# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОЦЕНОК ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**Благовест Сендов и Васил А. Попов**

В этой заметке мы найдем оценку для отклонения линейного положительного оператора $L_n(f;\ x)$ от функции $f$ относительно расстояния Хаусдорфа с параметром $\alpha$. Эта оценка применяется к операторам Джексона, Фейера, Валле-Пуссена. Из полученых оценок для отклонения операторов Джексона, Фейера и Валле-Пуссена от функции $f$ относительно хаусдорфового расстояния с параметром $\alpha$ легко следуют класические оценки, выражающие равномерное расстояние между $f$ и $L_n f$ через модуль непрерывности функции $f$. С другой стороны, из них можно получить оценки для хаусдорфового расстояния между $f$ и $L_n f$, полученные раньше в [1].

Отметим, что если функция $f \in \mathrm{Lip}\,\beta$, то полученные оценки для хаусдорфового расстояния между $f$ и операторами Джексона, Фейера, Валле-Пуссена лучше, чем оценки, которые имеют место для любой функций.

§ 1.

Напомним, что хаусдорфовое расстояние с параметром $\alpha$ между двумя непрерывными на отрезке $\Delta$ функциями $f$ и $g$ определяется следующим образом:

$$r_\alpha(f,\ g)=\max\left\{\max_{x\in\Delta}\ \min_{y\in\Delta}\ \max\left\{\frac{1}{\alpha}\ |x-y|,\ |f(x)-g(y)|\right\},\right.$$

$$\left.\max_{x\in\Delta}\ \min_{y\in\Delta}\ \max\ \left\{\frac{1}{\alpha}\ |x-y|,\ |f(y)-g(x)|\right\}\right\}.$$

Когда $\alpha$ стремится к нулю, $r_\alpha(f,\ g)$ стремится к равномерному расстоянию между $f$ и $g$:

$$\lim_{\alpha\to 0}\ r_\alpha(f,\ g)=\rho(f,\ g)=\max_{x\in\Delta}\ |f(x)-g(x)|.$$

Мы будем также рассматривать $h$-расстояние от $g$ до $f$ [2]:

$$h_\alpha(f,\ g)=\max_{x\in\Delta}\ \min_{y\in\Delta}\ \max\ \left\{\frac{1}{\alpha}\ |x-y|,\ |f(y)-g(x)|\right\},$$

которое является $\Delta$-метрикой в $C$.

Очевидно

$$r_\alpha(f, g) = \max\{h_\alpha(f, g), h_\alpha(g, f)\}.$$

В [2] показано, что для периодических функций и $\alpha = 1$

$$r_\alpha(f, g) \leq h_\alpha(f, g) + \mu(f;\ 4\alpha h_\alpha(f, g)), \tag{1}$$

где $\mu(f;\ \delta)$ — модуль немонотонности функции $f$ [1]:

$$\mu(f;\ \delta) = \frac{1}{2} \max_{\substack{x' \leq x \leq x'' \\ x''-x' \leq \delta}} \{f(x') - 2f(x) + f(x'') - f(x') - f(x'')\}.$$

Пользуясь методом из [2], легко показать, что (1) имеет место для любых $\alpha > 0$.

Можно показать, что оценку (1) улучшить нельзя. Таким образом в общем случае для того, чтобы найти оценку для $r_\alpha(f, g)$, достаточно найти оценку для $h_\alpha(f, g)$.

Между равномерном расстоянием, $h$-расстоянием и хаусдорфовом расстоянием существует также связь [2]:

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &\leq h_\alpha(f, g) + \omega(f;\ \alpha h_\alpha(f, g)) \\ \rho(f, g) &\leq r_\alpha(f, g) + \omega(f;\ \alpha r_\alpha(f, g)). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\omega(f;\ \delta)$ — модуль непрерывности функции $f$:

$$\omega(f;\ \delta) = \sup_{|x'-x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Отметим, что в случае $\alpha = 1$ („класическое хаусдорфовое расстояние“ см. [1]) индекс $\alpha$ будем опускать:

$$r_1(f, g) = r(f, g); \quad h_1(f, g) = h(f, g).$$

## § 2.

Пусть $L$ — любой линейный положительный оператор, $B[a, b] \xrightarrow{L} C[a, b]$, где $B[a, b]$ — пространство всех ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций, а $C[a, b]$ — пространство всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $L(1;\ x) = 1$. Пусть $f \in C[a, b]$.

Сначала найдем оценку для $h_\alpha(f, Lf)$.

