пространство $X \times X_1$ о-метризуемо над некоторой полуупорядоченной шкалой.

Доказательство. $1 \to 2$. Если $\theta = o(X_1) = o(X_2)$, то можно считать, что X_1, X_2 симметризуемы симметрикой с условием (рП) над $(E(\theta), o, V_{E(\theta)})$. Тогда и $X_1 \times X_2$ симметризуемо симметрикой с условием (рП) над $(E(\theta), o, V_{E(\theta)})$.
$2 \to 3$. Очевидно.
$3 \to 1$. Ясно, что $o_2(X_1) = o_2(X_1 \times X_2) = o_2(X_2)$ и $\Psi(X_1 \times X_2) = \max\{\psi(X_1), \psi(X_2)\}$. С другой стороны, $o_2(X_i) \leqq o_1(X_i) = \psi(X_i)$ длля любого $i = 1,2$. Поэтому $o(X_1 \times X_2) = o(X_1) = o(X_2)$. Предложение доказано.

Замечание 13.5. Если $\theta_1 \neq \theta_2$ и θ_1, θ_2 — регулярные кардинальные числа, то $X_{\theta_1} \times X_{\theta_2}$ не о-метризуемо ни над одной полуупорядоченной шкалой.

Замечание 13.6. Предложение 13.3 справедливо как для пространств, симметризуемых симметрикой с условием (рП), так и для пространств: а) сильно о-метризуемых; б) сильно симметризуемых; в) симметризуемых симметриками с условием (П); г) Δ-метризуемых; д) метризуемых.

При этом доказательство остается тем же.

§ 14. *SM*-пространства

Обозначим через D совокупность всех действительных неотрицательных функций, определенных на R и удовлетворяющих условиям:
1. всякая функция из D монотонно возрастает, то есть, если $x_1 < x_2$ и $f \in D$, то $f(x_1) \leqq f(x_2)$.
2) всякая функция из D непрерывна слева.
3) если $f \in D$, то $f(0)=0$, и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Положим

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqq 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Ясно, что $H \in D$. Для каждой пары действительных чисел u, v, где $v < 1$ и $u > 0$ положим

$$O_U^v = \{f \in D \mid f(u) > v\}.$$

Для каждого натурального числа n положим

$$v_n = \left\{ f \in D : f\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n} \right\} = O_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}.$$

Лема 14.1. Для любой пары чисел u, v, где $u > 0$ и $v < 1$ существует число n, такое, что $v_n \subseteq O_u^v$.

Доказательство. Достаточно положить $n = \min\left\{ m : u \geqq \frac{1}{m} \text{ и } v \geqq 1 - \frac{1}{m} \right\}$.

Положим $V_D = \{v_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда (D, H, V_D) называется S-шкалой.

Статистически метрическим пространством (SM-пространством) называется пара (X, F), где X — множество, а $F : X \times X \to D$ — отображение, удовлетворяющее условиям:

SM-1. $F(p, q) = F_{pq} = H$ тогда и только тогда, когда $p = q$.

SM-2. $F_{pq} = F_{qp}$ для любых $p, q \in X$.

SM-3. Если $F_{pq}(x) = 1$ и $F_{qr}(y) = 1$, то $F_{pr}(x + y) = 1$.

t-Нормой называется некоторая функция $T(x, y)$, определенная на $[0,1] \times [0,1]$ и удовлетворяющая условиям:

T—1. $T(a, 1) = T(1, a) = a$; $T(0, 0) = 0$ и $T(1, 1) = 1$.

T—2. $T(c, d) \geqq T(a, b)$, если $c \geqq a$ и $d \geqq b$.

T—3. $T(a, b) = T(b, a)$.

T—4. $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$.

SM-пространство (X, F) называется пространством Менгера (см. [36], [34], [37]), а F — метрикой Менгера, если существует такая t-норма $T(x, y)$, что

SMT. $F_{pr}(x + y) \geqq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$ для любых $p, q, r \in X$ и $x, y \geqq 0$.

Пространство Менгера обозначается через (X, F, T). Поскольку F является a_0-симметрикой, то SM-пространства являются топологическими с топологией τ_F.

Наша цель — указать, когда топологическое пространство является SM-пространством или пространством Менгера.

Для любого $x > 0$ и $x < 1$ положим

$$H_x^1(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \leqq 0; \\ \frac{1-x}{x} y, \text{ если } y \leqq x \text{ и } y > 0; \\ \frac{y - x^2}{y}, \text{ если } y \geqq x. \end{cases}$$

Для $x \geqq 1$ положим $H_x^1(y) = 0$ для любой точки $y \in R$ и $H_0^1 = H$. Для любого $x > 0$ положим

$$H_x^2(y)=\begin{cases} 0, \text{ если } y \leqslant 0; \\ \frac{y}{x}, \text{ если } y > 0 \text{ и } y < x; \\ 1, \text{ если } y \geqslant x, \end{cases}$$

Теперь вводим обозначения

$$D_1=\{H_x^1 \mid x \geqslant 0\}.$$

$$D_2=\{H_x^2 \mid x > 0\} \cup \{H\}.$$

$$D^+=\{f \in D \mid f(x)=1 \text{ для некоторого } x\}.$$

$$D^-=\{f \in D \mid f(x) < 1 \text{ для любого } x\} \cup \{H\}.$$

$$T_0(a, b)=\begin{cases} \min\{x, y\}, \text{ если } \max\{x, y\}=1, \\ 0, \text{ если } \max\{x, y\} < 1. \end{cases}$$

Лемма 14.2. Функция T_0 является t-нормой.

