ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Йордан М. Стоянов

1. На вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы

а) марковский процесс $x=\{x_t,\ 0\leqq t\leqq T\}$, принимающий значения в фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$;

б) стандартный винеровский процесс $w=\{w_t,\ 0\leqq t\leqq T\}$, $w_0=0$, $\mathrm{M}w_t=0$, $\mathrm{M}w_t^2=t$;

в) стандартная пуассоновская мера $q(\Delta\times\Gamma)=q(\Delta\times\Gamma)(\omega)$, определенная на произведении $\mathbf{B}[0, T]\times\mathbf{B}_1$, где $\Delta\in\mathbf{B}[0, T]$ — σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[0, T]$, $\Gamma\in\mathbf{B}_1\cap V(0)$, $\mathbf{B}_1$ — σ-алгебра борелевских подмножеств действительной прямой R, $V(0)$ — дополнение произвольной окрестности нуля R. На непересекающихся множествах вида $\Delta\times\Gamma$ мера $q(\Delta\times\Gamma)$ принимает независимые значения, а ее пуассоновость означает, что при всех $\Delta\in\mathbf{B}[0, T]$ и $\Gamma\in\mathbf{B}_1\cap V(0)$ $q(\Delta\times\Gamma)$ имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\mathrm{M}\,q(\Delta\times\Gamma)=\int\limits_{\Delta}\int\limits_{\Gamma}\frac{dt\,du}{u^2}\,.$$

Процессы x и w и меру q предполагаем независимыми.

Через F_x^t, F_w^t и F_q^t обозначим σ-алгебры, порожденные соответственно процессами x и w и мерой q на интервале времени $[0, t]$.

В работах [2], [4] дано строгое построение стохастических интегралов

$$\int\limits_0^t f(s,\ \omega)\,dw_s$$

и

$$\int\limits_0^t\int\limits_R g(s, \omega,\ u)\,q(ds\times du)$$

по винеровскому процессу w и по пуассоновой мере q. При каждом $t\in[0, T]$ первый интеграл измерим относительно σ-алгебры F_w^t, а вто-

рой — относительно σ-алгебры F_q^t (функции f и g удовлетворяют некоторым условиям).

Аналогичным способом мы можем построить стохастические интегралы

$$\int_0^t f(s, x_s, \omega)\, dw_s \text{ и } \int_0^t \int_R g(s, x_s, \omega, u)\, q(ds \times du)$$

и для f и g, удовлетворяющих некоторым условиям и зависящих еще от случайного процесса x, причем σ-алгебры

$$F_{x \times w}^t = \sigma\{\omega : x_s(\omega),\ w_s(\omega),\ s \leq t\}$$

и

$$F_{x \times q}^t = \sigma\{\omega : x_s(\omega),\ q((0, s], \Gamma)(\omega),\ s \leq t\}$$

будут соответственно минимальными σ-алгебрами, относительно которых они измеримы.

Заданы также действительные функции $A(x, y, t)$, $B(x, y, t)$ и $C(x, y, t, u)$, где $x \in X$, $y \in R$, $t \in (0, T]$, $u \in R$.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad y_t = y_0 + \int_0^t A(x_s, y_s, s)\, ds + \int_0^t B(x_s, y_s, s)\, dw_s + \int_0^t \int_R C(x_s, y_s, s, u)\, q(ds \times du).$$

Отметим, что (1) является обобщением уравнения К. Ито [2] в том смысле, что функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$, называемые соответственно коэффициентами переноса, диффузии и скачков возмущаются еще случайным процессом x.

В этой работе нас будут интересовать два вопроса:

а) существование и единственность решения уравнения (1).

б) характеризация двумерного процесса (x_t, y_t).

2. Прежде всего уточним, что мы будем понимать под решением уравнения (1)?

Пусть

$$F^t = \sigma\{\omega : x_s(\omega),\ w_s(\omega),\ q((0, s], \Gamma)(\omega),\ \Gamma \in \mathbf{B}_1 \cap V(0),\ s \leq t\}$$

есть совместная σ-алгебра, порожденная процессами x и w и мерой q на интервале времени $[0, t]$.

Тогда под решением уравнения (1) будем понимать случайный процесс y_t, $0 \leq t \leq T$ измеримый относительно σ-алгебры F^t, для которого (1) имеет место при каждом t с вероятностью 1.

