ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДУБЛИРОВАНИЯ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Боян Н. Димитров, Владимир А. Зайцев

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из одного основного и одного резервного элементов — холодный резерв. Время жизни основного (рабочего) элемента есть случайная величина (сл. в.) ξ с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Если рабочий элемент откажет, его немедленно отправляют на ремонт, а на его место сразу же подключают резервный элемент. Время ремонта η случайно с ф. р. $G(x)$. Ремонт полностью восстанавливает все свойства отказавшего элемента. Оба элемента предполагаются однотипными. Подключение резервного элемента к работе в момент отказа основного элемента производится переключателем K (см. рис. 1). Переключатель ненадежен — в момент k-ого переключения он с вероятностью q_k $(k=1, 2, \ldots)$ может не сработать, вследствии чего резервный элемент не успеет приступить к выполнению функций рабочего элемента и система откажет. Отказавший рабочий элемент после ремонта становится в резерв до отказа нового рабочего элемента и далее система функционирует уже описанным образом. В случае отказа рабочего элемента в момент, когда ремонт предыдущего элемента не закончен, система откажет независимо от того, сработал переключатель или нет.

Пусть в начальный момент $t_0=0$ система начинает работу с новым основным и исправным резервным элементами. Через τ обозначим время работы системы до первого отказа. В статье рассматривается предельное распределение нормированной величины τ при условии, что время ремонта мало по сравнению с временем жизни рабочего элемента, а также вероятности q_k равномерно малы (см. формулировку результатов).

Важность рассматриваемой системы обусловлена тем, что она часто встречается во многих практических схемах как самостоятельно, так же и как часть (элемент) более сложных систем. Не останавливаясь на конкретных примеров, мы скажем лишь то, что такая система рассматривается в книге [1], но при более ограничительных условий.

Авторы благодарят А. Д. Соловьева за то что обратил их внимание на эту задачу.

2. Формулировка результата. Обозначим через T_1 среднее время безотказной работы основного элемента

$$T_1=\int_0^\infty t\,dF(t)$$

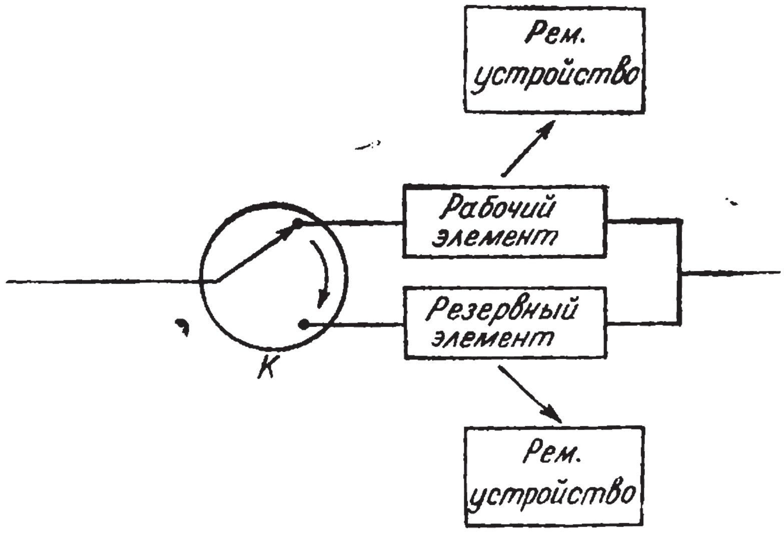

Рис. 1

и предположим, что $T_1<\infty$. Пусть

$$\alpha=P\{\eta>\xi\}=\int_0^\infty[1-G(x)]dF(x).$$

Теорема. Если $G(t)$ и q_k меняются так, что $\alpha\to 0$ и при этом $\max\limits_k q_k\to 0$ так, что для любого $x>0$

(1) $$\sum_{k\leq\frac{x}{\alpha}} q_k\xrightarrow[\alpha\to 0]{}Q(x),$$

то

(2) $$\lim_{\alpha\to 0} P\{\alpha\tau\geqq x\}=e^{-\frac{x}{T_1}-Q\left(\frac{x}{T_1}\right)}.$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, которых мы сформулируем в следующем пункте.

Нам кажется, что любое из них имеет и определенное самостоятельное значение вне нашей задачи.

3. Необходимые вспомогательные утверждения. Символом $\xrightarrow{p}$ обозначим сходимость по вероятности (см. [2]).

Лемма 1. Если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$, то $\xi_n+\eta_n \xrightarrow{p} \xi+\eta$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ любое число. Очевидны следующие включения между событиями

$$\{X+Y\geqq\varepsilon\}\subset\left\{X\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{Y\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

где X и Y — произвольные случайные величины. Отсюда и из монотонности вероятностной меры получаем

$$P\left\{|\xi_n+\eta_n-(\xi+\eta)|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqq P\left\{|\xi_n-\xi|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|\eta_n-\eta|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Из условия леммы правая часть стремится к нулю с ростом n, отчего следует утверждение.