Обозначим:

$$h_\alpha(f, Lf;\ x) = \min_y \max\left\{\frac{1}{\alpha}|x-y|,\ |f(y) - L(f;x)|\right\}.$$

Пусть $\delta > 0$ — любое положительное число. Мы можем представить функцию $f$ следующим образом:

$$f = f_\delta^x + f_{\bar\delta}^x, \text{ где}$$

$$f_\delta^x(t)=\begin{cases} f(t) & \text{для } |x-t|\leqq\delta, \\ f(x-\delta) & \text{для } t<x-\delta, \\ f(x+\delta) & \text{для } t>x+\delta; \end{cases}$$

$$f_\delta^x(t)=\begin{cases} 0 & \text{для } |x-t|\leqq\delta, \\ f(t)-f(x-\delta) & \text{для } t<x-\delta, \\ f(t)-f(x+\delta) & \text{для } t>x+\delta \end{cases}$$

Так как $L$-линейный оператор, то

$$Lf=Lf_\delta^x+Lf_\delta^x\ .$$

Из положительности оператора $L$ и из того, что $L(1\,;\,x)=1$, следует сразу, что для всех $t\in[a,\ b]$

(3) $$L(f_\delta^x;\ t)\in[m_x,\ M_x],$$

где

$$m_x=\min_{|y-x|\leqq\delta} f(y),\ M_x=\max_{|y-x|\leqq\delta} f(y).$$

В частности

(4) $$L(f_\delta^x;\ x)\in[m_x,\ M_x].$$

Из непрерывности функции $f$ тогда следует, что существует $y_x$, $|y_x-x|\leqq\delta$ такое, что $f(y_x)=L(f_\delta^x;\ x)$.

Тогда

$$h_\alpha(f,\ Lf;\ x)\leqq\max\left\{\frac{1}{\alpha}\ |y_x-x|,\ |f(y_x)-L(f_\delta^x;\ x)-L(f_\delta^x;\ x)|\right\}$$

$$\leqq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ |L(f_\delta^x\,;\ x)|\right\}.$$

Мы видим таким образом, что для того, чтобы оценить $h_\alpha(f,\ Lf)$, достаточно оценить $|L(f_\delta^x,\ x)|$.

Покажем теперь, что для всех $t\in[a,\ b]$ имеют место неравенства:

(6) $$-\tilde{\omega}_\delta^x(t)\leqq f_\delta^x(t)\leqq\tilde{\omega}_\delta^x(t),$$

где функция $\tilde{\omega}_\delta^x$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\omega}_\delta^x(t)=\begin{cases} 0 & \text{для } |x-t|\leqq\delta, \\ \omega(f;\ t-x-\delta) & \text{для } t>x+\delta, \\ \omega(f;\ x-t-\delta) & \text{для } t<x-\delta. \end{cases}$$

Действительно, если $|x-t|\leqq\delta$, то

$$\tilde{\omega}_\delta^x(t)=f_\delta^x(t)=0.$$

Если $t>x+\delta$, то

$$|f_\delta^x(t)|=|f(t)-f(x+\delta)|\leqq\omega(f;\ t-x-\delta);$$

если $t<x-\delta$, то

$$|f_\delta^x(t)|=|f(t)-f(x-\delta)|\leqq\omega(f;\ x-\delta-t).$$

Этим (6) доказано.

Из (6) и положительности оператора $L$ следует

$$|L(f_\delta^x;\ x)|\leqq|L(\widetilde{\omega}_\delta^x;\ x)|,$$

что, вместе с (5), дает

$$h_a(f,\ Lf;\ x)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{2},\ |L(\widetilde{\omega}_\delta^x;\ x)|\right\}. \tag{7}$$

Мы получили оценку для $h_a(f,\ Lf)$ через модуль непрерывности функции $f$. Сформулируем полученный результат:

Теорема 1. Пусть $L$-линейный положительный оператор, $L(1;x)\equiv 1$. Тогда для любой непрерывной функции $f$ и любого $\delta>0$ имеет место неравенство:

$$h_a(f,Lf;\ x)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{2},\ |L(\widetilde{\omega}_\delta^x;\ x)|\right\},$$

где

$$\widetilde{\omega}_\delta^x(t)=\begin{cases}0 & \text{для } |x-t|\leqq\delta,\\ \omega(f;\ t-x-\delta) & \text{для } t>x+\delta,\\ \omega(f;\ x-t-\delta) & \text{для } t<x-\delta.\end{cases}$$

Получим также периодический аналог теоремы 1. Обычные линейные положительные операторы, действующие в $C_{2\pi}$-пространство $2\pi$-периодических непрерывных функций, имеют вид:

$$L(f;\ x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K(t)\,dt, \tag{8}$$

где ядро $K(t)$ — положительное, четное и $\int_{-\pi}^{\pi}K(t)\,dt=1$.