Пусть выпольнены следующие предположения:

I. При каждом x $A(x, y, t)$ и $B(x, y, t)$ непрерывны по (y, t), а $C(x, y, t, u)$ непрерывна по (y, t) равномерно по u.

II. Существует константа $K>0$ такая, что

$$A(x, y, t) \leqq K(1+x+y);$$

$$0<c \leqq B(x, y, t) \leqq K.(1+x+y), \quad c=\text{const};$$

$$\int_0^T \int_R C(x, y, t, u)^2 \frac{dt\,du}{u^2} < \infty$$

при каждой фиксированной паре (x, y), а для всех y' и y'' из R

$$A(x, y', t)-A(x, y'', t)^2+B(x, y', t)-B(x, y'', t)^2$$

$$+\int_R C(x, y', t, u)-C(x, y'', t, u)^2 \frac{du}{u^2} \leqq K^2 . y'-y''^2.$$

III. $$\int_0^T \mathrm{M}\, x_t^2\, dt < \infty, \quad \mathrm{M}\{\sup_t x_t\} < \infty, \quad \mathrm{M}\, y_0^2 < \infty.$$

Теорема 1. При сделанных предположениях уравнение (1) имеет притом единственное (с точностью до стохастической эквивалентности) решение y_t, $0 \leqq t \leqq T$, измеримое относительно σ-алгебры F^t, непрерывное справа и такое, что $\mathrm{M}\{\sup_t y_t^2\} < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{B}_2[0, T]$ случайных процессов ξ_t, $0 \leqq t \leqq T$, F^t — измеримых, непрерывных справа, с ограниченным вторым моментом $\mathrm{M}\,\xi_t^2 \leqq L < \infty$, $L=\text{const}$ и нормой $\|\xi\|^2 = \mathrm{M}\{\sup_t \xi_t^2\}$.

На пространстве $\mathbf{B}_2[0, T]$ определим оператор S следующим образом:

$$S\xi_t = y_0 + \int_0^t A(x_s, \xi_s, s)\, ds + \int_0^t B(x_s, \xi_s, s)\, dw_s$$

$$+\int_0^t \int_R C(x_s, \xi_s, s, u)\, q(ds \times du).$$

Обозначим $S\xi_t = \eta_t$.

Из условий I, II и III и свойств стохастических интегралов по процессу w и по мере q получаем следующие три утверждения:

а) $\mathrm{M}\,\eta_t^2 \leqq L_1$, где константа $L_1 < \infty$.

б) Существует натуральное число n такое, что n-ая степень S^n оператора S является сжимающим оператором.

в) оператор S непрерывен в $\mathbf{B}_2$ $[0, T]$.

При выводе а), б) и в) используется метод, аналогичный примененному в [4], поэтому выкладки мы не приводим.

Тогда из а) следует, что S является отображением пространства $\mathbf{B}_2[0, T]$ в себя, а из б) и в), что оператор S имеет, при том единственная, неподвижная точка. Она и будет решением уравнения (1).

Этим теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условие II, имеющее глобальный характер, может быть ослаблено следующим локальным условием:

II'. для каждого H, $0<H<\infty$, существует постоянная K_H такая, что для всех y' y'', $|y'|\leq H$, $|y''|\leq H$, выполнено условие II, где вместо константы K стоит K_H.

Тогда при условиях I, II' и III снова имеет место теорема 1.

3. Заметим, что в общем случае процесс y_t, $0\leq t\leq T$, определяемый стохастическим уравнением (1), не является марковским.

Рассмотрим двумерный процесс $z_t=(x_t, y_t)$, $0\leq t\leq T$.

Хорошо известно, что если марковский процесс x удовлетворяет некоторому стохастическому дифференциальному уравнению типа (1) (см. [4]), то двумерный процесс (x_t, y_t) будет марковским. Как показывает нижняя теорема (теорема 2) для того, чтобы процесс (x_t, y_t) был двумерным марковским достаточно потребовать только марковость процесса x.

Вопрос о характере процесса z_t имеет вполне самостоятельное значение, но он возник собственно говоря из задач оценивания частично-наблюдаемых случайных процесов (см. [6], [5] и др.). Там мы исходим из двумерного процесса (x_t, y_t), где x_t — ненаблюдаемая компонента, являющаяся марковским процесом, а наблюдаемая компонента y_t удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению типа (1). Априори предполагалось еще, что (x_t, y_t) является двумерным марковским процессом. Приводимая ниже теорема снимает это требование.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда пара (x_t, y_t), $0\leq t\leq T$, образует неоднородный двумерный марковский процесс.