Теорема 14.1. Пусть отображение $F: X \times X \to D$ удовлетворяет условиям SM-1, SM-2 и условию:

SJ. $F_{pq} \in D^-$ для любых $p, q \in X$.

Тогда (X, F, T_0) является пространством Менгера.

Доказательство. Поскольку F удовлетворяет условию SJ, то функция F удовлетворяет и условию SM-3. Покажем, что $F_{pr}(x+y) \geqslant T_0(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$ для любых $p, q, r \in X$ и $x, y \geqslant 0$. Фиксируем точки $p, q, r \in X$ и числа $x, y > 0$. Если $\max\{F_{pq}(x) F_{qr}(y)\} < 1$, то $F_{pr}(x+y) \geqslant 0 = T_0 F_{pq}(x), F_{qr}(y))$. Пусть $\max\{F_{pq}(x), F_{qr}(y)\}=1$. В этом случае либо $p=q$, либо $q=r$. Если $p=q$, то $F_{pr}(x+y)=F_{qr}(x+y) \geqslant F_{qr}(y) = T_0(1, F_{qr}(y))=T_0(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$. Если же $q=r$, то $F_{pr}(x+y) = F_{pq}(x+y) \geqslant F_{pq}(x)=T_0(F_{pq}(x), 1)=T_0(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$. Теорема доказана.

Теорема 14.2. Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:

1. Пространство X $\mathbf{a}_0$-симметризуемо.
2. Пространство X SM-метризуемо.
3. Пространство X является пространством Менгера.

Доказателство. $3 \to 2 \to 1$. Очевидно.

$1 \to 3$. Если пространство X $\mathbf{a}_0$-симметризуемо, то существует симметрика $\rho: X \times X \to R$, где $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in X$. Строим функцию $F: X \times X \to D_1 \subseteq D^-$, где $F_{xy}=H^1_{\rho(x,y)}$ для любых x, y. Ясно, что функция F удовлетворяет условиям SM-1, SM-2 и SJ. Покажем, что симметрики ρ и F равномерно эквивалентны. Для этого достаточно доказать, что для любого числа n и каждой точки $x \in X$ имеем

$$\left\{y \in X \mid \rho(x, y) < \frac{1}{n}\right\}=\left\{y \in X \mid F_{xy} \in v_n\right\}.$$

Действительно, если $\rho(x,y) < 1/n$, то $F_{xy}\left(\frac{1}{n}\right) > 1-\rho(x,y) > 1-\frac{1}{n}$. Поэтому $F_{xy} \in v_n$. Если $F_{xy} \in v_n$, то $F_{\rho(xy)}\left(\frac{1}{n}\right) > 1-\frac{1}{n}$. А это возможно лишь только при условии $\rho(x,y) < \frac{1}{n}$. Равенство и теорема доказаны. Кроме того мы доказали

Предложение 14.1. Всякая a_0-симметрика, удовлетворяющая аксиоме (T_1), равномерно эквивалентна некоторой метрике Менгера.

Рассмотрим t-норму $T_1(a,b)=\min\{a,b\}$.

Предложение 14.2. Пусть $\rho: X\times X\to R$ — метрика. Положим $F_{xx}=H$ и $F_{xy}=H^2_{\rho(x,y)}$. Тогда симметрики ρ и F равномерно эквивалентны и (X,F,T_1) — пространство Менгера.

Доказательство. Если $\rho(x,y) < \frac{1}{n}$, то $F_{xy} \in v_n$. Пусть $F_{xy} = H^2_{\rho(x,y)} \in v_{2n}$ и $n \geq 2$. Тогда $\rho(x,y) < \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$. А это означает, что симметрики ρ и F равномерно эквивалентны. Условия SM-1 и SM-2 выполняются. Покажем, что и условие SM-3 выполняется. Пусть $F_{pq}(x)=1$ и $F_{qr}(y)=1$. Тогда $\rho(p,q) \leq x$ и $\rho(q,r) \leq y$. Поскольку ρ-метрика, то $\rho(p,r) \leq x+y$ и поэтому $F_{pr}(x+y)=1$.

Теперь покажем, что (X,F,T_1) удовлетворяет условию SMT. Пусть $p, q, r \in X$ и $x, y > 0$. Нам достаточно доказать, что $F_{pr}(x+y) \geq \min\{F_{pq}(x), F_{qr}(y)\}$. Последнее неравенство вытекает из следующей леммы.

Лемма 14.3. Для любых положительных чисел $\{a, b, x, y\}$ имеем $\frac{x+y}{a+b} \geq \min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$.

Доказательство. Вычислим, при каких условиях $\frac{x+y}{a+b} \geq \frac{x}{a}$. Умножим неравенство на $a(a+b)$. Получим $ax+ay \geq ax+bx$, то есть $ay \geq bx$. Тогда $\frac{x+y}{a+b} \geq \frac{x}{a}$, если $\frac{x}{y} \leq \frac{a}{b}$. Аналогично получаем, что $\frac{x+y}{a+b} \geq \frac{y}{b}$, если $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$. Поскольку хотя бы одно неравенство $\frac{x}{y} \leq \frac{a}{b}$ или $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$ выполняется, то $\frac{x+y}{a+b}$ $\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$. Лемма и предложение 14.2 доказаны.