Лемма 2. Если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$, и $P\{\xi<\infty\}=P\{\eta<\infty\}=1$, то $\xi_n\cdot\eta_n \xrightarrow{p} \xi\cdot\eta$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — стохастически ограничены (см. [2]). Пусть $M>0$ — такая константа, что $P\{|\xi_n|\leqq M\}\geqq 1-\frac{\delta}{2}$ для любого n, а также $P\{|\eta|\leqq M\}\geqq 1-\frac{\delta}{2}$, где $\delta>0$. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда

$$P\{|\xi_n\cdot\eta_n-\xi\cdot\eta|\geqq\varepsilon\}=P\{|\xi_n\eta_n-\xi_n\eta+\xi_n\eta-\xi\eta|\geqq\varepsilon\}$$

$$\leqq P\left\{|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\leqq P\left\{|\eta_n-\eta|\geqq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}+P\{|\xi_n|>M\}+P\left\{|\xi_n-\xi|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\{|\eta|>M\}$$

$$\leqq\delta+P\left\{|\eta_n-\eta|\geqq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}+P\left\{|\xi_n-\xi|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Но $\frac{\varepsilon}{2M}>0$. Из условия леммы следует, что с ростом n последняя сумма стремится к нулю. Лемма доказана, ввиду произвольного выбора δ.

Лемма 3. Если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, а ν_n — целочисленные неотрицательные сл. в., и $\nu_n \xrightarrow{p} \infty$ при $n\to\infty$, то

$$\xi_{\nu_n} \xrightarrow{p} \xi \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, $\delta>0$ — произвольные числа. Из условия леммы следует, что есть такие n_0 и n_1, что для всех $n>n_0$

$$P\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}<\frac{\delta}{2}; \quad P\{\nu_n>n_0\}>1-\frac{\delta}{2};\ n>n_1.$$

Теперь очевидно, что при всех $n>n_1$

$$P\{|\xi_{\nu_n}-\xi|\geqq\varepsilon\}=P\{|\xi_{\nu_n}-\xi|\geqq\varepsilon,\ \nu_n>n_0\}+P\{|\xi_{\nu_n}-\xi|\geqq\varepsilon,\ \nu_n\leqq n_0\}$$

$$P\{|\xi_{\nu_n}-\xi|\geqq\varepsilon \text{ для всех } n>n_0\}+P\{\nu_n\leqq n_0\}\leqq\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}.$$

Лемма следует из полученного неравенства ввиду произвольности ε и δ

Лемма 4. Если $\nu_n^{(1)}\xrightarrow{p}\infty$, $\nu_n^{(2)}\xrightarrow{p}\infty$ и последовательности $\{\nu_n^{(1)}\}$ и $\{\nu_n^{(2)}\}$ независимы, то

$$\nu_n=\min\{\nu_n^{(1)},\ \nu_n^{(2)}\}\xrightarrow{p}\infty.$$

Доказательство. Пусть $\delta>0$ и $N>0$ любые числа. Из условия следует, что существует такое n_0, что для всех $n>n_0$

$$P\{\nu_n^{(1)}>N\}\geqq 1-\frac{\delta}{2}, \quad P\{\nu_n^{(2)}>N\}\geqq 1-\frac{\delta}{2}.$$

Тогда при $n>n_0$

$$P\{\nu_n>N\}=P\{\nu_n^{(1)}>N\}.P\{\nu_n^{(2)}>N\}\geqq\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2>1-\delta.$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. Пусть ν_1 — целочисленная сл. в. с распределением

$$P\{\nu_1=k\}=q_k\prod_{i=0}^{k-1}(1-q_i),\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ q_0=0$$

и ν_2 — целочисленная сл. в. с распределением

$$P\{\nu_2=k\}=(1-\alpha)^{k-1}.\alpha.$$

Ясно, что ν_1 представляет число переключений переключателя до первого его отказа; ν_2 — число шагов до момента, когда впервые ремонт продлится дольше времени работы основного элемента. Положим $\nu=\max\{\nu_1+1,\ \nu_2\}$ — число замен „основной — резервный элемент и наоборот" Время „жизни" системы удовлетворяет неравенствам:

$$\xi_1+\xi_1+\cdots+\xi_\nu\leqq\tau<\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\nu+1},$$

где ξ_k — время жизни рабочего элемента после $(k-1)$-го переключения

Отсюда получаем следующие соотношения между событиями

$$(3)\qquad \{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\nu\geqq x\}\subset\{\tau\geqq x\}\subset\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\nu+1}\geqq x\}.$$

Однако $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных сл. в. с конечным математическим ожиданием T_1, следовательно для них выполняется закон больших чисел

$$(4)\qquad \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_n}{n}\xrightarrow{p}1 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Пусть $G(t)$ и q_k меняются так, что $\alpha\to0$ и $\max\limits_k q_k\to0$.