Доказательство. Мы будем следовать определению марковского процесса, данному в [1].

Во-первых, процесс $z_t=(x_t, y_t)$ существует (ввиду теоремы 1), он определен на том же вероятностном пространстве (Ω, F, P), а его фазовым пространством будет $(Z, L)=(X, \mathbf{X})\times(R, \mathbf{B}_1)$ — прямое произведение фазовых пространств процессов x и y.

Во-вторых, σ-алгебра, порожденная двумерным процессом z_t на интервале времени $[0, t]$, $0\leq t\leq T$ является подалгеброй σ-алгебры $\mathbf{F}^t$.

Во-третьих, мы покажем, что для процесса z_t, $0\leq t\leq T$ выполнено марковское свойство относительно семейства $\{\mathbf{F}^t, 0\leq t\leq T\}$.

Заметим, что наряду с уравнением (1) мы можем рассмотреть еще следующее уравнение

$$y_{s,y}(t)=y+\int_s^t A(x_\tau,\ y_{s,y}(\tau),\ \tau)\,d\tau+\int_s^t B(x_\tau,\ y_{s,y}(\tau),\ \tau)\,dw_\tau$$

$$+\int_s^t\int_R C(x_\tau,\ y_{s,y}(\tau),\ \tau,\ u)\,q\,(d\tau\times du),$$

где $0\leq s\leq t\leq T$, $y=\text{const}$. Для него имеет место теорема 1. Тогда для t, $s\leq t\leq T$ процесс y_t, определяемый уравнением (1), является единственным решением уравнения

$$y_t=y_s+\int_s^t A(x_\tau,\ y_\tau,\ \tau)\,d\tau+\int_s^t B(x_\tau,\ y_\tau,\ \tau)dw_\tau$$

$$+\int_s^t\int_R C(x_\tau,\ y_\tau,\ \tau,\ u)\,q\,(d\tau\times du).$$

Очевидно, процесс $y_{s,y_s}(t)$ также является решением последнего уравнения. Следовательно

(2) $$y_t=y_{s,y_s}(t) \text{ для } s\leq t\leq T \text{ с вероятностью } 1.$$

Пусть $A\in\mathbf{X}$, $B\in\mathbf{B}_1$. Для марковости процесса $(x_t,\ y_t)$ нужно доказать следующее соотношение

(3) $$\mathrm{P}\{x_t\in A,\ y_t\in B\,\mathbf{F}^s\}=\mathrm{P}\{x_t\in A,\ y_t\in B\,|\,x_s,\ y_s\},\ t>s.$$

Для этого нам потребуется одна лемма.

Лемма. Пусть $f(x,\ y,\ \omega)$ ограниченная непрерывная по $(x,\ y)$ функция, независящая от событий из σ-алгебры $\mathbf{F}^s$, $x\in X$, $y\in R$. Тогда

(4) $$\mathrm{M}\{f(x_t,\ y_t,\ \omega)\,\mathbf{F}^s\}=\mathrm{M}\{f(x_t,\ y_t,\ \omega)\,|\,x_s\}.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f имеет вид

(5) $$f(x,\ y,\ \omega)=\sum_k \alpha_k(x,\ \omega)\,\beta_k(y),$$

где $\beta_k(y)$ — неслучайные функции. Тогда

$$\mathrm{M}\{f(x_t,\ y_t,\ \omega)\,\mathbf{F}^s\}=\sum_k \mathrm{M}\{\alpha_k\,(x_t,\ \omega)\,\beta_k\,(y_t)\,|\,\mathbf{F}^s\}.$$

Но из (2) вытекает, что для $t>s$ y_t не зависит от событий из σ-алгебры $\mathbf{F}^s$. Следовательно

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{M}\{f(x_t, y_t, \omega)\mathbf{F}^s\} = \sum_k \beta_k(y_t)\,\mathrm{M}\{\alpha_k(x_t, \omega)\mathbf{F}^s\}.$$