Тогда очевидно

$$L(\widetilde{\omega}_\delta^x;\ x)=2\int_{\delta}^{\pi}\omega(f;\ t-\delta)K(t)\,dt$$

и следовательно имеет место.

Теорема 2. Пусть $L$-линейный положительный оператор типа (8) и $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция. Тогда для любого $\delta$, $0<\delta<\pi$, имеет место неравенство:

$$h_a(f, Lf) \leqq \max\left\{\frac{\delta}{\alpha}, 2\int_{\delta}^{\pi} \omega(f; t-\delta) K(t)\, dt\right\}.$$

Отметим: попутно мы получили, что

$$L(f; x) \in [m_x - \theta, M_x + \theta], \tag{9}$$

где

$$m_x = \min_{x-y \leqq \delta} f(y), \quad M_x = \max_{x-y \leqq \delta} f(y),$$

$$\theta = 2\int_{\delta}^{\pi} \omega(f; t-\delta) K(t)\, dt.$$

Из теоремы 2, пользуясь неравенством (1), можно получить оценку для $r_a(f, Lf)$.

Однако лучшую оценку получим, если оценим $h_a(Lf, f)$.

Для этого воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. Пусть $f$ — непрерывная функция. Обозначим:

$$m(x-\delta) = \min_{|y-x+\delta| \leqq \delta} f(y); \quad M(x-\delta) = \max_{|y-x+\delta| \leqq \delta} f(y),$$

$$m(x+\delta) = \min_{|y-x-\delta| \leqq \delta} f(y); \quad M(x+\delta) = \max_{|y-x-\delta| \leqq \delta} f(y).$$

Тогда

$$2\mu(f, 4\delta) \geqq \min\{M(x-\delta), M(x+\delta)\} - \max\{m(x-\delta), m(x+\delta)\} \geqq 0. \tag{10}$$

*Доказательство.* Пусть точки $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ определяются через

$$f(x_1) = m(x-\delta), \quad |x_1 - x + \delta| \leqq \delta;$$

$$f(x_2) = m(x+\delta), \quad |x_2 - x - \delta| \leqq \delta;$$

$$f(y_1) = M(x-\delta), \quad |y_1 - x + \delta| \leqq \delta;$$

$$f(y_2) = M(x+\delta), \quad |y_2 - x - \delta| \leqq \delta$$

(некоторые из них могут совпадать с точкой $x$).

Тогда, пользуясь определением $\mu(f; \delta)$, получаем:

$$2\mu(f; 4\delta) \geqq |f(x_1) - 2f(x) + f(x_2)| - |f(x_1) - f(x_2)|$$
$$= 2[f(x) - \max\{f(x_1), f(x_2)\}],$$

$$2\mu(f; 4\delta) \geqq |f(v_1) - 2f(x) + f(y_2)| - |f(y_1) - f(y_2)|$$
$$= 2[\min\{f(y_1, f(y_2)\} - f(x)],$$

откуда следует (10).

Пусть теперь $f$ — $2\pi$-периодическая функция. Для того, чтобы оценить $h_\alpha(Lf, f)$, рассмотрим $L(f;\ x-\delta)$ и $L(f;\ x+\delta)$. Из (9) следует

$$(11)\qquad \begin{aligned} &L(f;\ x-\delta)\in[m(x-\delta)-\theta,\ M(x-\delta)+\theta],\\ &L(f;\ x+\delta)\in[m(x+\delta)-\theta,\ M(x+\delta)+\theta], \end{aligned}$$

где

$$\theta=2\int_\delta^\pi \omega(f;\ t-\delta)K(t)\,dt.$$

Так как $Lf$ — непрерывная функция, применяя лемму 1, из (10) и (11) получаем, что существует такая точка $y_x$, $|y_x-x\leq\delta$, что

$$|f(x)-L(f;\ y_x)|\leq 2\mu(f;\ 4\delta)+\theta.$$

Окончательно получили, что

$$(12)\qquad h_\alpha(Lf, f)\leq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ 2\mu(f;\ 4\delta)+\theta\right\}.$$

Из теоремы 2 и (12) следует

Теорема 3. Пусть $L$-линейный положительный оператор типа (8) и $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\delta$, $0<\delta<\pi$, имеет место неравенство:

$$(13)\qquad r_\alpha(f, Lf)\leq\max\left\{\frac{\delta}{2},\ 2\mu(f;\ 4\delta)+2\int_\delta^\pi\omega(f;\ t-\delta)K(t)\,dt\right\}.$$

Оценка (13) аналогична по виду оценке для $r(f, Lf)$ из [1], но в ее участвует модуль непрерывности функции $f$.