Тогда для любого $A>0$

$$P\{\nu_1>A\}=1-P\{\nu_1\leqq A\}$$

$$=1-\sum_{k\geqq A}q_{k+1}\prod_{i=0}^{k}(1-q_i)\geqq1-\sum_{k\leqq A}q_k\xrightarrow[\alpha\to0]{}1,$$

и аналогично $P\{\nu_2>A\}\to1$. Следовательно, при сделанных нами предположений, $\nu_1\xrightarrow{p}\infty$ и $\nu_2\xrightarrow{p}\infty$, и согласно лемме 4 ν тоже стремится по вероятности к бесконечности. Из последнего и из (4), по лемме 3 выводим, что

$$(5)\qquad \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\nu+\delta}}{\nu+\delta}\xrightarrow{p}1, \text{ где } \delta=0,\ 1.$$

Далее, ввиду независимости ν_1 и ν_2 можем писать

$$(6)\qquad P\{\alpha\nu\geqq x\}=P\left\{\nu_1\geqq\frac{x}{\alpha}\right\}.P\left\{\nu_2\geqq\frac{x}{\alpha}\right\}$$

$$=(1-\alpha)^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}.\prod_{i=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}(1-q_i).$$

Однако

$$(7)\qquad (1-\alpha)^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}=(1-\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}.(1-\alpha)^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]-\frac{x}{\alpha}}\xrightarrow[\alpha\to0]{}e^{-x}.$$

Если $q=\max\limits_k q_k\to0$, то при любом k

$$\ln(1-q_k)=-q_k+O(q_k^2).$$

Поэтому

$$\ln\prod_{i=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}(1-q_k)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}\ln(1-q_k)=-\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}q_k+\sum_{k=0}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}0(q_k^2). \tag{8}$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}O(q_k^2)=q\,.\,O\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}q_k\right)\to 0 \text{ при } \alpha\to 0.$$

Отсюда, из (8) и из (1) следует, что

$$\prod_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]}(1-q_k)\xrightarrow[\alpha\to 0]{}e^{-Q(x)}. \tag{9}$$

Из (6), (7), (9) легко вывести, что

$$P\{\alpha\nu\geq x\}\xrightarrow[\alpha\to 0]{}e^{-x-Q(x)}. \tag{10}$$

По лемме 1 $\lim\limits_{\alpha\to 0}P\{\alpha(\nu+1)\geq x\}=\lim\limits_{\alpha\to 0}P\{\alpha\nu\geq x\}=e^{-x-Q(x)}$.

Теперь из (3) находим

$$P\left\{\frac{\xi_1+\ .\ .\ .\ +\xi_\nu}{\nu T_1}\,.\,\alpha\nu\geq\frac{x}{T_1}\right\}\leq P\{\alpha\tau\geq x\}\leq P\left\{\frac{\xi_1+\ .\ .\ .\ \xi_{\nu+1}}{(\nu+1)T_1}\,.\,\alpha(\nu+1)\geq\frac{x}{T_1}\right\}.$$

Отсюда, ввиду (10) и (5), применив лемму 2, получаем (2). Теорема доказана.

Результаты теоремы можно записать в форме, несколько удобнее для практики:

$$P\{\tau>x\}\sim e^{-\frac{\alpha x}{T_1}-Q\left(\frac{\alpha x}{T_1}\right)}, \tag{11}$$

где функция $Q(x)$ определена условием теоремы. Эту формулу надо читать так: надежность системы при быстром ремонте и равномерно малыми вероятностями отказа переключателя, асимптотически равна правой части (11).

В [3] А. Д. Соловьев нашел условия, которые более удобные для практических применений, чем условие $\alpha\to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Беляев, Ю. К., Соловьев, А. Д.: Математические методы теории надежности, Москва, 1965.
2. Феллер, В.: Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. Москва, 1968.
3. Соловьев, А. Д.: Резервирование с быстрым восстановлением. Изв. АН СССР, Техн. киб., № 1, 1970.

Постъпила на 14. XI. 1971 г.

ON A DUPLICATION SYSTEM WITH RENEWAL AND TRANSMISSIONS

B. N. Dimitrov and Vl. A. Zaicev

(SUMMARY)

We consider a system consisting of two elements — one of them in operation, the other not. If the working element fails the reserve one takes its functions and the first one is sent for a renewal. After the renewal the element stays in reserve. The k-th transmission from one element to the other may be unsuccessful with a probability q_k. The system fails either when the transmission is unsuccesful or the renewal process time overrates the life-time of the operating element. Let T_1 be the average life-time of the element, $\alpha=$ Prob. {the renewal time is longer than the life time}. It is shown that if $\max_{k\geq 1} q_k\to 0$ when $\alpha\to 0$ and for $\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} q_k\to Q(x)$, then the time τ for the first failure of the system is asymptotically exponentially distributed, i. e.

$$R(t)=P\{\tau>t\}\sim e^{-\frac{\alpha t}{T_1}-Q\left(\frac{\alpha t}{T_1}\right)}.$$