Предложение 14. 3. Пусть (X, F) SM-пространство, удовлетворяющее условию:

СП. $F_{pq} \in D_2$ для любых $p, q \in X$.

Положим $\rho(p, q)=\min\{x \in R \mid F_{pq}(x)=1\}$. Тогда ρ является метрикой, равномерно эквивалентной F.

Доказательство. Если $\rho(p, q) < \frac{1}{n}$, то $F_{pq}\left(\frac{1}{n}\right)$ и поэтому $F_{pq} \in v_n$.

Если $F_{pq} \in V_{2n}$, то $\rho(p, q) < \frac{1}{n}$. Таким образом, симметрики ρ и F равномерно эквивалентны. Пусть $p, q, r \in X$. Тогда, если $\rho(p, q) = x$ и $\rho(q, r) = y$, то $F_{pq}(x) = 1$ и $F_{qr}(y) = 1$. По условию SM-3, $F_{pr}(x+y) = 1$. Значит $\rho(p, r) \leq x + y = \rho(p, q) + \rho(q, r)$. Предложение доказано.

Пространство (X,F,T) называется строгим пространством Менгера, если t-норма T непрерывна в точке (1, 1).

Теорема 14.3. Всякое строгое пространство Менгера a_0-метризуемо. Если пространство a_0-метризуемо, то оно является строгим пространством Мангера.

Доказательство. Пусть (X,F,T) — строгое пространство Менгера. Докажем, что F удовлетворяет условию (рП). Пусть $v_n \in v_D$. Существует число m, для которого $1 - T(x, y) < \frac{1}{n}$, как только $|x-y| + |y - 1| < \frac{1}{m}$. Положим $k = 2(n+m)$. Пусть $F_{pq}, F_{qr} \in v_k$. Тогда $F_{pq}\left(\frac{1}{k}\right) > 1 - \frac{1}{k}$ и $F_{qr}\left(\frac{1}{k}\right) > 1 - \frac{1}{k}$. По условию $F_{pr}\left(\frac{1}{n}\right) \geq F_{pr}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) \geq T\left(F_{pq}\left(\frac{1}{k}\right), F_{qr}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad 1 - \frac{1}{k} > 1 - \frac{1}{n}$, т. е. $F_{pr} \in v_n$. Поскольку t-норма T_1 непрерывна, то предложение 14. 2 завершает доказательство.

В заключение отметим, что условие SM-3 очень близко к аксиоме (Δ), но для SM-метрик с условием SJ оно бессильно. Для того, чтобы SM-метрика была „хорошей", она должна быть устроена подобно SM-метрикам с условием SJ. Класс пространств Мангера также широк. Для того, чтобы пространство Менгера было „хорошим", естественно рассматривать только непрерывные t-нормы. Попытки изучения топологии SM-пространств и пространств Менгера были сделаны в работах [34], [37]. Поскольку, в силу теоремы 14.2, всякое SM-пространство a_0-симметризуемо и наоборот — всякое a_0-симметризуемое пространство является SM-пространством, то мы свели изучение топологии SM-пространств к изучению топологии a_0-симметризуемых пространств. В настоящее время топология последних довольно хорошо изучена.

§ 15. Примеры шкал

Пусть E — частично упорядоченное множество с первым элементом 0, удовлетворяющее условиям:

e1. Множество $\Lambda = E \setminus \{o\}$ не пусто.

e2. Если $\alpha, \beta \in \Lambda$, то существует $\mu \in \Lambda$, для которого $\mu \leq \alpha$ и $\mu \leq \beta$.

Иногда на множество E будем накладывать и следующие условия:

e3. Множество Λ не содержит первого элемента.

e4. Множество E линейно упорядочено.

Для каждаго элемента $\xi \in \Lambda$ положим

$$v_\xi^{\mathrm{I}} = \{\mu \in E \mid \mu \text{ не } \geq \xi\}, \quad v_\xi^{\mathrm{II}} = \{\mu \in E \mid \mu < \xi\}.$$

Лемма 15.1. Множество E удовлетворяет условию e4 тогда и только тогда, когда $v_\xi^{\mathrm{I}} = v_\xi^{\mathrm{II}}$ для любого элемента $\xi \in \Lambda$.

Системы $V_E^{\mathrm{I}} = \{v_\xi^{\mathrm{I}} \mid \xi \in \Lambda\}$, $V_E^{\mathrm{II}} = v_\xi^{\mathrm{II}} \mid \xi \in \Lambda\}$ являются базисами некоторых фильтров. Таким образом, с множеством E можно связать две шкалы $(E, o, V_\xi^{\mathrm{I}})$ и $(E, o, V_E^{\mathrm{II}})$.

Лемма 15.2. Если E удовлетворяет условию e4, то шкала $(E, o\ V_E^{\mathrm{I}})$ (и шкала E, o, V_E^{II})) полуупорядочена. Обратное не всегда так.