## § 3

Применим теперь полученые оценки к некоторым известным операторам.

Рассмотрим оператор Джексона:

$$(14)\qquad U_n(f;\ x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt.$$

Для того, чтобы получить оценку для $h_\alpha(f, u_nf)$, мы должны, в силу теоремы 2, оценить

$$\theta_n=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_\delta^\pi\omega(f;\ t-\delta)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt.$$

Пользуясь того, что $\omega(f;\ \lambda t)\leqq(1+\lambda)\omega(f;\ t)$, $\lambda>0$, получаем

$$\theta_n\leqq\frac{3\pi^4}{\pi n(2n^2+1)}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{2t}{\delta}\,\frac{\omega(f,\ \delta)}{t^4}\,dt=O\left(\frac{\omega(f;\ \delta)}{n^3\delta^3}\right).$$

Эта оценка, вместе с теоремами 2, 3 дает

Теорема 4. Пусть $U_n$ — операторы Джексона (14) и $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\delta$, $0<\delta<\pi$, имеет место

$$h_\alpha(f,\ U_nf)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ \frac{c\,\omega(f;\ \delta)}{n^3\delta^3}\right\},\tag{15}$$

$$r_\alpha(f,\ U_nf)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ \frac{c\,\omega(f;\ \delta)}{n^3\delta^3}+2\mu(f;\ 4\delta)\right\},\tag{15'}$$

где $c$ — абсолютная постоянная.

Если $\omega(f;\ \delta)=O(\delta^\beta)$, мы можем оптимизировать формулу (15) по $\delta$. Пусть для простоты $\alpha=1$. Определяя $\delta$ из условия

$$\delta=\frac{c\,\delta^{-3+\beta}}{n^3},\ \text{т. е.}\ \delta=\left(\frac{c}{n^3}\right)^{\frac{1}{4-\beta}},$$

получаем

Следствие 1. Пусть $f\in\mathrm{Lip}\,\beta$. Тогда

$$h_\alpha(f,\ U_nf)=O\left(n^{-\frac{3}{4-\beta}}\right)\tag{16}$$

и следовательно

$$r_\alpha(f,\ U_nf)=O\left(n^{-\frac{3}{4-\beta}}+\mu(f;cn^{-\frac{3}{4-\beta}}\right),\tag{17}$$

где $c$ — абсолютная постоянная.

Отметим, что в [1] получена следующая оценка для $r_1(f,\ U_nf)$:

$$r(f,\ U_nf)=O\left(n^{-\frac{3}{4}}+\mu\left(f;\ cn^{-\frac{3}{4}}\right)\right).\tag{18}$$

Оценка (17) лучше (18) для каждого $1\geqq\beta>0$.

Отметим, что (18) следует сразу из (15'), если положить

$$(\omega(f;\ \delta))\leqq M=\max|f|,\quad \delta=n^{-\frac{3}{4}}.$$

Из (15') (или например от (15)) следует также теорема Джексона (см. напр. [3]):

$$\rho(f,\ U_nf)=O\left(\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right).$$

Действительно (2) дает

$$\rho(f,\ U_n f)\leqq r_\alpha(f,\ U_n f)+\omega(f;\ \alpha r_\alpha(f,\ U_n f)).$$

Если положить в (15′) $\alpha=n^{-1}\omega^{-1}\left(f;\ \frac{1}{n}\right)$, $\delta=\frac{1}{n}$, получаем

$$\rho(f,\ U_n f)=O\left(\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)+\mu\left(f;\ \frac{4}{n}\right)\right)=O\left(\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right)\right)$$

(так как очевидно $\mu(f;\ \delta)\leqq\omega(f;\ \delta)$).

Рассмотрим теперь оператор Фейера:

$$\Phi_n(f;\ x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Оценим

$$\tau_n=\frac{1}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi}\omega(f;\ t-\delta)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Имеем

$$|\tau_n|=O\left(\frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{t}{\delta}\,\frac{\omega(\delta)}{t^2}\,dt\right)=O\left(\frac{\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta}}{n\delta}\right)$$

и следовательно имеет место

Теорема 5. Пусть $\Phi_n$ — операторы Фейера и $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция. Для каждого $\delta$, $0<\delta<\pi$, выполнено

$$h_\alpha(f,\Phi_n f)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ \frac{c\,\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta}}{n\delta}\right\},$$

$$r_\alpha(f,\ \Phi_n f)\leqq\max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ \frac{c\,\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta}}{n\delta}+2\mu(f;4\delta)\right\},\tag{19}$$

где $c$ — абсолютная постоянная.