Поскольку процесс x не зависит от w и q, то

$$\mathrm{M}\{\alpha_k(x_t, \omega)|\mathbf{F}^s\} = \mathrm{M}\{\alpha_k(x_t, \omega)F_x^s\}.$$

Из условия леммы при каждом x $\alpha_k(x, \omega)$ не зависит от событий из σ-блгебры $\mathbf{F}^s$, а следовательно и от событий из σ-алгебры F_x^s. Но процесс x марковский и тривиально выводится, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$

$$\mathrm{M}\{\varphi(x_t)F_x^s\} = \mathrm{M}\{\varphi(x_t)x_s\}, \quad t>s.$$

Тогда продолжая равенство (6), получаем

$$\mathrm{M}\{f(x_t, y_t, \omega)\mathbf{F}^s\} = \mathrm{M}\{f(x_t, y_t, \omega)x_s\}.$$

Но любую ограниченную непрерывную функцию $f(x, y, \omega)$ можно аппроксимировать суммами типа (5). Это следует из теоремы Стоуна—Вейерштрасса для случайных функции, [3]. Лемма доказана.

Теперь из (4) легко получить (3). Действительно, пусть $f(x, y, \omega) = \chi_{A,B}(x, y)$. Тогда

$$\mathrm{P}\{x_t \in A, y_t \in B|\mathbf{F}^s\} = \mathrm{P}\{x_t \in A, y_t \in B|x_s\}.$$

Но согласно (2) y_t в правой части на множестве полной меры можем заменить на $y_{s,y_s}(t)$ для $t>s$, т. е.

$$\mathrm{P}\{x_t \in A, y_t \in B|\mathbf{F}^s\} = \mathrm{P}\{x_t \in A, y_{s,y_s}(t) \in B\,x_s\},$$

которое очевидно равняется

$$\mathrm{P}\{x_t \in A, y_t \in B\,x_s, y_s\}.$$

Итак, равенство (3) установлено, что и завершает доказательство теоремы 2.

4. Для задач оценивания частично-наблюдаемых случайных процессов нам нужны многомерные аналоги теорем 1 и 2.

Пусть $x=\{x_t, 0\leqq t\leqq T\}$ марковский процесс, принимающий значения в k-мерном евклидовом пространстве $(R_k, \mathbf{B}_k)$, где $\mathbf{B}_k$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R_k; $w=\{w_t, 0\leqq t\leqq T\}$—$l$-мерный стандартный винеровский процесс, пуассоновская мера $q(\Delta\times\Gamma)$ определена как и в п. 1., но уже $\Gamma\in\mathbf{B}_l\cap\overline{V(0)}$; $A(x, y, t)$ и $C(x, y, t, u)$ — l-мерные вектор-функции, $B(x, y, t)$ — матрица порядка $l\times l$.

Пусть для всех компонент векторов $A(\cdot)$ и $C(\cdot)$ и матрицы $B(\cdot)$ выполнены условия I, II и III, но условие $B(x, y, t)\geqq c>0$ заменяется на $\det BB^*\geqq c>0$, где B^* — матрица, транспонированная к B, а

$$\int_0^T \int_R |C(x, y, t, u)|^2 \frac{dt\,du}{u^2} < \infty$$

заменяется на

$$\int_0^T \int_{R_l} \| C(x, y, t, u) \|^2 \frac{dt\,du}{u^{l+1}} < \infty.$$

Уравнение (1) понимается теперь в векторном смысле.

Имеют место следующие теоремы, обобщающие теоремы 1 и 2.

Теорема 1*. Уравнение (1) имеет единственное (с точностью до эквивалентности) решение y_t, $0 \leq t \leq T$, являющееся l-мерным случайным процессом, измеримым относительно σ-алгебры F^t, непрерывным справа и для него

$$M\{\sup_t |y_t|^2\} < \infty, \quad |y|^2 = y_1^2 + \cdots + y_l^2.$$

Теорема 2*. Пара (x_t, y_t), $0 \leq t \leq T$ образует $(k+l)$-мерный марковский процесс.

Доказательства этих теорем повторяют с небольшими изменениями доказательства теорем 1 и 2, поэтому мы их не приводим.

5. Остановимся на некоторых свойствах процеса $z_t = (x_t, y_t)$.