Пример 15.1. Пусть $E = \{(x, 0), (0, x) \mid x > 0\}$. На множестве E введим порядок: $(x_1, 0) > (x_2, 0)$ и $(0, x_1) > (0, x_2)$, как только $x_1 > x_2$. Точки $(x, 0)$ и $(0, x)$ несравнимы при $x > 0$. Если $x > y$, то $(x, 0) > (0, y)$ и $(0, x) > (y, 0)$. Легко заметить, что шкала (E, o, V_E^{I}) полуупорядочена, а множество E неупорядочено.

Пусть $\rho : X \times X \to E$ — отображение. На ρ будем накладывать следующие условия:

M1. $\rho(x, x) = o$ для любой точки $x \in X$;

M2. если $\rho(x, y) = o$, то $x = y$;

M3. для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что, если $\rho(a, b) < \mu$, то $\rho(b, a) < \lambda$;

M4. для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что, если $\rho(a, b) < \mu$ и $\rho(b, c) < \mu$, $\rho(a, c) < \lambda$.

M5. для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что, если $\rho(a, b)$ не $\geqq \mu$ и $\rho(b, c)$ не $\geqq \mu$, то $\rho(a, c)$ не $\geqq \lambda$.

M6. для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что, если $\rho(a, b)$ не $\geqq \mu$, то $\rho(b, a)$ не $\geqq \lambda$.

M7. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ для любых $a, b \in X$.

Со всяким отображением $\rho : X \times X \to E$, удовлетворяющим условию M1, можно каноническим образом связать два о-метрических пространства $\{X, \rho, (E, o, V_E^{\mathrm{I}})\}$ $\{X, \rho, (E, o, V_E^{\mathrm{II}})\}$. Следующие утверждения выясняют сущность условий M2—M7 для этих метрических пространств.

У1. Условие M2 равносильно тому, что о-метрические пространства $\{X, \rho, (E, o, V_E^{\mathrm{I}})\}$, $\{X, \rho, (E, o, V_E^{\mathrm{II}})\}$ являются T_1-пространствами, а о-метрика ρ удовлетворяет аксиоме (T_1).

У2. Функция ρ удовлетворяет условию M3. Тогда существует такое отображение $d : X \times X \to E$, для которого:

а) для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что если $d(a, b) < \mu$ и $\rho(c, d) < \mu$, то $\rho(a, b) < \lambda$ и $d(c, d) < \lambda$;

б) функция d удовлетворяет условию M7.

Доказательство. Строим отображение $F : E \times E \to E$, удовлетворяющее условиям:

1) $F(o, a) + F(a, o) = a$ для любой точки $a \in E$;

2) $F(a, b) = F(ba)$ для любой точки $a, b \in E$;

3) если $a > o$ и $b > o$, то либо $F(a, b) = a$, либо $F(a, b) = b$.

Такое отображение легко строится при помощи аксиомы выбора.

Теперь положим $d(x, y) = F(\rho(x, y), \rho(y, x))$ для любых $x, y \in X$. Оче-

видно, что d удовлетворяет условию М7. Покажем, что выполняется условие а). Пусть $\lambda \in \Lambda$. В силу М3 и е2, найдется $\mu \in \Lambda$ такой, что $\mu < \lambda$ и, если $\rho(x, y) < \mu$, то $\rho(y, x) < \lambda$. Покажем, что μ — искомый элемент. Пусть $d(a, b) < \mu$. Тогда либо $\rho(a, b) < \mu$, либо $\rho(b, a) < \mu$. Поэтому $\rho(a, b) < \lambda$. Если $\rho(c, d) < \mu$, то $\rho(c, d) < \lambda$ и $\rho(d, c) < \lambda$. Поэтому $d(c, d) < \lambda$. Утверждение доказано.

Замечание 15.1. Функции $\rho: X \times X \to E$, $d: X \times X \to E$ называются β-эквивалентными, если они удовлетворяют условию а) из У2.

У3. Если функции ρ, d β-эквивалентны и ρ удовлетворяет условию М4 соответственно М2), то и d удовлетворяет условию М4 (соответственно М2).

Функции $\rho: X \times X \to E$, $d: X \times X \to E$ α-эквивалентны, если для любого $\lambda \in \Lambda$ существует $\mu \in \Lambda$ такой, что $\rho(a, b)$ не $\geqq \lambda$ и $d(c, l)$ не $\geqq \lambda$, как только $d(a, b)$ не $\geqq \mu$ и $\rho(c, l)$ не $\geqq \mu$.

У4. Если функции ρ и d, определенные на $X \times X$, α-эквивалентны и ρ удовлетворяет некоторому из условий М1, М2, М5, М6, то и d удовлетворяет тому же условию.

У5. Если $\rho: X \times X \to E$ удовлетворяет условию М6, то ρ α-еквивалентно некоторому отображению $d: X \times X \to E$, удовлетворяющему условию М7.

Доказательство. Положим $d(x, y) = F(\rho(x, y), \rho(y, x))$. Также, как и при доказательстве У2 проверяется, что d искомое отображение.

У6. Пусть $\rho: X \times X \to E$ удовлетворят условию М1. Тогда следующие условия равносильны:

1) Отображение ρ удовлетворяет условию М4.

2) о-метрика $\rho: X \times X \to (E, o, V_E^{\text{II}})$ удовлетворяет условию (рП).