Из (2) и (19), полагая

$$\delta=\frac{1}{n},\ \alpha=1,$$

получаем результат Бернштейна [3], для $f\in\mathrm{Lip}\,1$:

$$\rho(f,\ \Phi_n f)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Если $\omega(f;\ \delta)=O(\delta^\beta)$, то $(0<\beta<1)$

$$|\tau_n|=O\left(\frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{t^\beta}{t^2}\,dt\right)=O\left(\frac{1}{n\,\delta^{1-\beta}}\right)$$

и, следовательно, если выбрать $\delta = n^{-\frac{1}{2-\beta}}$, $\alpha = 1$, получаем

$$h_\alpha(f, \Phi_n f) = O\left(n^{-\frac{1}{2-\beta}}\right),$$

$$r_\alpha(f, \Phi_n f) = O\left(n^{-\frac{1}{2-\beta}} + \mu\left(f;\ n^{-\frac{1}{2-\beta}}\right)\right). \tag{20}$$

Отметим, что в [1] получена следующая оценка:

$$r(f, \Phi_n f) = O\left(n^{-\frac{1}{2}} + \mu\left(f;\ n^{-\frac{1}{2}}\right)\right). \tag{21}$$

Сравнение (20) и (21) показывает, что если $f \in \mathrm{Lip}\,\beta$, $0<\beta<1$, то ее приближение относительно хаусдорфового расстояния лучше чем $O\left(n^{-\frac{1}{2}} + \mu\left(f;\ n^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$ для каждого $0<\beta<1$.

Рассмотрим наконец оператор Валле-Пуссена:

$$V_n(f;\ x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt.$$

Имеем:

$$|\sigma_n| = \left|\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\omega(f;\ t-\delta)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{8\sqrt{n}}{\pi}\,\frac{\omega(f;\ \delta)}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\frac{t}{2}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

$$= O\left(\frac{\omega(f;\ \delta)}{\sqrt{n}\ \delta}\cos^{2n+1}\frac{\delta}{2}\right)$$

(так как $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < 2\sqrt{n}$ (см. [3]).

Для $0<\delta<1$

$$\cos^{2n+1}\frac{\delta}{2} < \left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^{2n+1}$$

и следовательно имеет место

**Теорема 6.** Пусть $V_n$ — операторы Валле-Пуссена и $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\delta$, $0<\delta<1$, выполнено:

$$h_\alpha(f, V_n f) \leq \max\left\{\frac{\delta}{2},\ \frac{c\,\omega(f;\ \delta)\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^{2n+1}}{\sqrt{n}\ \delta}\right\},$$

$$(22)\qquad r_\alpha(f,\ V_n f)\leq \max\left\{\frac{\delta}{\alpha},\ \frac{c\,\omega(f;\ \delta)\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^{2n+1}}{\sqrt{n}\ \delta}+2\mu(f;4\delta)\right\},$$

где $c$ — абсолютная постоянная.

Из (22), полагая $\delta=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, $\alpha=1$, получаем результат из [1]:

$$r(f,\ V_n f)=O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}+\mu\left(f;\ \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right).$$

Если положит в (22) $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{n}\,\omega\left(f;\ n^{-\frac{1}{2}}\right)}$, используя (2), получаем результат Натансона [3]:

$$\rho(f,\ V_n f)=O\left(\omega\left(f;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в метрике Хаусдорфа, УМН, 24, вып. 5(149), (1969), 141—178.
2. Андреев, А., Попов, В. А.: Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една Δ-метрика от хаусдорфов тип. Год. на Соф. унив., Мат. фак.
3. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций, Москва, 1949.

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

# A GENERALIZATION OF THE ESTIMATES FOR THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY LINEAR POSITIVE OPERATORS

Bl. Sendov and V. A. Popov

(SUMMARY)

In the paper an estimate is found for the deviation of a linear positive operator $L_n(f;x)$ from the function $f$ with respect to Hausdorff's distance with a parameter $\alpha$. This estimate is applied to the operators of Jackson, Fejer, Vallé-Poussin. From the obtained estimates for the deviation of the operators of Jackson, Féjer and Vallé-Poussin From the function $f$ with respect to Hausdorff's distance with a parameter $\alpha$ it is easily to get the classical estimates for the uniform distance between $f$ and $L_n f$ by means of the modulus of continuity of the function $f$. On the other hand it is possible to get from them those estimates for the Hausdorff's distance between $f$ and $L_n f$, given earlier in (I).