а) Процессу z_t отвечает некоторая переходная функция $p(s, z; t, C) = P\{z_t \in C \mid z_s = z\}$, где $C = A \times B \in L$, $z = (x, y) \in Z$. Фиксируем $x_s = x, y_s = y$ Тогда из леммы получаем

$$P\{x_t \in A, y_t \in B \mid x_s = x, y_s = y\} = P\{x_t \in A, y_{s, y_s}(t) \in B \mid x_s = x\}.$$

Вывод. Переходные функции двумерного процеса z_t выражаются через условные меры, соответствующие процессу y_t из уравнения (1)

б) Возникает вопрос: является ли марковский процесс (x_t, y_t) при некоторых условиях строго марковским? Ответ положителен.

Предположим, что процесс $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ строго марковский [1] Тогда для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ и любого марковского момента τ (их определение и свойства см. в [1]) при $h \geq 0$

$$M\{\varphi(x_{\tau+h}) \mid F_x^\tau\} = M\{\varphi(x_{\tau+h}) \mid x_\tau\}.$$

Дальше, немного модифицируя доказательство верхней леммы, в итоги получаем

$$P\{z_{\tau+h} \in C \mid F^\tau\} = P\{z_{\tau+h} \in C \mid z_\tau\}.$$

Вывод. Если процесс x строго марковский, то и двумерный процесс (x_t, y_t) будет строго марковским.

в) если процесс x непрерывный или непрерывный справа и имеет пределы слева, то двумерный процесс (x_t, y_t) непрерывен справа.

г) если коэффициенты $A(x, y, t)$, $B(x, y, t)$ и $C(x, y, t, u)$ не зависят от аргумента t, а x однородный марковский процесс, то тогда и (x_t, y_t) будет однородным марковским процессом.

д) если $A(x, y, t)$, $B(x, y, t)$ и $C(x, y, t, u)$ являются по t периодическими функциями с периодом r, а x — периодический марковский процесс с периодом r, то (x_t, y_t) будет периодическим марковским процессом с тем же периодом r.

Можно указать и другие свойства процесса (x_t, y_t).

В заключение автор выражает свою благодарность участникам семинара по вероятностным задачам в теории оптимального управления под руководством проф. А. Н. Ширяева (Москва, МГУ) за полезное обсуждение этой работы, а также Р. Ф. Камараш за помощь при оформлении рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынкин, Е. Б.: Марковские процессы. Москва, 1963.
2. Ito, K.: On stochastic differential equations. Memoirs Amer. Math. Soc., **4** (1951), 1—51.
3. Muckherjea, A. A.: A Stone — Weierstrass theorem for random functions. Bull. Austral. Math. Soc., **2** (1970), 233—236.
4. Скороход, А. В.: Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961.
5. Стоянов, Й. М.: Фильтрация общих скачкообразных марковских процессов. Изв. Матем. Инст. Болг. АН (1971), в печати.
6. Ширяев, А. Н.: О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов. Теория вероятн. и ее применен. **11** (1966), 200—206.

Постъпила на 15. XI. 1971 г.

ON A CLASS OF TWO-DIMENSIONAL MARKOV PROCESSES

J. M. Stoyanov

(SUMMARY)

In the paper the following stochastic equation is considered

$$y_t = y_0 + \int_0^t A(x_s, y_s, s)\,ds + \int_0^t B(x_s, y_s, s)\,dw_s + \int_0^t \int_R C(x_s, y_s, s, u)\,q(ds \times du), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

where w_t is a standard Wiener process and $q(\Delta \times \Gamma)$ is a standard Poisson measure. The equation differs from the well known Ito-equation by the coefficients $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, which depend on a random process (this is new in (1)) x_t, $0 \leq t \leq T$, which we suppose to be a Markov process.

It is proved (Theorem 1) that the equation (1) has a unique solution under certain conditions, the solution being a random process y_t, $0 \leq t \leq T$, measurable for every t with respect to the σ-algebra

$$\mathbf{F}^t = \sigma\{\omega : x_s(\omega),\ w_s(\omega),\ q((0, s], \Gamma)(\omega),\ \Gamma \in \mathbf{B}_1 \cap \overline{V(0)},\ s \leq t\}.$$

The main result of the paper (Theorem 2) is the following: (x_t, y_t), $0 \leq t \leq T$, is a two-dimensional Markov process.

It is shown that the process (x_t, y_t) has various useful properties. Theorems 1 and 2 are generalized in the multidimensional case.