Доказательство. 1 $\to$ 2. Пусть ρ удовлетворяет условию М4 и $v \in V_E^{\text{II}}$. Тогда $v = v_\xi^{\text{II}}$ для некоторого $\xi \in \Lambda$. По условию, найдется $\mu \in \Lambda$ такой, что если $\rho(a, b) < \mu$ и $\rho(b, c) < \mu$, то $\rho(a, c) < \xi$. Это эквивалентно тому, что $\rho(a, c) \in v$, как только $\rho(a, b) \in v_\mu^{\text{II}}$ и $\rho(b, c) \in v_\mu^{\text{II}}$. Следовательно, $\rho: X \times X \to (E, o, v_E^{\text{II}})$ удовлетворяет условию (рП).

2 $\to$ 1. Пусть $\xi \in \Lambda$. По условию (рП), найдется $v_\mu^{\text{II}} \in v_\xi^{\text{II}}$ такой, что если $\rho(a, b) \in v_\mu^{\text{II}}$ и $\rho(b, c) \in v_\mu^{\text{II}}$, то $\rho(a, c) \in v_\xi^{\text{II}}$. Следовательно, $\rho(a, c) < \xi$, как только $\rho(a, b) < \mu$ и $\rho(b, c) < \mu$. Утверждение доказано. Таким же образом доказывается

У7. Пусть $\rho: X \times X \to E$ удовлетворяет условию М1. Тогда следующие условия равносильны:

1. Отображение ρ удовлетворяет условию М5.

2. О-метрика $\rho: X \times X \to (E, o, V_E^{\text{I}})$ удовлетворяет условию (рП).

С-метрическое пространство $\{X, \rho, (E, o, V_E^{\text{I}})\}$ называется пространством Курепа-Фреше, если E удовлетворяет условиям е1—е4, а ρ удовлетворяет условиям М1, М2, М4, М7. В силу У4 и У5, вместо М7 можно требовать М3 или М6.

Из леммы 15.2, У6 и результатов § 13 вытекает

Теорема 15.1. Пусть X-пространство Курепа-Фреше. Тогда:

1. Пространства $X, X^2, \cdots, X^n, \cdots$ являются пространствами Курепа-Фреше и наследственно коллективно нормальны.

2. Если X содержит счетное незамкнутое множество или $\psi(X) \leq \aleph_0$, то X $\aleph_0$-метризуемо.

3. Пространство X $\aleph_0$-метризуемо тогда и только тогда, когда есть k-пространство.

4. Если X счетнокомпактно, то X $\aleph_0$-метризуемо.

О-метрическое пространство $\{X, \rho, (E, o, V_E^{II})\}$ называется пространством Апперта-Колме, если E удовлетворяет условиям e1—e3, а ρ удовлетворяет условиям M1—M4. Из У2 и У3 вытекает, что вместо M3 можно требовать выполнения условия M7. В силу У6 и теоремы 12.1, все пространства Апперта-Кольме вполне регулярны.

Теорема 15.2. Всякое пространство Апперта-Колме уплотняется на некоторое пространство Курепа-Фреше.

Доказательство. Пусть $\rho: X \times X \to E$ удовлетворяет условиям e1—e2 и M1, M2, M4, M7. Во-первых, мы построим порядковое число ξ и множество $L = \{a_\alpha \in E \mid \alpha < \xi\}$, удовлетворяющие условиям:

1. если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $a_{\alpha_1} < a_{\alpha_2}$;

2. если $a_{\alpha_1} < a_{\alpha_2}$ и $\rho(x, y) < a_{\alpha_1}$, $\rho(y, z) < a_{\alpha_2}$, то $\rho(x, z) < a_{\alpha_2}$.

3. $\bigcap_a O^e_{V_a''} x \mid a \in L\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

Доказательство проведем методом трансфинитной индукции. Пусть a_1 — произвольная точка из Λ. Положим $L_1 = \{a_1\}$. Пусть теперь для любого $\alpha < \alpha_0$ построены множества $L_\alpha = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$, удовлетворяющие условиям 1 и 2 и условию $L_{\alpha_1} \subseteq L_{\alpha_2}$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. Положим $L_{\alpha_0} = \{a_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$. Ясно, что L_{α_0} удовлетворяет условиям 1 и 2. Если L_{α_0} удовлетворяет и условию 3, то положим $L = L_{\alpha_0}$ и $\xi = \alpha_0$. Если же L_{α_0} не удовлетворяет условию 3, то найдутся точки $x, y \in X$, для которых $y \in \bigcap\{O^e_{V_a''} x \mid a \in L_{\alpha_0}\}$ и $x \neq y$. Тогда $\rho(x, y) < a_\alpha$ для любого $\alpha < \alpha_0$. Найдется (по M4) точка $a_{\alpha_0} \leq \rho(x, y)$ такая, что, если $\rho(x_1, y_1) < a_{\alpha_0}$, и $\rho(y_1, z_1) < a_{\alpha_0}$, то $\rho(x_1, z_1) < \rho(x, y)$. Положим $L_{\alpha_0+1} = L_{\alpha_0} \cup \{a_{\alpha_0}\}$. Поскольку $y \in \{\bigcap O^e_{V_a''} x \mid a \in L_{\alpha_0+1}\}$, то для некоторого θ множество L_θ будет удовлетворять и условию 3. Этим мы доказали существование порядковой числа ξ и множества $L = L_\xi = \{a_\alpha \mid \alpha < \xi\}$, удовлетворяющих условиям 1—3. Рассмотрим тепер подмножество $E_1 = L \cup \{0\}$ множества E. Строим функцию $d: X \times X \to E_1$, где

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y \\ a_\alpha, \text{ где } \alpha = \min\{\beta < \xi \mid y \in O^e_{V_a''} x\}, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

В силу условия 3 функция d удовлетворяет условиям M1, M2. Поскольку ρ удовлетворяет условию M7, то и d удовлетворяет условию

M7. Покажем, что для любых $\alpha<\theta$ и $x\in X$ имеем:

$$O^{d}_{v'_{a_\alpha}}x=O^{\rho}_{v''_{a_\alpha}}x \qquad (**)$$

Пусть $y\in O^{d}_{v'_{a_\alpha}}$, то есть $d(x, y)<a_\alpha$. Тогда $y\in O^{\rho}_{v''_{a_\alpha}}x$. Если $\rho(x, y)\in v''_{a_\alpha}$ и $d(x, y)=a_\beta$, то $\beta>\alpha$. Поэтому $a_\beta<a_\alpha$ и $d(x, y)<a_\alpha$. Равенство $(_{**})$ доказано. Из равенства (**) и условия 2 вытекает, что d удовлетворяет условию M4. Таким образом $\{X, d, (E_1, o, V'_{E_1})\}$ является пространством Курепа-Фреше. Из равенства (**) вытекает, что тождественное отображение $f:(X,\tau_\rho)\longrightarrow(X,\tau_d)$, где $f(x)=x$, непрерывно. Более того, это отображение равномерно непрерывно. Теорема доказана.

Из теорем 15.1 и 15.2 вытекает

Следствие 15.1. Пусть $\{X, \rho, (E, o, V''_E)\}$ — пространство Апперта-Колме. Тогда

1. Если (X, τ_ρ) содержит счетное незамкнутое множество, то (X, τ_ρ) уплотняется на a_0-метризуемо пространство.
2. Если (X, τ_ρ) является k-пространством, то (X, τ_ρ) уплотняется на некоторое a_0-метризуемое пространство.
3. Если (X, τ_ρ) счетнокомпактно, то (X, τ_ρ) a_0-метризуемо.
4. Если (X, τ_ρ) бикомпактно, то (X, τ_ρ) a_0-метризуемо.

Из следствий 8. 2 [10] и 15.1 вытекает

Следствие 15.2. Всякое паракомпактное p-пространство Апперта-Колме a_0-метризуемо.

Мы видим, что всякое пространство Курепа-Фреше является пространство Апперта-Колме. Более того, всякое пространство Апперта-Колме уплотняется на некоторое пространство Курепа-Фреше. Следующий пример показывает, что не всякое пространство Апперта-Колме является пространством Курепа-Фреше.

Пример 15.2. Положим $I_n=[0, 1]$ и

$$E=\{x=\{x_n\}\in\prod_{n=1}^{\infty}I_n \quad x_n>0$$

для любого $n=1, 2, \cdots\}\cup\{o=\{0_n\}\}$. Ясно, что множество E удовлетворяет условиям e1—e3. Точки множества $E_1=E\setminus\{0\}$ упорядочим по типу $c=2^{\sigma_0}$. Пусть $E_1=\{x_\alpha=\{x^\alpha_n\}\mid\alpha<c\}$. Методом трансфинитной индукции строится такое множество $X_1=\{y_\alpha=\{y^\alpha_n\}\in E_1 \mid \alpha<c\}$, что:

1) $y^\alpha_n\leq x^\alpha_n$ для любых $\alpha<c$ и $n=1, 2, \cdots$.
2) Если $\alpha\neq\beta$, то $y^\alpha_n\neq y^\beta_n$ для любого $n=1, 2\cdots$

Положим $X=X_1\cup\{o=\{o_n\}\}$. Строим функцию $\rho:X\times X\longrightarrow E$, где $\rho(\{x_n\}, \{y_n\})=\{|x_n-y_n|\}$. Нетрудно проверить, что $(X, \rho, (E, o, V''_E))$ — пространство Апперта-Колме и (X, τ_ρ) уплотняется на a_0-метризуемое пространство. Пространство (X, τ_ρ) не a_0-метризуемо, посколь-

ку в точке $o=\{o_n\}$ не выполнима первая аксиома счетности. Покажем, что (X, τ_ϱ) не является пространством Курепа-Фреше. Допустим, что $\{X, d, (E_1, o, V'_{E_1})\}$ удовлетворяет условиям e1—e4, M1—M4 и $\tau_d=\tau_\varrho$. Тогда для каждого элемента $x^m=\left\{\frac{1}{m}\right\}\in E(x^m=\{x_n\}$, где $\frac{1}{m}=x_1=x_2=\cdots=x_n=\cdots)$ существует элемент $a_m\in E_1$, для которого $O^d_{v_{a_m}}\cdot o\subseteq O^\varrho_{v_{x^m}}\cdot o$. Возможны два случая:

а) Существует $a\in E_1$ такой, что $a\leq a_m$ для любого $m=1, 2, \cdots$ В этом случае $O^d_{v_a}\cdot o=\{o\}$. Следовательно, точка o изолирована в X. Но это не так. Значит данный случай исключен.

б) Для любого $a\in E_1$ найдется m такой, что $a\geq a_m$. В данном случае шкала (E_1, o, V'_{E_1}) является $\mathfrak{a}_0$-шкалой, так как можно положить $V'_{E_1}=\{v'_{a_m}\mid m=1, 2, \cdots\}$. Но тогда пространство $(X, \tau_\varrho=\tau_a)$ $\mathfrak{a}_0$-метризуемо. Таким образом, и этот случай исключается. Следовательно $(X\ \tau_\varrho)$ не является проетранством Курепа-Фреше.

Из результатов § 6 вытекает

Предложение 15.1. Пусть X — пространство Апперта-Колме. Тогда и $X^2, X^3, \cdots, X^n, \cdots$ являются пространствами Апперта. Колме.

Пример 15.3. Существует такое пространство Куреппа-Фреше X, что $X\times[0, 1]$ не является пространством Апперта-Колме.

Пусть $\theta>\mathfrak{a}_0$, где θ — регулярное кардинальное число. Тогда пространство X_θ не уплотняется ни на какое метрическое пространство. Если $X_\theta\times[0, 1]$ будет пространством Апперта-Колме, то $X_\theta\times[0, 1]$ должен уплотняться на некоторое $\mathfrak{a}_0$-метризуемое пространство. Но это невозможно. Следовательно, $X_\theta\times[0, 1]$ не является пространством Апперта-Колме.

Предложение 15.2. Пусть X и Y — пространства Курепа-Фреше. Тогда $X\times Y$ является пространством Курепа-Фреше тогда и только тогда, когда $O(X)=O(Y)$.

Это предложение непосредствено вытекает из предложения 13.3. О-метрическое пространство $\{X, \rho, (E, o, V'_E)\}$ называется пространством Колме, если E удовлетворяет условиям e1—e3, а ρ— условиям M1, M2, M5, M6. Из У7 вытекает, что всякое пространство Колме вполне регулярно.

Предложение 15.3. Всякое вполне регулярное пространство являетстя пространством Колме.

Доказательство. Пусть X — вполне регулярное пространство. В силу теоремы 15 из ([17], стр. 251) топология пространства X порождается некоторым семейством $\{\rho_\alpha(x, y)\mid\alpha\in A\}$ псевдометрик. Мы можем предполагать, что для любых $\alpha, \beta\in A$ существует $\xi\in A$ такой, что $\rho_\xi(x, y)=\rho_\alpha(x, y)+\rho_\beta(x, y)$ для любых $x, y\in X$. Тогда для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\in A$ и псевдометрика

$$\rho_\xi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}(x, y)$$

содержится в семействе $\{\rho_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Ясно, что $\rho: X \times X \to R^A$, где $\rho(x,y) = \{\rho_\alpha(x,y)\}$, является метрикой над полуполем R^A и τ_ρ совпадает с заданной на X топологией. Положим $E_1 = \{\rho(x, y) \in R^A \mid x, y \in X\}$, то есть $E_1 = \rho(X \times X)$, и $E = \{\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in E_1\}$. Множество E удовлетворяет условию e1. Легко заметить, что E удовлетворяет и условию e2. Если X не дискретно, то E удовлетворяет и условию e3. Если X дискретно, то можно взять $E = [0, +\infty)$. Предложение У7 завершает доказательство.

Таким образом, класс пространств Колме совпадает с классом вполне регулярных пространств.

Этим мы заканчиваем исследование шкал. О строении других шкал, а также о других подходах к проблеме метризации можно узнать в книге Мамузича [23]. Здесь следует отметить и работу [46], в которой указаны некоторые применения метрик в теории меры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, П. С., Урысон, П. С.: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D). C. R. Paris, **174** (1923), 1270—1276.
2. Александров, П. С.: О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние 25 лет. УМН, **15**, вып. 2 (1960), 25—95.
3. Александров, П.С.: О некоторых основных направлениях в общей топологии. УМН **19**, вып. 6 (1961), 3—46.
4. Александров, П. С.: О счетнократных отображениях. ДАН СССР, **4**, № 7 (1936), 283—287.
5. Александров, П.С., Немыцкий, В. В.: Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии Мат. сб., **3** (45), № 3 (1938), 663—672.
6. Антоновский, М. Я., Болтянский, В.Г., Сарымсаков, Т. А.: Очерк теории топологических полуполей. УМН, **21**. вып. 4 (1966), 185—218.
7. Антоновский, М. Я.: Об одном обобщении метризационной теоремы П. Александрова и П. Урысона. ДАН УзССР, № 1 (1962). 3—5.
8. Антоновский, М. Я.: Структуры, связанные с обобщенными метриками. Труды международного симпозиума по топологии и ее приложениям. Херцег-Нови (Югославия), 25—31. 8. 1968. Београд, 1969.
9. Архангельский, А. В.: Новые критерии метризуемости произвольного T_1-пространства, ДАН СССР. **141**, № 1 (1961), 13—15.
10. Архангельский, А. В.: Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. Мат. сб., **67** (109), № 1 (1965), 55—85.
11. Архангельский, А. В.: Отображения и пространства УМН, **21**, вып. 4 (1966), 133—184.
12. Архангельский, А. В.: Теорема о метризуемости прообраза метрического пространства при открыто-замкнутом конечнократном отображении. ДАН СССР, **170**, №4 (1966), 759—762.
13. Apert, A: Écart partiellement ordonné et uniformité. C. R. Paris, **224** (1947), 442—444.
14. Bing, R.: Metrization of topological spaces. Canad. J. Math., **3** (1951), 175—186.

15. Weil, A.: Sur les éspaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Actualités Sci., Jnd., **551** (1937), Paris.
16. Gomes, A.: Topologie induite par un pseudodiamètre. C. R. Paris, **227** (1948) 107—109.
17. Келли, Дж. Л.: Общая топология. „Наука", М., 1968.
18. Кофнер, Я. А.: Об одном новом классе пространств и некоторых задачах из теории симметризуемости. ДАН СССР, **187**, № 2 (1969).
19. Colmez, J.: Espaces à écart généraligé régulier. C. R. Paris, **224** (1947), 372—373.
20. Kurepa, G.: Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés C. R. Paris, **196** (1934), 1563—65.
21. McAuley, L. F.: A relation between separability, completness and normality in semi-metric spases. Pacific J. Math., **6** (1956), 315—326.
22. McAuley, L. F.: A note on compl ete collectionwise normality and paracompactness. Proc. Amer. Math. Soc., **9**, (1958), №5.
23. Mamuzic, Z.: Interoduction to general topology. Noordhoff. Groningen, 1963.
24. де Марр, Р., Флейшер, И.: Метрические пространства над частично упорядоченными полугруппами. Труды IV всесоюзной топологической конференции, Ташкент, 1967.
25. Nagata, J.: On a necessary and sufficient condition of metrizability. Jnstit. Polytech. Osaca City Univ., **1** (1950), 93—100.
26. Недев, С. Й; Об обобщенно метризуемых пространствах. Докл. Болг. Акад. Наук **20**, № 6, (1967), 513—516.
27. Недев, С. Й.: Симметризуемые пространства и финальная компактность. ДАН СССР **175**, №3 (1967), 532—535.
28. Недев, С. Й., Чобан, М. М.: О метризуемости топологических групп. Вестник МГУ, сер. мат., № 6 (1968), 18—20.
29. Niemytzkii, V. V.: On the third axiom of metric spaces. Trans. Amer. Math, Soc., **29**, №3 (1927), 507—513.
30. Niemytzkii, V. V.: Über die Axiome des metrischen Raumes. Math. Ann. **104**, № 5 (1931), 666—671.
31. Ceder, J. G.: Some generalization of metric spaces. Pacific J. Math., **11**, № 1 (1961), 105—125.
32. Смирнов, Ю. М.: О метризации топологических пространств. УМН, **6**, вып. 6, (1951), 100—111.
33. Stone, A. H.: Sequences of coverings. Pacific J. Math., **10**, № 2 (1960), 689—691.
34. Thorp, E. O.: Generalized topologies for statistical metric spaces. Fund. Math., **51**, № 1 (1962), 9—21.
35. Плыкин, Р. В.: О р-свойстве и метризации над полуполями. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 5 (1963), 14—20.
36. Menger, K.: Statistical metrics. Acad. of USA, **28** (1942), 535—537.
37. Schweizer, B., Sklar, A.: Statistical metric spaces. Pacific J. Math., **10**, № 1 (1960), 313—334.
38. Федорчук, В.: Упорядоченные множества и произведения топологических пространств. Вестник МГУ, сер. мат., № 4 (1966), 66—71.
39. Fréchet, M.: Sur quelques point du calcul fonctionell. Rend. Palermo, **22** (1906), 1—74.
40. Fréchet, M.: De l'écart numérique à l'écart abstrait. Portug. Math., **5**, № 2 (1946), 121—130.
41. Frink, A. H.: Distance functions and the metrization problem. Bull. Amer. Math. Soc., **43** (1937), 133—142.
42. Czaszar, A.: Grundlagen der algemeinen Topologie. Akad. Kiadó, Budapest, 1963,
43. Урысон, П. С.: Труды по топологии и другим областям математики, тт. I, II. Гостехиздат, М. —Л., 1951.
44. Chittenden, E. W.: On the equivalence of „écart" and „voisinage". Trans Amer. Math. Soc., **18** (1917), 161—166.

45. Heath, R. W.: Arc-wise connectedness in semi-metric spaces. Pacific J. Math., **12**, № 4 (1962), 1301—1320.
46. Price, C. B.: A generalization of a metric space with application to space whose elements are sets. Amer. J. Math., **63** (1941), 46—56.

Постъпила на 9. XI. 1971 г.

GENERAL CONCEPTIONS OF THE METRIZATION OF TOPOLOGICAL SPACES

S. I. Nedev, M. M. Choban

(SUMMARY)

The notions „θ-o-metrizability", „θ-symmetrizability" and θ-metrizability" are introduced for an arbitrary topological space (θ denotes a cardinal number), in such a manner that in the case $\theta = a_0$ these notions coincide with the classical notions of o-metrizabilty, symmetrizability and metrizability respectively.

Some properties of the θ-o-metrizable spaces are studied, in particular the questions of multiplicity, additivity, hereditarity, the behaviour under the maps of some classes, the connection with some classical notions such as collectionwise normality, compactness, developable space, linearly ordered space etc.

Some θ-o-metrization criteria are obtained.

As an application of the theory of the θ-o-metrizable spaces some connections between the classical metrization criteria are discovered. As an application of the exposed theory it is demonstrated that the class of the Menger's statistical metric spaces coincides with the class of the symmetrizable spaces.

The paper contains many examples justifiyng the proved theorems.